

1. Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 de matrices

E.6870     On considère les matrices M et R définies par :

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix} ; \quad R = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On définit la suite de matrice (X_n) définie par :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1100 \\ 1100 \end{pmatrix} ; \quad X_{n+1} = M \cdot X_n + R \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$X_n = \begin{pmatrix} 1300 - 200 \times 0,75^n \\ 900 + 200 \times 0,75^n \end{pmatrix}$$

E.108    On considère les matrices A , B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On considère la suite (U_n) de matrices colonnes définies par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \quad U_{n+1} = A \cdot U_n + B \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

① Justifier que la matrice C vérifie l'égalité :
 $C = A \cdot C + B$

② On définit la suite (V_n) de matrices lignes par la relation :

$$V_n = U_n - C \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a Justifier l'égalité :

$$V_{n+1} = A \cdot V_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

b À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$U_n = \begin{pmatrix} 3^{n+2} - 9 \times 2^n + 1 \\ 3 \times 2^n - 1 \end{pmatrix}$$

2. Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 de matrices : état stable et suite conjointe

E.6395  

Définition :

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère une suite (U_n) de matrice colonne comportant k lignes vérifiant une relation de la forme :

$$U_{n+1} = A \cdot U_n + B \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

où A est une matrice carrée d'ordre k et B est une matrice colonne comportant k lignes.

On appelle **état stable** de la suite (U_n) , la matrice colonne S (comportant k lignes) et vérifiant : $S = A \cdot S + B$

On considère une suite (U_n) vérifiant la relation :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot U_n + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que la matrice $S = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un état stable de la suite (U_n) de matrices.

E.8647   On considère la suite (X_n) de matrices colonne, vérifiant :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -20 & 7 \end{pmatrix} \cdot X_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

① Vérifier que la matrice $S = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$ représente l'état stable de cette relation de récurrence.

② On considère la suite (V_n) de matrices colonnes définies, pour tout entier naturel n , par : $V_n = X_n - S$

a Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_{n+1} = A \cdot V_n$

b À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$V_n = \begin{pmatrix} 7 \times 2^n - 4 \times 3^n \\ 7 \times 2^{n+2} - 20 \times 3^n \end{pmatrix}$$

c En déduire l'expression de la matrice X_n en fonction de n .

3. Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 de matrices : étude de l'état stable

E.5514    On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) dont les termes vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + 1 \\ y_{n+1} = -2x_n + 4y_n + 3 \end{cases}$$

① On considère la matrice colonne B et, pour tout entier n , la matrice colonne X_n définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice carrée A de dimension 2 vérifiant la relation :

$$X_{n+1} = A \cdot X_n + B$$

② a Justifier que la matrice $I_2 - A$ est inversible. On donnera l'expression de la matrice $(I_2 - A)^{-1}$.

b Déterminer la matrice X réalisant l'égalité :
 $X = A \cdot X + B$

c Si les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes, donner les valeurs de leur limite.

3 On considère la suite (V_n) de matrice-colonne définie par :
 $V_n = X_n - X$

En déduire que, pour tout entier n naturel, la relation :
 $V_n = A^n \cdot V_0$

4 On considère la matrice carrée P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a Justifier que la matrice P est inversible.

b On note D la matrice définie par : $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.
 Donner une expression de la matrice D^n pour tout entier naturel n .

c En déduire une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n .

5 On prend comme valeur initiale des suites :

$$x_0 = 1 \quad ; \quad y_0 = 2$$

Que peut-on dire sur la convergence des suites (x_n) et (y_n) ?

E.5515    On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) dont les termes vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1,4x_n - 0,6y_n + 0,2 \\ y_{n+1} = 0,9x_n - 0,1y_n + 0,3 \end{cases}$$

1 On considère la matrice colonne B et, pour tout entier n , la matrice colonne X_n définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice carrée A de dimension 2 vérifiant la relation :

$$X_{n+1} = A \cdot X_n + B$$

2 **a** Justifier que la matrice $I_2 - A$ est inversible, puis donner à l'expression de la matrice $(I_2 - A)^{-1}$.

b Déterminer la matrice X réalisant l'égalité :
 $X = A \cdot X + B$

c Si les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes, donner les valeurs de leur limite.

3 On considère la suite (V_n) de matrices colonnes définie par :

$$V_n = X_n - X \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

En déduire que, pour tout entier n naturel, la relation :
 $V_n = A^n \cdot V_0$

4 On considère la matrice carrée P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a Justifier que la matrice P est inversible.

b On note D la matrice définie par : $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.
 Donner une expression de la matrice D^n pour tout entier naturel n .

c En déduire une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n .

5 En considérant les valeurs de départ :

$$x_0 = 0,5 \quad ; \quad y_0 = 0,5$$

Que peut-on dire de la convergence des suites (x_n) et (y_n) ?

4. Chaîne de Markov : graphe pondéré orienté associé

E.8216    On considère la chaîne de Markov (X_n) dans l'espace des états $\Omega = \{e_1 ; e_2\}$ dont l'évolution des distributions est donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\mathcal{P}_{(X_n=e_1)}(X_{n+1}=e_1) = 0,2 \quad ; \quad \mathcal{P}_{(X_n=e_1)}(X_{n+1}=e_2) = 0,8$$

$$\mathcal{P}_{(X_n=e_2)}(X_{n+1}=e_1) = 0,7 \quad ; \quad \mathcal{P}_{(X_n=e_2)}(X_{n+1}=e_2) = 0,3$$

Donner le graphe pondéré orienté associé à cette chaîne de Markov.

E.8217    On considère la chaîne de Markov (X_n) dans l'espace des états $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; e_3\}$ dont l'évolution

des distributions est donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\mathcal{P}_{(X_n=e_1)}(X_{n+1}=e_1) = 0,2 \quad ; \quad \mathcal{P}_{(X_n=e_1)}(X_{n+1}=e_2) = 0,1$$

$$\mathcal{P}_{(X_n=e_1)}(X_{n+1}=e_3) = 0,7 \quad ; \quad \mathcal{P}_{(X_n=e_2)}(X_{n+1}=e_1) = 0,6$$

$$\mathcal{P}_{(X_n=e_2)}(X_{n+1}=e_2) = 0,2 \quad ; \quad \mathcal{P}_{(X_n=e_2)}(X_{n+1}=e_3) = 0,2$$

$$\mathcal{P}_{(X_n=e_3)}(X_{n+1}=e_1) = 0,5 \quad ; \quad \mathcal{P}_{(X_n=e_3)}(X_{n+1}=e_2) = 0,1$$

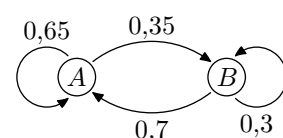
$$\mathcal{P}_{(X_n=e_3)}(X_{n+1}=e_3) = 0,4$$

Donner le graphe pondéré orienté associé à cette chaîne de Markov.

5. Chaîne de Markov : du graphe vers la matrice de transition

E.5390    On considère un phénomène évolutif entre deux états A et B . On note respectivement a_n et b_n l'effectif associé à ces deux états au rang n .

Ci-dessous est représenté le graphe pondéré orienté associé à cette évolution :

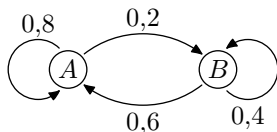


Déterminer la matrice T de transition vérifiant la relation :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \cdot T$$

E.8640 On considère un phénomène évolutif entre deux états A et B . On note respectivement a_n et b_n l'effectif associé à ces deux états au rang n .

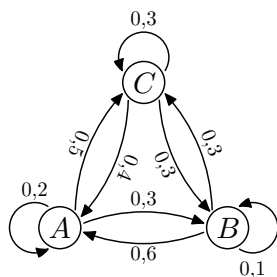
Le graphe ci-dessous représente le graphe pondéré orienté associé.



Déterminer la matrice T de transition vérifiant la relation :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$$

E.6393 On s'intéresse à la répétition d'une expérience aléatoire comportant trois issues A, B, C . À chaque répétition, l'évolution des probabilités de ses issues est soumise aux probabilités conditionnelles résumées dans les graphes probabilistes ci-dessous.

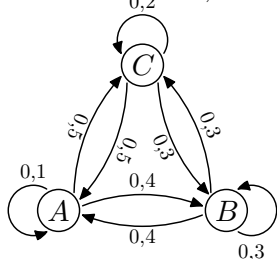


On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des événements A, B, C lors de la $n^{\text{ième}}$ répétition.

Déterminer la matrice M de transition vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$$

E.5487 Le graphe ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A, B et C :



On note a_n, b_n, c_n les probabilités associées à chacun des états à l'étape n .

1 Déterminer une expression de chacun des termes $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n et c_n .

2 **Modélisation des états par une matrice ligne**

On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice-ligne représentant l'état à l'étape n .

Déterminer la matrice A de transition réalisant l'égalité :

$$U_{n+1} = U_n \cdot A$$

3 **Modélisation des états par une matrice colonne**

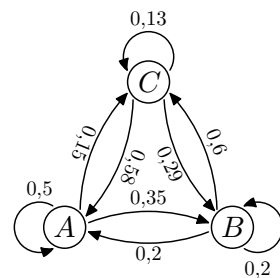
On note $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne représentant

l'état à l'étape n .

Déterminer la matrice B de transition réalisant l'égalité :

$$V_{n+1} = B \cdot V_n$$

E.8638 On s'intéresse à la répétition d'une expérience aléatoire comportant trois issues A, B, C . À chaque répétition, l'évolution des probabilités de ses issues est soumise aux probabilités conditionnelles résumées dans les graphes probabilistes ci-dessous.



On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des événements A, B, C lors de la $n^{\text{ième}}$ répétition.

Déterminer la matrice M de transition vérifiant :

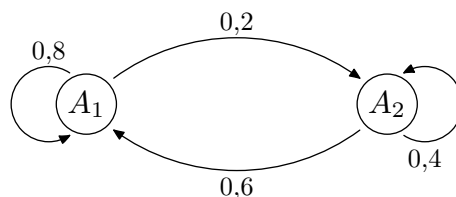
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \cdot M$$

E.6128 On considère deux villes A_1 et A_2 d'une même région et on étudie les mouvements migratoires entre ces deux villes :

1 L'étude montre que :

- Chaque année 20 % de la population de la ville A_1 partent s'installer dans la ville A_2
- Chaque année 60 % de la population de la ville A_2 partent s'installer dans la ville A_1

On schématise cette situation par le graphe ci-dessous :



On souhaite rassembler ces données dans la matrice M composée de deux lignes et de deux colonnes. Le coefficient m_{ij} , situé à la i^{e} ligne et la j^{e} colonne, représentent la fréquence des personnes habitant la première année dans la ville A_i et vivant l'année suivante dans la ville A_j .

- a Quelle interprétation peut-on donner des coefficients m_{21} et m_{22} ?
 - b Écrire la matrice représentant cette situation.
- 2 Une nouvelle étude donne les chiffres suivants :
- Chaque année 65 % de la population de la ville A_1 ne déménage pas.
 - Chaque année 30 % de la population de la ville A_2 ne déménage pas.
- a Produire le graphe représentant cette situation.
 - b En conservant les conventions de la question 1 b, écrire la matrice correspondant à cette matrice.

6. Chaîne de Markov : utilisation de la matrice de transition

E.8641    On considère une chaîne de Markov dans l'espace des états $\Omega = \{e_1; e_2; e_3\}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, la distribution des états à l'étape n est représentée par la matrice π_n définie par :

$$\pi_n = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_1) & \mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_2) & \mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_3) \end{pmatrix}$$

La matrice de transition A associée à cette évolution vérifiant la relation $\pi_{n+1} = \pi_n \cdot A$ est donnée ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les probabilités suivantes :

a $\mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_2)(\mathcal{X}_{n+1}=e_1)$ **b** $\mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_3)(\mathcal{X}_{n+1}=e_2)$

E.8639    On considère une chaîne de Markov dans l'espace des états $\Omega = \{e_1; e_2\}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, la distribution des états à l'étape n est représentée par la matrice π_n définie par :

$$\pi_n = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_1) & \mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_2) \end{pmatrix}$$

La matrice de transition A associée à cette évolution vérifiant la relation $\pi_{n+1} = \pi_n \cdot A$ est donnée ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

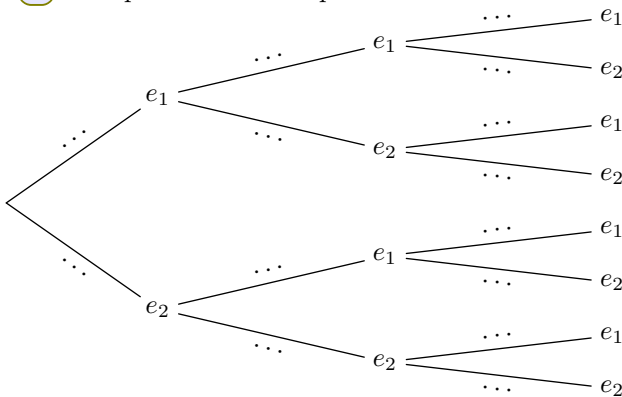
- 1 Déterminer la probabilité : $\mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_2)(\mathcal{X}_{n+2}=e_1)$
- 2 **a** Donner la matrice A^2 .
- b** Quelle remarque peut-on faire? Quelle conjecture peut-on émettre?

7. Chaîne de Markov : recherche de la valeur des états

E.8643    On considère la chaîne $(\mathcal{X}_n)$ de Markov dans l'espace des états $\{e_1; e_2\}$ définie, pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{X}_1=e_1) &= 0,3 & \mathcal{P}(\mathcal{X}_1=e_2) &= 0,7 \\ \mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_1)(\mathcal{X}_{n+1}=e_1) &= 0,8 & \mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_1)(\mathcal{X}_{n+1}=e_2) &= 0,2 \\ \mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_2)(\mathcal{X}_{n+1}=e_1) &= 0,4 & \mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_2)(\mathcal{X}_{n+1}=e_2) &= 0,6 \end{aligned}$$

- 1 **a** Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



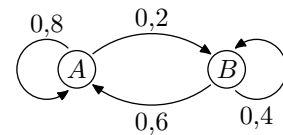
- b** Déterminer les probabilités suivantes :
 $\mathcal{P}(\mathcal{X}_2=e_1)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}_2=e_2)$
- 2 Pour tout entier naturel n , on note M_n la matrice des distributions à l'étape n définie par :
- $$M_n = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_1) & \mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_2) \end{pmatrix}$$
- On note A la matrice de transition associée à la chaîne de Markov réalisant la relation :
- $$M_{n+1} = M_n \cdot A$$
- a** Donner la matrice A .
- b** À l'aide de la calculatrice, donner la matrice : $M_0 \cdot A^2$
- c** Que remarque-t-on?

E.6391    On considère deux gaz A et B qui en contact se transforment l'un en l'autre. Au départ, le mélange est composé de 20 l de gaz A et 50 l de gaz B .

Une étude montre que chaque heure :

- 20 % du gaz A se transforme en gaz B ;
- 60 % du gaz B se transforme en gaz A .

On schématise ce phénomène par le graphe pondéré suivant :



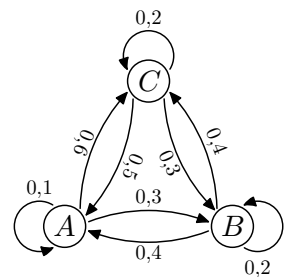
- 1 Déterminer la composition du mélange au bout de 3 h.
- 2 À l'aide de la calculatrice, effectuer le calcul :

$$\begin{pmatrix} 20 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}^3$$

E.6392   

Le graphe ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A , B et C :

On note a_n , b_n , c_n les probabilités associées à chacun des états à l'étape n .



Les valeurs initiales sont : $a_0=5$; $b_0=2$; $c_0=7$

- 1 Donner la matrice M de transition associée à ce graphe probabiliste vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \cdot M$$
- 2 À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs associées à chacun de ses états à l'étape 3. On arrondira les résultats au millième près.

E.6394   

Le graphe ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A , B et C :

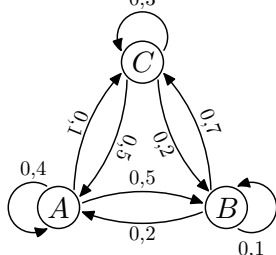
On considère la matrice-ligne :

$$U_0 = (0,3 \quad 0,4 \quad 0,3)$$

représentant la valeur des probabilités d'être situé sur chacun des sommets à l'étape 0.

À l'aide de calculatrice et en observant les différents termes $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{20}$, quelle conjecture peut-on effectuer ?

E.5488    Le graphe ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A , B et C :



On considère la matrice-colonne $U_2 = (0,4 \quad 0,3 \quad 0,3)$ représentant la valeur des probabilités d'être situé sur chacun des sommets à l'étape 2.

1 Donner la matrice de transition A réalisant la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = U_n \cdot A \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

2 Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur initiale des probabilités.

E.5374    Une ville est composée principalement de deux quartiers qu'on note A et B .

Le quartier A est composé de 251 habitants et le quartier B est composé de 386 habitants.

1 En choisissant au hasard un habitant dans la ville, quelle

est la probabilité que celui-ci vienne du quartier A ? On arrondira les probabilités au millièmes.

On note a_0 la probabilité de choisir un habitant du quartier A et b_0 la probabilité de choisir un habitant du quartier B .

La matrice ligne U_0 définie par $(a_0 \quad b_0)$ représente l'état de ces probabilités lors de la première année d'étude de cette ville.

Chaque année, on estime :

- 5 % des habitants du quartier A déménagent pour aller dans le quartier B ;
- 12 % des habitants du quartier B déménagent pour aller dans le quartier A ;

On note a_n (resp. b_n) la probabilité de choisir respectivement un habitant du quartier A (resp. du quartier B) lors de la n -ième année d'étude.

On considère la matrice ligne U_n définie par :

$$U_n = (a_n \quad b_n)$$

2 a Recopier et compléter le diagramme ci-dessous afin de représenter les flux de populations entre ces deux quartiers.



b Écrire les termes a_{n+1} et b_{n+1} en fonction des valeurs de a_n et b_n .

c Déterminer la matrice carrée T de dimensions 2 réalisant l'égalité pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n \cdot T$$

3 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir la relation suivante pour tout entier naturel n :

$$U_n = U_0 \cdot T^n$$

4 À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul matriciel, déterminer les matrices ligne U_5 , U_{10} et U_{20} dont les coefficients seront arrondis à 10^{-5} .

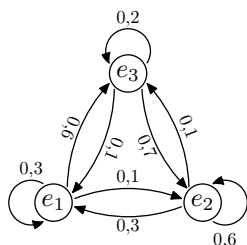
8. Chaîne de Markov : distribution invariante

E.8646   

On considère une chaîne (X_n) de Markov dans l'espace des états $\{e_1; e_2; e_3\}$ dont le graphe associé est donné ci-contre.

Vérifier que la matrice π représentant la distribution invariante est :

$$\pi = (0,25 \quad 0,5 \quad 0,25)$$



E.6117    Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H .

Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

- A désigne l'état : "la commande est passée auprès du fournisseur A " ;
- H désigne l'état : "la commande est passée auprès du fournisseur H ".

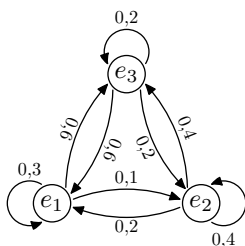
La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre A et H , est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

- 1 Dessiner le graphe probabiliste associé à la matrice M .
- 2 Donner la signification du nombre 0,95 dans la matrice M .
- 3 Vérifier que la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ correspond à l'état stable du système. En donner une interprétation.

9. Chaîne de Markov : recherche de la distribution invariante

E.8645 On considère une chaîne $(\mathcal{X}_n)$ de Markov dans l'espace des états $\{e_1; e_2; e_3\}$ dont les évolutions, étape par étapes, des distributions sont représentées par le graphe :



1 Donner la matrice A de transition associée à ce graphe. On note $\pi = (x \ y \ z)$ la matrice représentant la distribution invariante de la chaîne $(\mathcal{X}_n)$. Elle vérifie l'égalité : $\pi \cdot A = \pi$

2 On considère la matrice B : $B = \begin{pmatrix} -0,7 & 0,1 & 0,6 \\ 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & -0,8 \end{pmatrix}$

- a Justifier l'égalité : $\pi \cdot B = (0 \ 0 \ 0)$
- b À l'aide de la calculatrice, donner le déterminant de la matrice B .
- c Justifier l'équivalence des deux systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{cases} -0,7 \cdot x + 0,2 \cdot y + 0,6 \cdot z = 0 \\ 0,1 \cdot x - 0,6 \cdot y + 0,2 \cdot z = 0 \\ 0,6 \cdot x + 0,4 \cdot y - 0,8 \cdot z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,7 \cdot x + 0,2 \cdot y + 0,6 \cdot z = 0 \\ 0,1 \cdot x - 0,6 \cdot y + 0,2 \cdot z = 0 \\ 0,1 \cdot x - 0,6 \cdot y + 0,2 \cdot z = 0 \end{cases}$$

d Que peut-on en déduire sur l'ensemble des solutions de ce système ?

3 On considère la matrice C : $C = \begin{pmatrix} -0,7 & 0,1 & 1 \\ 0,2 & -0,6 & 1 \\ 0,6 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$

a Justifier que la matrice π vérifie : $\pi \cdot C = (0 \ 0 \ 1)$

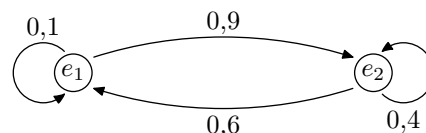
b Justifier : $C \cdot \begin{pmatrix} -0,8 & 0,1 & 0,7 \\ 0,4 & -1,3 & 0,9 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = I_3$

c En déduire les coefficients de la matrice π .

E.8644 On considère une chaîne de Markov $(\mathcal{X}_n)$ dont l'espace des états est $\{e_1; e_2\}$ et dont la distribution initiale est :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}_0 = e_1) = 0,3 \quad ; \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}_0 = e_2) = 0,7$$

Le graphe ci-dessous représente l'évolution des distributions, étape par étape :



Déterminer la matrice représentant la distribution invariante de cette chaîne de Markov.

10. Chaîne de Markov : comportement asymptotique

E.5391 On considère l'univers composé des deux états $\Omega = \{e_1; e_2\}$. La distribution initiale $\mathcal{X}_0$ a pour loi de probabilité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}_0 = e_1) = \frac{1}{3} \quad ; \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}_0 = e_2) = \frac{2}{3}$$

On note $(\mathcal{X}_n)$ la chaîne de Markov définie par les relations suivantes :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}_n = e_1)(\mathcal{X}_{n+1} = e_1) = \frac{3}{5} \quad ; \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}_n = e_2)(\mathcal{X}_{n+1} = e_1) = \frac{2}{5}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}_n = e_1)(\mathcal{X}_{n+1} = e_2) = \frac{2}{5} \quad ; \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}_n = e_2)(\mathcal{X}_{n+1} = e_2) = \frac{3}{5}$$

1 a Compléter le graphe pondéré orienté associé à cette chaîne de Markov :



b Donner la matrice A de transition associée à ce graphe.

2 On considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a Justifier que M est une matrice inverse, puis donner

$$M^{-1}.$$

b Déterminer la matrice $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ vérifiant :

$$A = M \cdot D \cdot M^{-1}$$

c Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'identité suivante pour tout entier naturel n :

$$A^n = M \cdot D^n \cdot M^{-1}$$

d En déduire que, pour tout entier naturel n , la distribution à l'étape n est définie par :

$$\left(\mathcal{P}(\mathcal{X}_n = e_1) \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}_n = e_2) \right) = \left(-\frac{1}{6 \times 5^n} + \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6 \times 5^n} + \frac{1}{2} \right)$$

e En déduire la distribution invariante π

E.8642



On considère une chaîne $(\mathcal{X}_n)$ de Markov dans l'espace des états $\{e_1; e_2\}$. Pour tout entier naturel n , on note π_n la distribution à l'étape n sous forme de matrice ligne :

$$\pi_n = \left(\mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_1) \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}_n=e_2) \right)$$

On considère l'identité $\pi_{n+1} = \pi_n \cdot A$, pour tout entier naturel n , où la matrice de transition A est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{4}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix}$$

La distribution initiale est : $\pi_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- 1 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n :

$$\pi_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6 \times 5^n} \quad \frac{2}{3} - \frac{1}{6 \times 5^n} \right)$$

- 2 En déduire la distribution invariante de cette chaîne de Markov.

11. Etude d'un graphe probabiliste

E.6400



Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H .

Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

- A désigne l'état : "la commande est passée auprès du fournisseur A ";
- H désigne l'état : "La commande est passée auprès du fournisseur H ".

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n la probabilité de l'événement : "La semaine n , l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A ";
- h_n la probabilité de l'événement : "La semaine n , l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur H ";

- P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & h_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste pour la semaine n .

La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre A et H , est définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \quad ; \quad P_{n+1} = P_n \cdot M$$

- 1 Dessiner le graphe probabiliste associé à la matrice M .
- 2 Donner la signification du nombre 0,95 dans la matrice M .
- 3 Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ correspondant à l'état stable du système. En donner une interprétation.
- 4 On donne $P_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ et on rappelle que :

$$P_k = P_0 \times M^k \quad \text{pour } k \text{ entier naturel.}$$

Déterminer la semaine où, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur H .