

## 1. Rappel de trigonométrie

E.3792   Soit  $\alpha$  un nombre réel. Simplifier les écritures suivantes :

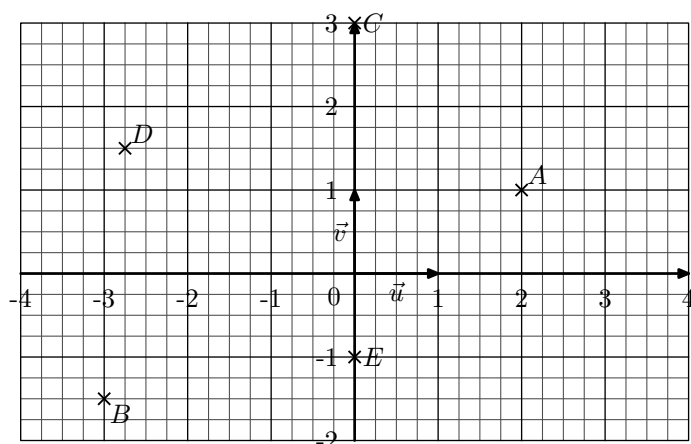
- a  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$       b  $\sin(\alpha + 3\pi)$   
 c  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$       d  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

E.3793   Résoudre les équations suivantes :

a  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$       b  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

## 2. Représentation graphique et écriture algébrique

E.3784    On considère le plan complexe muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct et les cinq points représentés ci-dessous :



- Déterminer les écritures algébriques des affixes des points A, B, C, D, E.
- Placer dans le plan les points F, G, H et I d'affixes respectives  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4$  définies par :

$$z_1 = 3 - i \quad ; \quad z_2 = \frac{3}{2} \cdot i$$

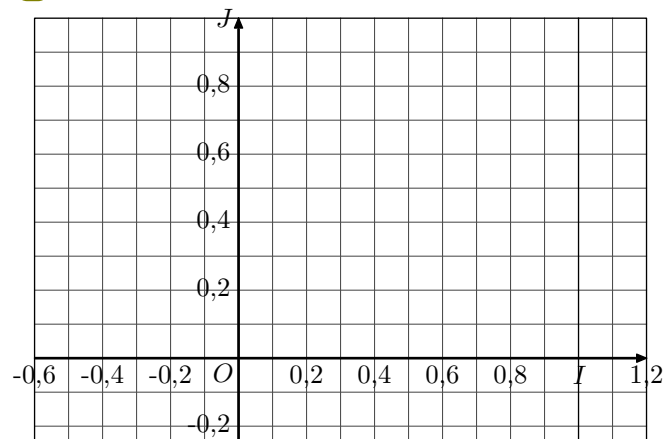
$$z_3 = -\frac{7}{4} + 2i \quad ; \quad z_4 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} \cdot i$$

- Déterminer l'abscisse du milieu du segment [EF].

E.6792    On munit le plan complexe d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct. On définit la suite

$(z_n)$  de nombres complexes par :  $z_0 = 1$  ;  $z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot i\right) \cdot z_n$

- Déterminer l'écriture algébrique des quatre premiers termes de la suite  $(z_n)$ .
- à l'aide de votre calculatrice, donner l'écriture algébrique des termes  $z_4$  et  $z_5$  en arrondissant les parties réelles et imaginaires à  $10^{-2}$  près.
- Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $M_n$  les images du nombre complexe  $z_n$ .
  - Placer les points  $M_0, \dots, M_5$  dans le repère ci-dessous :



- Quelle conjecture peut-on faire sur la nature des triangles  $OM_0M_1, OM_1M_2$  et  $OM_2M_3$ ?

## 3. Module d'un nombre complexe

E.5345    Déterminer le module des nombres complexes suivants :

a  $1 - 2i$       b  $-5i$       c  $(3 - 2i)(2 + i)$

E.8568    Déterminer le module des nombres complexes suivants :

a  $-i \cdot (1 - 2i)$       b  $\frac{1 + i\sqrt{3}}{3i}$       c  $\frac{3 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + i}$

## 4. Géométrie et module

**E.3843** Dans le plan complexe muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C$  d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + 3i \quad ; \quad z_B = -\sqrt{2} + 2i \quad ; \quad z_C = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \left( \frac{\sqrt{6}}{2} + 2 \right)$$

## 5. Relation $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

**E.8569** Pour tout nombre complexe  $z$ , on définit le nombre complexe  $z'$  par :

$$z' = \frac{(3 + 4i) \cdot z + 5 \cdot \bar{z}}{6}$$

1 Pour tout nombre complexe  $z$ , établir l'égalité :

$$\frac{z' - z}{1 + 2i} = \frac{z + \bar{z}}{6} + i \cdot \frac{z - \bar{z}}{3}$$

## 6. Module : propriétés algébriques

**E.3846** Établir l'égalité suivante pour tout nombre complexe  $z$  non nul :

$$\left( \frac{1}{z^2} - 1 \right) \overline{\left( z^2 - 1 \right)} = -\bar{z}^2 \cdot \left| \frac{1}{z^2} - 1 \right|^2$$

## 7. Modules et équations cartésiennes

**E.3844** On considère le plan complexe muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct :

1 Soit  $z$  un nombre complexe solution de l'équation (E) :

$$(E) : |z - 2 + i| = 5$$

On note  $M$  l'image du nombre complexe  $z$

- a Traduire l'équation (E) en termes de distance.
- b Justifier que l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant la relation (E) est un cercle. Préciser son centre et son rayon.
- c Soit  $a + i \cdot b$  l'écriture algébrique de l'affixe du point  $M$  ; déterminer une relation sur  $a$  et  $b$  caractérisant la relation (E).

2 Soit  $z$  un nombre complexe solution de l'équation (F) :

$$(F) : |z + i| = |z + 1 - 2i|$$

On note  $M$  l'image du nombre complexe  $z$

- a Traduire l'équation (F) en termes de distance.

Soit  $I$  le point du plan d'affixe  $z_I = 2i$

Montrer que les points  $A, B, C$  appartiennent à un même cercle de centre  $I$ . Préciser le rayon de ce cercle.

2 En déduire que le nombre  $\frac{z' - z}{1 + 2i}$  est un nombre réel.

**E.8570** Établir les égalités ci-dessous :

a  $\left| \frac{5i}{5 - 5i} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b  $\left| \frac{1 + 2i}{5 + 5i} \right| = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$$1 \Big| ^2$$

b Justifier que l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant la relation (F) est une droite. Préciser sa nature.

c Soit  $a + i \cdot b$  l'écriture algébrique de l'affixe du point  $M$  ; déterminer une relation sur  $a$  et  $b$  caractérisant la relation (E).

**E.3813** Le plan est rapporté au repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct. On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + i \cdot \sqrt{3} \quad ; \quad z_B = -1 - i \cdot \sqrt{3}$$

1 Établir que l'ensemble  $\Gamma_2$  des points  $M$  d'affixe  $z$  qui vérifient :

$$2(z + \bar{z}) + z \cdot \bar{z} = 0$$

est un cercle de centre  $\Omega$  d'affixe  $-2$ . Préciser son rayon. Construire  $\Gamma_2$ .

2 Vérifier que les points  $A$  et  $B$  sont des éléments de  $\Gamma_2$ .

## 8. Ensemble $\mathbb{U}$

**E.8573**

**Définition :** on note  $\mathbb{U}$  l'ensemble des nombres complexes  $z$  vérifiant  $|z| = 1$ .

On peut noter :  $\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} \quad ; \quad \mathbb{U} \subset \mathbb{C}$

1 Justifier que les nombres complexes ci-dessous appartiennent à  $\mathbb{U}$  :

a  $z_1 = -i$     b  $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$     c  $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

2 Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes appartenant à  $\mathbb{U}$ , montrer que le produit  $z \cdot z'$  appartient à  $\mathbb{U}$ .

- 3 Soit  $z$  un élément de  $\mathbb{U}$ , montrer que les trois expressions ci-dessous définissent un nombre complexe appartenant à  $\mathbb{U}$ :

(a)  $-z$       (b)  $\frac{1}{z}$       (c)  $z^2$

- 4 Montrer que, pour tout nombre complexe  $z$  ( $z \in \mathbb{C}$ ), le

nombre complexe  $\frac{z}{|z|}$  appartient à  $\mathbb{U}$ .

E.8574   Établir que les nombres complexes ci-dessous appartiennent à  $\mathbb{U}$ :

(a)  $z_1 = \frac{1-7i}{-5+5i}$       (b)  $z_2 = \frac{2-9i}{-6+7i}$       (c)  $z_3 = \frac{4+7i}{8-i}$

## 9. Argument dans l'ensemble $\mathbb{U}$

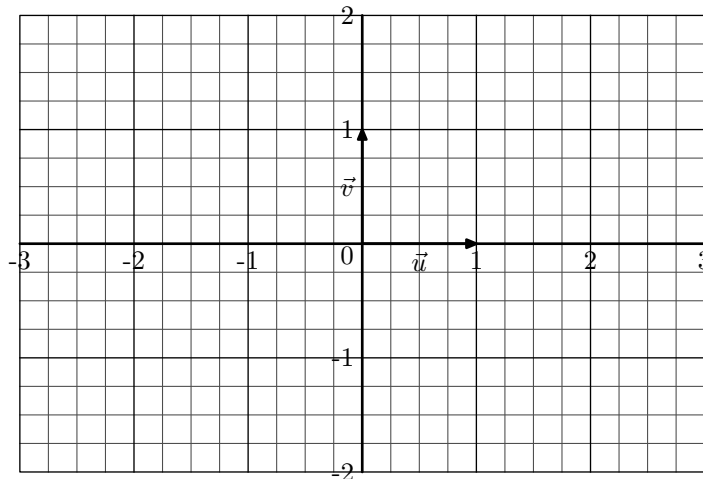
E.8575   

**Définition:** On considère le plan complexe muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct.

Pour tout nombre complexe  $z$  appartenant à  $\mathbb{U}$ , on appelle **argument de  $z$**  la mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$  où  $M$  est l'image du point  $z$ .

- 1 Dans la représentation ci-dessous du plan complexe muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct, placer les points  $M_1, M_2, M_3$  appartenant au cercle trigonométrique et dont les arguments respectifs des affixes de ces points ont pour valeurs:

(a)  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$       (b)  $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$       (c)  $\theta_3 = \frac{2\pi}{3}$



**Proposition:** dans le plan complexe muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct. Le point  $M$  appartenant au cercle trigonométrique dont l'afixe  $z$  a pour argument  $\theta$  admet pour écriture algébrique:

$$z = \cos \theta + i \cdot \sin \theta$$

- 2 Donner les écritures algébriques des affixes des points  $M_1, M_2, M_3$  définis à la question 1.

## 10. Argument et angles remarquables

E.5565   

**Définition:** on considère le plan complexe muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct.

Soit  $z$  un nombre complexe non-nul, on appelle **argument de  $z$**  la valeur de l'argument du nombre complexe  $\frac{z}{|z|}$

Déterminer les arguments des nombres complexes ci-dessous:

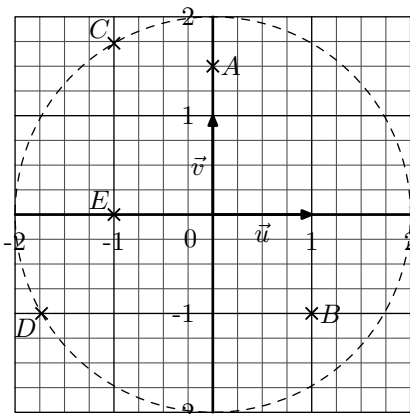
(a)  $z_1 = 1 + i$       (b)  $z_2 = -3 + 3\sqrt{3}i$       (c)  $z_3 = \sqrt{3} - i$

E.3795  

**Interprétation géométrique:** dans le plan muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct, pour tout point  $M$  différent de  $O$ . L'argument de l'afixe du point  $M$  a pour valeur la mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ .

On considère le plan muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct représenté ci-dessous:

Le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon 2 est représenté en pointillé; les points  $C$  et  $D$  appartiennent au cercle  $\mathcal{C}$ .



- 1 Déterminer les modules et les arguments des affixes des points  $A, B, C, D$  et  $E$ .

- 2 Placer les points  $F$  et  $G$  d'affixes respectives  $z$  et  $z'$  vérifiant :

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = -\frac{3\pi}{4} \end{cases} ; \begin{cases} |z'| = 2 \\ \arg(z') = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

## 11. Argument et valeur approchée

E.8572    Pour chacun des nombres complexes ci-dessous, déterminer la valeur de leur argument, arrondie au centième de radian près.

a  $z_1 = 2 + i$     b  $z_2 = -3 - 2i$     c  $z_3 = 1 - 2i$

E.5346    On considère les nombres complexes

ci-dessous :

$$z_1 = 1 + 2i ; \quad z_2 = 5 - 2i ; \quad z_3 = -1 - 2i$$

- 1 Déterminer le module de chacun des nombres complexes ci-dessus.
- 2 Déterminer, au centième de radian près, la valeur de l'argument de chacun des nombres complexes ci-dessus.

## 12. Ecriture trigonométrique

E.5566    Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes  $z_5$  et  $z_6$  non-nuls définis par :

a  $|z_5| = 5$  ;  $\arg(z_5) = -\frac{\pi}{3}$

b  $|z_6| = 2$  ;  $\arg(z_6) = -\frac{\pi}{2}$

E.3797    Déterminer l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

a  $z_1 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

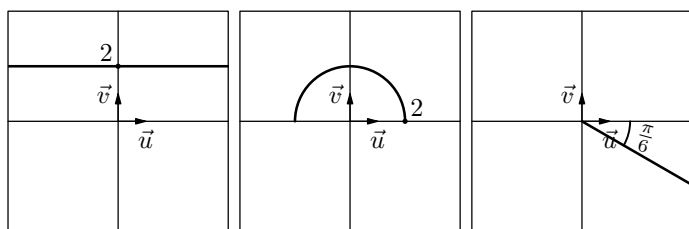
b  $z_2 = \sqrt{3} + i$

c  $z_3 = -1 - i$

d  $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

## 13. Module, argument et lieux géométriques

E.5380    On considère le plan muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé et direct. Pour chacune des parties du plan représentées ci-dessous, décrire ce sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  en utilisant l'écriture algébrique, le module, l'argument des affixes de leurs points.



E.3796    On considère le plan muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct. Décrire l'ensemble des points  $M$  du plan dont l'affixe  $z$  vérifie les conditions suivantes :

a  $|z| = 1$

b  $|z| \leq 3$

c  $1 \leq |z| \leq 2$

d  $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

e  $|\arg(z)| = \frac{\pi}{4}$

## 14. Lieux géométrique

E.6806   On considère les trois ensembles, définis ci-dessous, de couples de réels :

•  $\mathcal{E}_1 = \{(x; y) \mid 2x + y - 1 = 0\}$

•  $\mathcal{E}_2 = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0\}$

•  $\mathcal{E}_3 = \{(x; y) \mid x \cdot y + 2 \cdot y = 0\}$

On considère le plan muni d'un repère  $(O; I; J)$  orthonormé direct. Donner pour chacun des trois ensembles ci-dessus :

- la nature de leur représentation dans le plan,
- des éléments caractérisants leur représentation.

E.6776    À tout nombre complexe  $z$ , on associe un nombre complexe  $z'$  défini par :

$$z' = z^2 + 4z + 3$$

Déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des nombres complexes  $z$  tel que  $z'$  soit un nombre réel.

E.6782



On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes. Le plan complexe est muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct.

On considère la fonction  $f$  qui à tout nombre complexe  $z$  associe :  $f(z) = z^2 + 2 \cdot z + 9$

Soit  $z$  un nombre complexe, tel que  $z = x + i \cdot y$  où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels.

- 1 Montrer que la forme algébrique de  $f(z)$  est :  

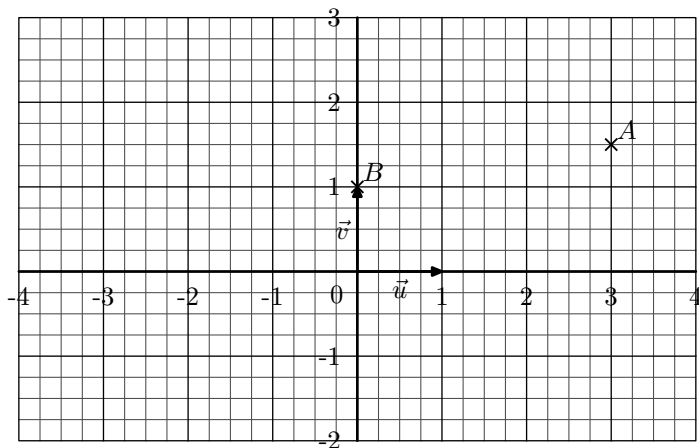
$$f(z) = (x^2 - y^2 + 2 \cdot x + 9) + i \cdot (2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y)$$
- 2 On note  $(\mathcal{E})$  l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe  $z$  est telle que  $f(z)$  soit un nombre réel. Montrer que  $(\mathcal{E})$  est la réunion de deux droites  $D_1$  et  $D_2$  dont on précisera les équations.

## 15. Transformation du plan

E.3785



On considère le plan complexe muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct ainsi que les points  $A$  et  $B$  représentés ci-dessous :



On note  $z_A$  et  $z_B$  les affixes respectives des points  $A$  et  $B$ .

- 1 Donner les écritures algébriques des affixes des points  $A$ ,  $B$ .
- 2 a Placer le point  $C$  d'affixe  $-z_A$ .  
 b Quelle transformation géométrique permet de transformer le point  $A$  en  $C$ ?
- 3 a Placer le point  $D$  d'affixe  $\overline{z_A}$ .  
 b Quelle transformation géométrique permet de transformer le point  $A$  en  $D$ ?
- 4 a Placer le point  $E$  d'affixe  $-\overline{z_A}$ .  
 b Quelle transformation géométrique permet de transformer le point  $A$  en  $E$ ?
- 5 a Placer le point  $F$  d'affixe  $\frac{1}{2} \cdot z_A$ .  
 b Que peut-on dire de la position du point  $F$ ?
- 6 a Placer le point  $G$  d'affixe  $z_A + (-2 - 2i)$ .  
 b Quelle transformation géométrique permet de transformer le point  $A$  en  $G$ ?
- 7 On considère le point  $H$  d'affixe  $z_H$  vérifiant l'égalité :  

$$z_H - z_B = \frac{1}{2} \cdot (z_A - z_B)$$

E.6353



Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. Laquelle? Justifier votre réponse.

Considérons l'ensemble  $\mathcal{E}$  des nombres complexes  $z$  vérifiant :  

$$\frac{1}{z^2 + 1}$$
 soit un réel.

L'ensemble  $\mathcal{E}$  est :

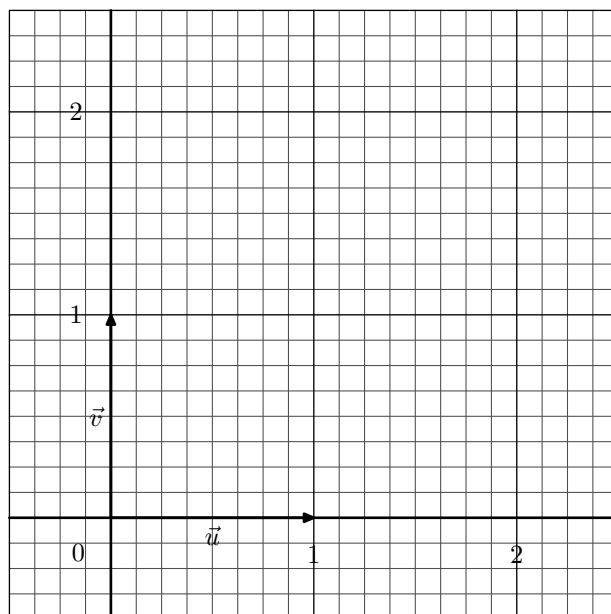
- 1 l'ensemble des nombres réels ;
- 2 l'ensemble des imaginaires purs privé de  $i$  et de  $-i$  ;
- 3 la réunion de l'ensemble des nombres réels et de l'ensemble des imaginaires purs privé de  $i$  et  $-i$  ;
- 4 le nombre 0.

- a En résolvant l'équation, déterminer l'écriture algébrique de l'affixe  $z_H$  du point  $H$ .
- b Que peut-on de la position du point  $H$ ?

E.6796



On considère le plan complexe muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct.



- 1 On considère les points  $A, B, C$  d'affixes respectives :  
 $z_1 = 0,5 + 0,5i$  ;  $z_2 = 1 + i$  ;  $z_3 = 2 + 2i$   
 Placer les points  $A, B$  et  $C$ .
- 2 On considère la fonction  $f$  définie sur l'ensemble des nombres complexes non-nul par :  

$$f(z) = -\frac{1}{z^2}$$
  - a Déterminer les nombres complexes  $z'_1, z'_2, z'_3$  images respectives par la fonction  $f$  de  $z_1, z_2, z_3$ .
  - b Placer les points  $A', B', C'$  images respectives des nombres complexes  $z'_1, z'_2, z'_3$ .
- 3 Peut-on dire que la transformation du plan obtenue à l'aide de la fonction complexe  $f$  est une isométrie? Justifier votre réponse.

## 16. Transformation du plan et lieu géométrique

E.6020



À tout nombre complexe  $z$  tel que  $z \neq -2$ , on associe le nombre complexe  $z'$  défini par :  $z' = \frac{z+3}{z-1}$

- 1 On note  $x+iy$ , où  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ , l'écriture algébrique du nombre complexe  $z$ .

Donner l'écriture algébrique du nombre  $z'$ , associé à  $z$ , en fonction de  $x$  et de  $y$ .

- 2 Dans le plan complexe muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct :

- a On considère l'équation cartésienne :

$$(E): x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$$

Justifier que, dans le plan, l'ensemble des solutions de  $(E)$  est le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $(-1; 0)$  et de rayon 2.

- b Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que le nombre complexe  $z'$  associé soit un imaginaire pur.

E.6797



On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{C}$  par la relation :

$$f(z) = z + \bar{z}^2$$

- 1 Notons  $a$  et  $b$  les nombres réels tels que  $z$  admettent pour écriture algébrique  $z = a + ib$ .

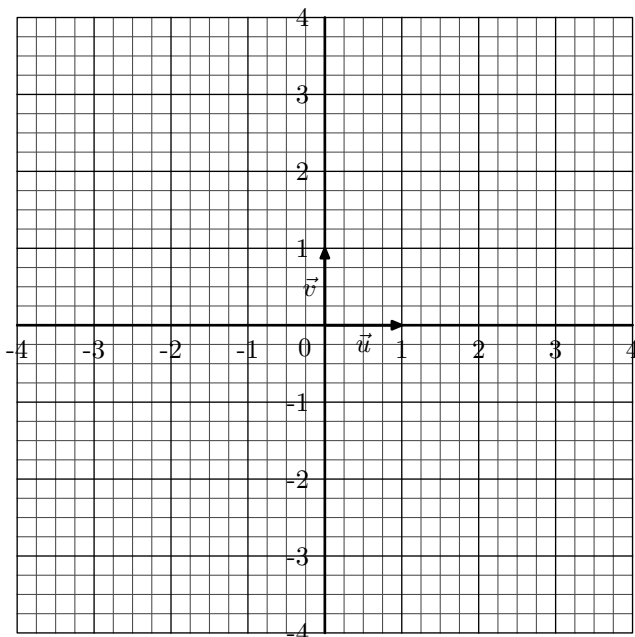
Donner l'écriture algébrique du nombre complexe  $f(z)$ .

- 2 Dans cette question, on cherche à déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des nombres complexes  $z$  tels que  $f(z)$  est un réel. C'est-à-dire :

$$\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}[f(z)] = 0\}$$

- a Soit  $z$  un nombre complexe appartenant à  $\mathcal{E}$ . Déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$ .

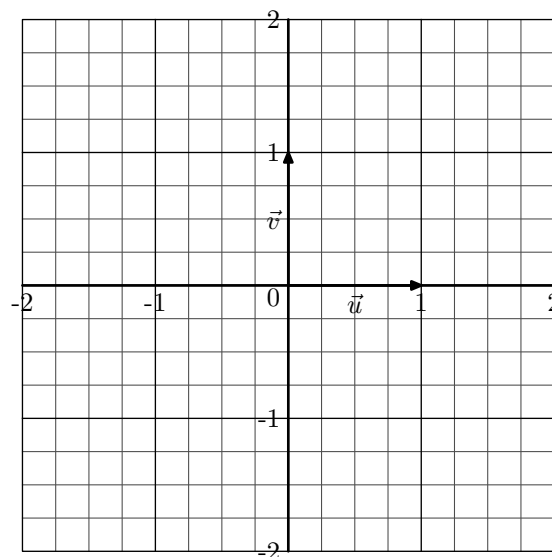
- b Dans le plan complexe représenté ci-dessous muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct, représenter en rouge l'ensemble  $\mathcal{E}$ .



E.6383



On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes et on considère le plan complexe est muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct.



On considère la fonction  $f$  qui à tout nombre complexe  $z$  associe :  $f(z) = z^2 + 2z + 9$

- 1 Soit  $(F)$  l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe  $z$  vérifie :  $|f(z) - 8| = 3$

Prouver que  $(F)$  est le cercle de centre  $\Omega(-1; 0)$  et de rayon  $\sqrt{3}$ .

Tracer  $(F)$  sur le graphique.

- 2 Soit  $z$  un nombre complexe, tel que  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels.

- a Montrer que la forme algébrique de  $f(z)$  est :  $x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y)$

- b On note  $(E)$  l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe  $z$  telle que  $f(z)$  soit un nombre réel. Montrer que  $(E)$  est la réunion de deux droites  $(d_1)$  et  $(d_2)$  dont on précisera les équations. Compléter le graphique en traçant ces droites.

- 3 Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles  $(E)$  et  $(F)$ .

**E.6798** Dans le plan complexe muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé.

On considère l'ensemble  $\mathcal{E}$  défini par :  $\mathcal{E} = \{a + i \cdot a \mid a \in \mathbb{R}\}$   
L'image de cet ensemble dans le plan est la première bissectrice du plan.

On considère la fonction complexe définie sur  $\mathbb{C}$  par la relation :

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

Le but de l'exercice est de déterminer des caractéristiques de l'image de l'ensemble  $\mathcal{E}'$  dans le plan où :

$$\mathcal{E}' = \{f(z) \mid z \in \mathcal{E}\}.$$

C'est-à-dire la représentation dans le plan de toutes les images de l'ensemble  $\mathcal{E}$  par la fonction  $f$ .

- 1 Soit  $z$  un élément de  $\mathcal{E}$  ; il existe donc un réel  $a$  tel que :  
 $z = a + a \cdot i$   
Établir que :  $f(z) = \frac{1}{1+4 \cdot a^4} - \frac{2 \cdot a^2}{1+4 \cdot a^4} \cdot i$
- 2 a Démontrer que :  $|f(z) - 0,5| = 0,5$
- b Que peut-on dire de l'image de l'ensemble  $\mathcal{E}'$  dans le plan?
- c Montrer que le point  $A$  d'affixe  $0,5 + 0,5 \cdot i$  n'appartient pas à l'ensemble  $\mathcal{E}'$ . Affiner, si nécessaire, la réponse à la question b.

## 17. Suites

**E.6381** On considère la suite de nombres complexes  $(z_n)$  définie par :

$$z_0 = \sqrt{3} - i \quad ; \quad z_{n+1} = (1 + i) \cdot z_n$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $u_n = |z_n|$ .

- 1 Calculer  $u_0$ .
- 2 Démontrer que  $(u_n)$  est la suite géométrique de raison  $\sqrt{2}$  et de premier terme 2.
- 3 Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- 4 Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**E.6092** Le plan complexe est muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$  défini par :

$$z_0 = 1 \quad ; \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot i\right) \cdot z_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

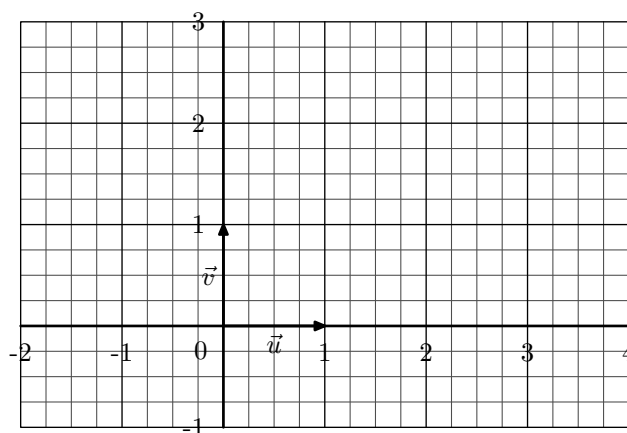
On définit la suite  $(r_n)$  par  $r_n = |z_n|$  pour tout entier naturel  $n$ .

- 1 Donner la forme trigonométrique du nombre complexe :  
 $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot i$ .
- 2 Montrer que la suite  $(r_n)$  est géométrique de raison  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 3 Déterminer, en fonction de  $n$ , la mesure du segment  $[A_n A_{n+1}]$ .

**E.6382** On considère la suite  $(z_n)$  de nombres complexes définies par :

$$z_0 = 4 \quad ; \quad z_{n+1} = \frac{1+i}{2} \cdot z_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine  $O$ , on note  $A_n$  le point image du nombre complexe  $z_n$ .



- 1 a Calculer  $z_1, z_2$  et  $z_3$ .
- b Placer les points  $A_1, A_2$  et  $A_3$  dans le repère ci-dessous.
- 2 On note  $\ell_n$  la longueur de la ligne brisée qui relie le point  $A_0$  au point  $A_n$  en passant successivement par les points  $A_1, A_2, A_3, \dots$   
Ainsi :  $\ell_n = \sum_{k=1}^n A_{k-1} A_k = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$
- a Établir la relation ci-dessous pour tout entier naturel  $n$  non-nul :  
 $A_{n-1} A_n = |z_n|$
- b À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel  $n$  non-nul :  
 $A_{n-1} A_n = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$
- c Donner une expression de  $\ell_n$  en fonction de  $n$ .
- d Déterminer la limite éventuelle de la suite  $(\ell_n)$ .

## 18. Exercices non-classés

**E.4314** Le plan complexe est rapporté à un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct. On désigne par  $P, Q$  et  $R$  les points d'affixes respectives :

$$z_P = \frac{3}{2} \cdot (1 + i) \quad ; \quad z_Q = \frac{3}{2} \cdot (1 - i) \quad ; \quad z_R = -2 \cdot i \cdot \sqrt{3}$$

On note  $S$  l'image du point  $R$  par la symétrie de centre  $Q$ .

Vérifier que l'affixe  $z_S$  du point  $S$  est :  $z_S = 3 + i \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3)$   
<https://chingmath.fr> **CC BY-NC**