

1. Module

E.8594 Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les trois points A, B, C ayant pour affixe respectif a, b, c définis par :

$$a = \sqrt{3} - i\sqrt{3} ; \quad b = -1 - i ; \quad c = 1 - 3i$$

- ① Établir que : $\frac{a-b}{c-b} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

2. Argument et mesure d'angles

E.8593 Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les trois points A, B, C ayant pour affixe respectif a, b, c définis par :

$$a = 2\sqrt{3} + i\sqrt{3} ; \quad b = 1 - 2i ; \quad c = 3 - i$$

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

E.5358 On considère le plan muni du repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct et les trois points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 1 - 2i ; \quad z_B = -3 - 4i ; \quad z_C = -2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

- ① a) Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z défini par le quotient : $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$
- b) En déduire l'écriture trigonométrique du nombre complexe Z .
- ② a) Déduire des questions précédentes que le triangle ABC est un triangle isocèle en A .
- b) Donner la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

E.5535 On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- ① On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a=2 ; \quad b=3+i\sqrt{3} ; \quad c=2i\sqrt{3}$.
Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
- ② En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1+i\sqrt{3}$.

E.5360 Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct, on considère les trois points

- ② Établir que le triangle ABC est isocèle en B .

E.4099 Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct, on considère les trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c définies par :

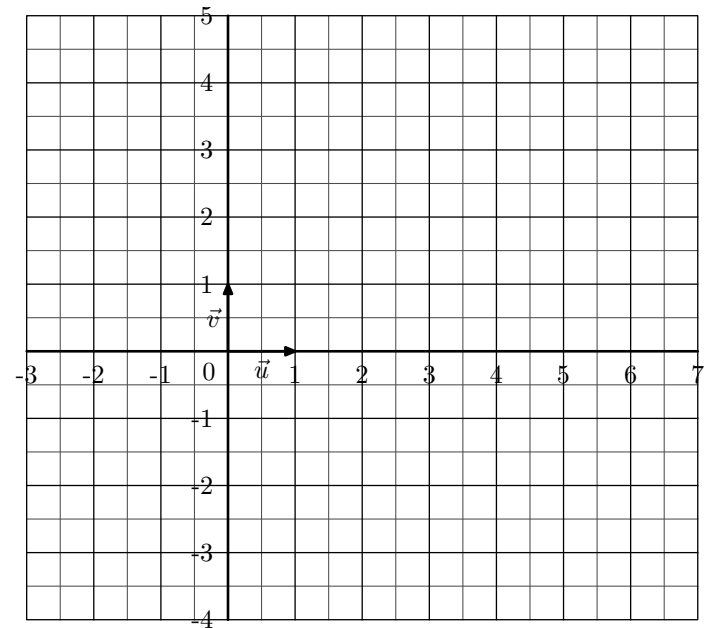
$$a = -3 + 3i ; \quad b = -\frac{3}{2} - i ; \quad c = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$$

Établir que le triangle ABC est isocèle en B .

A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -2 + i ; \quad z_B = -3i ; \quad z_C = 6 + 5i$$

- ① Placer ces trois points dans le repère ci-dessous :



- ② Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
- ③ On considère le point D d'affixe z_D où : $z_D = 4 - i$
- a) Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z définie par : $Z = \frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}$
- b) Justifier que la demi-droite $[AD)$ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.

3. Argument et orthogonalité

E.8592 Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct, on considère les points E, F, G et H d'affixes respectives :

$$z_E = 5 - 3i ; \quad z_F = 4 + i(-3 + \sqrt{3})$$

$$z_G = i ; \quad z_H = -2\sqrt{3} - i$$

- ① Établir l'égalité : $\frac{z_F - z_E}{z_H - z_G} = -\frac{1}{2}i$

- ② En déduire que les droites (EF) et (GH) sont perpendiculaires.

E.4320     Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct. On prendra 2 cm pour unité graphique. On appelle J le point d'affixe i .

- ① On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives :
 $a = -3 - i$; $b = -2 + 4i$; $c = 3 - i$; $h = -2$.

Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

- ② Montrer que J est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC . Préciser le rayon du cercle $\mathcal{C}$.
- ③ Donner l'écriture algébrique du nombre complexe $\frac{b-c}{h-a}$.
 En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

4. Argument et parallélisme

E.3862    On considère le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 4 - \sqrt{3}i \quad ; \quad z_B = (4 - \sqrt{3}) + i \cdot (1 - \sqrt{3})$$

$$z_C = -1 + 2i \quad ; \quad z_D = 2\sqrt{3} - 1$$

- ① Établir l'égalité : $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = -\frac{1}{2}$
- ② En déduire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

E.3847    Le plan complexe est rapporté à un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct. On pose : $a = 3$;

E.3875    On considère le plan muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct. Soit A et B les points d'affixes respectives :

$$z_A = i \quad ; \quad z_B = 2 + 2i$$

- ① Soit I un point du plan dont l'affixe z_I vaut :

$$z_I = -4 + \frac{23}{2}i$$

Montrer que le point I appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

- ② Soit M un point du plan d'affixe $(2+i)$.

Montrer que le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

$$b = 5 - 2i \quad ; \quad c = 5 + 2i$$

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c . Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B .

- ① Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.
- ② Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe : $\frac{z-3}{z-5+2i}$
- ③ Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z-3}{z-5+2i}$ soit un nombre réel strictement négatif.

5. Nature d'un triangle

E.5965    On munit le plan d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct.

On considère les deux points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 2 + 2i \quad ; \quad z_B = 1 - i$$

- ① Donner l'écriture trigonométrique du nombre complexe $\frac{z_A}{z_B}$.
- ② En déduire la nature du triangle OAB .

E.3809     Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct (*unité graphique 4 cm*). Soit I le point d'affixe 1. On note $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[OI]$ et on nomme son centre Ω .

On pose $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et on note A_0 son image.

- ① Montrer que le point A_0 appartient au cercle $\mathcal{C}$.
- ② Soit B le point d'affixe b , avec $b = -1 + 2i$, et B' le point d'affixe b' telle que $b' = a_0 \cdot b$.
- a) Calculer b' .
- b) Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B' .

E.8597    On considère le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct.

On considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i \quad ; \quad z_B = 2 + i \cdot (\sqrt{3} + 1) \quad ; \quad z_C = (1 - \sqrt{3}) + i \cdot 2$$

- ① Déterminer l'écriture algébrique du quotient : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$
- ② Déterminer le module et un argument du quotient précédent.
- ③ Établir que le triangle ABC est rectangle isocèle.

E.3823     Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct d'unité graphique 2 cm

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -2i \quad ; \quad z_B = -\sqrt{3} + i \quad ; \quad z_C = \sqrt{3} + i$$

- 1  Donner l'écriture exponentielle des nombres z_A, z_B et z_C .
-  En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C .
-  Faire une figure et placer le point A , tracer le cercle Γ , puis placer les points B et C .
- 2  Donner l'écriture algébrique du complexe $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$, puis son écriture exponentielle.
-  En déduire la nature du triangle ABC .

E.3861    On considère le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct.

On considère les points D, E, F d'affixes respectives :

$$z_D = 4 - \sqrt{3}i \quad ; \quad z_E = (4 + \sqrt{3}) + i(-1 - \sqrt{3})$$

$$z_F = -(\sqrt{3} + 2)i + 4$$

- 1  Déterminer l'écriture algébrique du quotient : $\frac{z_E - z_D}{z_F - z_D}$
- 2 Déterminer le module et un argument du quotient précédent.
- 3 Établir que le triangle DEF est équilatéral.

E.4237    On munit le plan d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct.

On considère les points C, D, E d'affixes respectives :

$$z_C = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}i \quad ; \quad z_D = 2 - i \quad ; \quad z_E = i$$

- 1 Déterminer l'écriture algébrique du nombre $\frac{z_C - z_E}{z_D - z_E}$, puis son écriture trigonométrique.
- 2 En déduire la nature du triangle CDE .

6. Nature d'un quadrilatère

E.3854    Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_A = -\sqrt{3} - i \quad ; \quad z_B = 1 - i\sqrt{3}$$

$$z_C = \sqrt{3} + i \quad ; \quad z_D = -1 + i\sqrt{3}$$

- 1 Donner le module et un argument de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D .
- 2 Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).
- 3 Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\frac{z_A}{z_B}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

E.5359   On considère le plan muni du repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct et les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = -2 + i \quad ; \quad z_B = -3i \quad ; \quad z_C = 3 - 2i \quad ; \quad z_D = 3 + 2i$$

- 1  Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z défini par le quotient : $Z = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$
-  En déduire l'écriture trigonométrique du complexe Z .
- 2  Justifier que le quadrilatère $ABCD$ a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur.
-  Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange?

E.8595   Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct, on considère les quatre points A, B, C, D d'affixe respectifs a, b, c, d définis par :

$$a = 6 \quad ; \quad b = 2 + 2i \quad ; \quad c = 1 \quad ; \quad d = 5 - 2i$$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle, mais n'est pas un carré.

7. Utilisation des équations cartésiennes

E.8596    On considère le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé direct et les deux points C et D d'affixes respectifs c et d définis par : $c = 1 + i$; $d = 3 - 2i$

Pour tout nombre complexe différent de d , on note z_0 le nombre complexe défini par : $z_0 = \frac{z - c}{z - d}$

- 1 En notant $a + bi$, où $a, b \in \mathbb{R}$, l'écriture algébrique du nombre z , déterminer l'écriture algébrique du quotient z_0 .
- 2 On souhaite caractériser l'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan d'affixe z , tels que le nombre z_0 soit un nombre réel.

-  Déterminer une relation sur les nombres réels a et b afin que le nombre z_0 soit un nombre réel.
-  Justifier que l'ensemble $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M du plan distinct de D tels que les points C, D, M soient alignés

E.8598



On considère le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé direct et les deux points C et D d'affixes respectifs c et d définis par: $c = 2 - i$; $d = 1 + 2i$

Pour tout nombre complexe z différent de d , on note z_0 le nombre complexe défini par: $z_0 = \frac{z - c}{z - d}$

- ① En notant $a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$, l'écriture algébrique du

nombre z , déterminer l'écriture algébrique du quotient z_0 .

- ② On souhaite caractériser l'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan d'affixe z , tels que le nombre z_0 soit un imaginaire pur.
- a) Déterminer une relation sur les nombres réels a et b afin que le nombre z_0 soit un imaginaire pur.
- b) Justifier que l'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point D .

8. Transformation du plan

E.3841



Le plan complexe P est muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct, unité graphique 2 cm .

On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O , d'affixe z , associe le point $M' = F(M)$ d'affixe z' définie par:

$$z' = z + i - \frac{1}{z}$$

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = i$ et $b = e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' par F d'affixes respectives a' et b' .

- ① Calculer a' et b' .
- ② Placer les points A, A', B et B' .
- ③ Démontrer que: $\frac{-b}{b' - b} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot i$
- ④ En déduire la nature du triangle OBB' .

E.5532

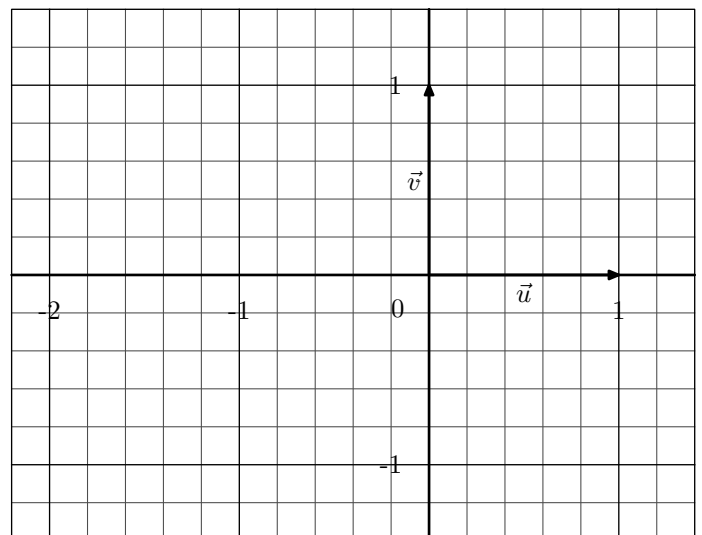


Dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 .

Soit f la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que: $z' = \frac{1 - z}{\bar{z} - 1}$

Soit C le point d'affixe: $z_C = -2 + i$.

- ① Calculer l'affixe $z_{C'}$ du point C' image de C par la transformation f , et placer les points C et C' dans le repère donné ci-dessous:



- ② Montrer que le point C' appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
- ③ Montrer que les points A, C et C' sont alignés.

E.3814     Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ orthonormé direct d'unité graphique 1 cm.

Soit A le point d'affixe $3 \cdot i$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z , distinct de A , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{3 \cdot i \cdot z - 7}{z - 3 \cdot i}$

Recherche des points invariants par f .

- 1 Développer $(z - 7 \cdot i)(z + i)$.
- 2 Montrer que f admet deux nombres invariants qui sont les affixes de deux points qu'on notera B et C .

Définition : soit f une fonction complexe (de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$). On dit que le nombre z est un **invariant de la fonction** f si $f(z) = z$.

E.5533     Dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct, on désigne par A le point d'affixes 1.

Soit f la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{1 - z}{\bar{z} - 1}$

- 1 Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\frac{z' - z}{z - 1}$ est réel.
- 2 Que peut-on en déduire pour les points A , M et M' ?

E.4239     Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (-2) .

On définit l'application f qui, à tout point M d'affixe z et différent de A , associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{\bar{z} \cdot (z - 2)}{\bar{z} - 2}$

- 1 Montrer que pour tout nombre complexe z , le nombre $(z - 2)(\bar{z} - 2)$ est réel.
- 2 En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2 : $\frac{z' + 2}{z - 2}$ est réel.
- 3 Montrer que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.

9. Transformation du plan et image d'un ensemble

E.3873    Le plan complexe P est muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct. On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O , d'affixe z , associe le point $M' = F(M)$ d'affixe z' définie par : $z' = z + i - \frac{1}{z}$

On note A le point d'affixe i et θ un réel.

- 1 On note A' l'image du point A par la transformation F . Déterminer l'affixe du point A' .
- 2 Démontrer que si $z = e^{i \cdot \theta}$ alors $z' = (2 \cdot \sin \theta + 1) \cdot i$
- 3 En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M'

appartient au segment $[A'C]$ où C a pour affixe -1 .

E.4078   Dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct. On note A le point d'affixe i .

Pour tout point M d'affixe z tel que $z \neq i$, on définit le point M' dont l'affixe z' est défini par : $z' = \frac{1}{3 \cdot (z - i)}$

- 1 Établir la proposition suivante :
Si M est un point du cercle de centre A de rayon r , alors M' est un point du cercle de centre O de rayon $\frac{1}{3 \cdot r}$.
- 2 Démontrer que : $\arg(z') = -\left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right)$

10. Transformation du plan et image réciproque d'un ensemble

E.3825    Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct, on considère la transformation f du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z^2 + i \cdot \bar{z} + 1 - i$

- 1 On considère les points A et B d'affixes respectives :
 $3 + 2 \cdot i$; $-3 \cdot i$
Déterminer l'image de ces deux points par la transformation f .
- 2
 - a Soit M un point du plan. On note $a + i \cdot b$ l'affixe du point M . Exprimer en fonction de a et de b la partie réelle et la partie imaginaire du point M' .
 - b Déterminer une condition sur a et b afin que le point M' appartienne à l'axe des réels.
 - c Déterminer une condition sur a et b afin que le point

M' appartienne à l'axe des imaginaires.

E.6086    On considère le plan muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct. On considère les points :

$$A(0;1) \quad ; \quad B(2;-1)$$

À tout point du plan M , différent de A et de B , d'affixe z , on associe un point M' d'affixe z' définie par la relation :

$$z' = \frac{z-2+i}{z-i}$$

- 1 Interpréter géométriquement la longueur OM' et l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM'})$ en utilisant les points A, B et M .
- 2 On considère le point $M(4;1)$. Déterminer l'écriture algébrique et exponentielle du nombre complexe z' associé à z .
- 3 Dans cette question, on souhaite caractériser l'ensemble des points M du plan tel que le point M' appartienne à l'axe des ordonnées :
 - a On note $z=x+i.y$. Établir la propriété suivante : " z' est un imaginaire pur si $x^2+y^2-2x-1=0$ "
 - b Justifier que l'ensemble recherché est le cercle de diamètre $[AB]$.

E.3801     Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct. Soit f l'application qui, à tout point M de $\mathcal{P}$ d'affixe non nulle z , associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z} \right)$

11. Racine n -ièmes de l'unité

E.6106   On s'intéresse à l'ensemble $\mathbb{U}_4$ défini par l'ensemble des solutions de l'équation : $z^4 = 1$

- 1
 - a Factoriser l'expression z^4-1 en produit de facteurs premiers.
 - b Donner l'écriture algébrique, puis l'écriture exponentielle de l'ensemble $\mathbb{U}_4$.
- 2 On considère le plan muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct et, pour $j \in \{0;1;2;3\}$, les points M_j d'affixes : $z_j = e^{i \cdot \frac{\pi}{2} \times j}$
 - a Montrer que les points M_j , pour $j \in \{0;1;2;3\}$, appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.
 - b Établir, pour tout $j \in \{0;1;2\}$, l'égalité : $\overline{M_j OM_{j+1}} = \frac{\pi}{2}$
 - c Préciser la nature du quadrilatère : $M_0 M_1 M_2 M_3$

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

- 1 Soit E le point d'affixe $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point E' , image de E par f .
- 2 Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.
- 3 On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 . Soit M un point distinct des points O, A et B .
 - a Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1 , on a : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2$
 - b En déduire une expression de $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$, puis une expression de l'angle $(\overrightarrow{M'A}; \overrightarrow{M'B})$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$.
- 4 Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O , alors M' est un point de Δ .
- 5 Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.
 - a Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB) .
 - b Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

E.8599  

Définition : l'ensemble $\mathbb{U}_7$ est l'ensemble des racines 7-ième de l'unité. C'est-à-dire que ce sont les racines de l'équation z^7-1 .

- 1 Donner l'écriture exponentielle des éléments de $\mathbb{U}_7$.
- 2 Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct, montrer que les images des nombres de $\mathbb{U}_7$ sont les sommets d'un heptagone régulier.
- 3
 - a Établir la factorisation : $z^7-1 = (z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)$
 - b Établir l'égalité : $\sum_{w \in \mathbb{U}_7} w = 0$

E.8600   Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

$$\text{a) } (z+i)^4 = 1 \quad \text{b) } z^3 = 8$$

Indication : on donnera les écritures algébriques des solutions.

12. Cours

E.3853    On suppose connus les résultats suivants :

- 1 Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C alors :

$$\bullet \left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = \frac{CB}{CA}$$

$$\bullet \arg \left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) = (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \quad (2\pi)$$

- 2 Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :
 $z = e^{i\theta}$ si, et seulement si, $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2 \cdot k \cdot \pi$ où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui, à tout point m d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' - \omega = e^{i\alpha} \cdot (z - \omega)$$

E.3849    Le plan complexe est rapporté au repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Rappels : " Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a :
 $|z| = \|\vec{w}\|$; $\arg(z) = (\vec{u}; \vec{w})$ ".

Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

- 1 Démontrer que : $\arg \left(\frac{p-m}{n-m} \right) = (\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP})$
- 2 Interpréter géométriquement le nombre : $\left| \frac{p-m}{n-m} \right|$.

13. Suite

E.6384    Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct. Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad ; \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot i \right) \cdot z_n$$

- 1 Déterminer les affixes des points A_1 et A_2 .
- 2 Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} .
- 3 On admet que, pour tout entier naturel n :
- $$z_n = |z_n| \cdot e^{i \cdot \frac{n \cdot \pi}{6}}$$

Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 dans le repère

14. Exercices non-classés

E.3815    Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points B et C d'affixes respectives $-i$ et $7 \cdot i$.

E.4105    Dans le plan complexe muni du repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct, on considère les points M et M' distincts de O d'affixes respectives z et z' . On pose :
 $z = x + i \cdot y \quad ; \quad z' = x' + i \cdot y'$
 où x, x', y, y' sont des nombres réels.

On rappelle que $\bar{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z .

- 1 Exprimer le complexe $\bar{z} \cdot z'$ en fonction de x, x', y, y' .
- 2 a Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\operatorname{Re}(z' \cdot \bar{z}) = 0$.
- b Montrer que les points O, M et M' sont alignés si, et seulement si, $\operatorname{Im}(z' \cdot \bar{z}) = 0$

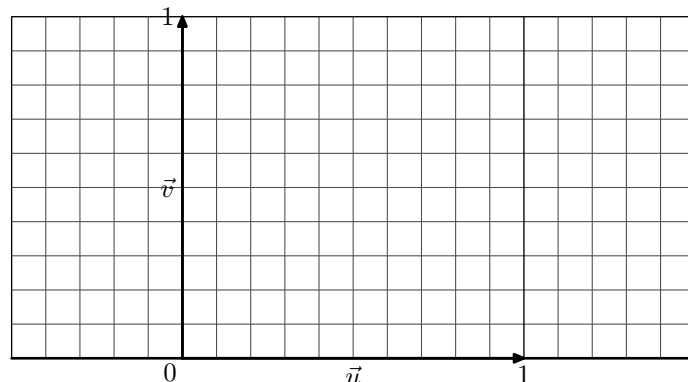
E.8601  

Définition :

Pour n un entier naturel non-nul, on considère l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n -ième de l'unité. On dit qu'une racine ω est une **racine n -ième primitive de l'unité** si les puissances successives de ω (c'est-à-dire $\omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^n$) permettent de générer tous les éléments de $\mathbb{U}_n$.

Montrer que si n est un entier premier alors tout élément de $\mathbb{U}_n$ différent de 1 est une racine primitive n -ième de $\mathbb{U}_n$.

ci-dessous :



Montrer que tout point M d'affixe z vérifiant :
 $z = 3 \cdot i + 4 \cdot e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$
 appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[BC]$.