

1. Rappels

E.2304   

Voici la table de trigonométrie des angles remarquables :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Déterminer les valeurs exactes des expressions ci-dessous :

(a) $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ (b) $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ (c) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

E.7605   

Proposition : formule des angles associés

- $\cos(-x) = \cos x$ • $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi+x) = -\cos x$ • $\sin(\pi+x) = -\sin x$
- $\cos(\pi-x) = -\cos x$ • $\sin(\pi-x) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$ • $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$ • $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

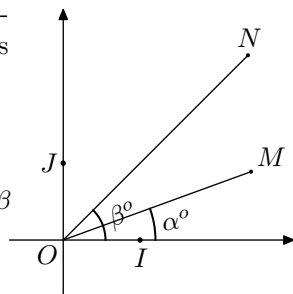
2. Formules d'addition

E.6808   

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère les points M et N tel que :

$$\|\vec{OM}\| = a \quad ; \quad \|\vec{ON}\| = b$$

$$(\vec{OI}; \vec{OM}) = \alpha \quad ; \quad (\vec{OI}; \vec{ON}) = \beta$$



- (1) (a) Déterminer les coordonnées des points M et N .
(b) Donner une expression du produit scalaire $\vec{OM} \cdot \vec{ON}$
- (2) (a) Donner la mesure de l'angle orienté : $(\vec{OM}; \vec{ON})$
(b) Donner une autre expression de $\vec{OM} \cdot \vec{ON}$.
- (3) En déduire l'égalité :
 $\cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \sin \alpha$

Soit α un nombre réel. Simplifier les écritures suivantes :

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ (b) $\sin(\alpha + 3\pi)$
(c) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ (d) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

E.2575    À l'aide de la relation :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{où } x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

simplifier les expressions suivantes :

(a) $\tan(x + \pi)$ (b) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

E.8577    Exprimer l'expression suivante à l'aide des rapports trigonométriques de $\frac{\pi}{5}$:

$$A = 2 \cdot \cos \frac{4\pi}{5} + 3 \cdot \sin \frac{6\pi}{5} - 4 \cdot \sin \frac{3\pi}{10}$$

E.2230   

- (1) Établir l'égalité : $\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{5\pi}{6} = 0$
- (2) Déterminer la valeur des coefficients α et β réalisant l'égalité suivante :
 $2 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + 3 \cdot \cos \frac{8\pi}{7} - 2 \cdot \sin \frac{6\pi}{7} + \sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) = \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{7} + \beta \cdot \sin \frac{\pi}{7}$

E.2616   

Formules d'addition et de différence

- $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$

Déterminer une simplification des expressions suivantes :

- (1) $\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x$
- (2) $\sin 3x \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \cos 3x$

E.2614   

- (1) En remarquant l'égalité $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- (2) Déterminer les valeurs de : $\cos \frac{7\pi}{12}$; $\sin \frac{7\pi}{12}$

E.3794   

- (1) (a) Développer l'expression : $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
(b) Résoudre l'équation : $\sin x + \cos x = 1$
- (2) (a) Développer l'expression : $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.
(b) Résoudre l'équation : $\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x = 1$

E.2615    Montrer la relation suivante :

$$\sin(a+b) \cdot \cos(a-b) = \sin a \cdot \cos a + \cos b \cdot \sin b$$

E.3089   

1 Simplifier l'expression suivante :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

2 Établir l'égalité suivante :

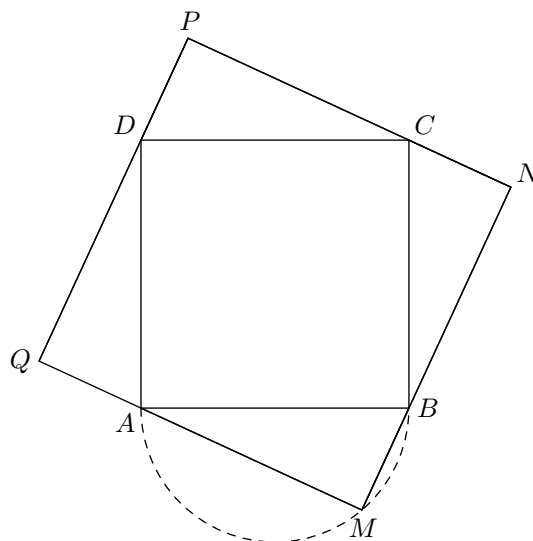
$$\frac{\sin 5x}{\sin 2x} + \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{(\sin 3x)^2}{\sin(2x) \cdot \sin(x)}$$

3 Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x) = \cos \frac{\pi}{7}$$

E.4722     On considère le carré $ABCD$. Soit M un point appartenant au demi-cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ se situant hors du carré $ABCD$.

On considère les points N , P et Q tels que le quadrilatère $MNPQ$ soit un carré dont les points A , B , C , D appartiennent respectivement aux droites (MQ) , (MN) , (NP) , (PQ) .



1 Montrer que les triangles AMB , ADQ , CDP et BCN sont isométriques.

2 On note $\mathcal{A}$ l'aire du carré $ABCD$, $\mathcal{A}'$ l'aire du carré $MNPQ$ et α la mesure géométrique de l'angle $\widehat{BAM}$.
Montrer que l'égalité : $\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = 1 + \sin(2\alpha)$

3 Pour quelle valeur de α , l'aire $\mathcal{A}'$ est le double de l'aire $\mathcal{A}$.

3. Formules de duplication

E.2613   

Formules de duplication

• $\cos(2a) = (\cos a)^2 - (\sin a)^2$

• $\cos(2a) = 2 \cdot (\cos a)^2 - 1$

• $\cos(2a) = 1 - 2 \cdot (\sin a)^2$

• $\sin(2a) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$

1 Établir la relation suivante : $\left(\cos \frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{2} + 2)$

2 En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{8}$.

3 Établir la relation : $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

4. Opération sur les écritures trigonométrique

E.8578    On considère les deux nombres complexes :

$$z_1 = 1 + i \quad ; \quad z_2 = 3 + \sqrt{3}i$$

1 Déterminer l'écriture trigonométrique des nombres complexes z_1 et z_2 .

2 Effectuer le produit $z_1 \cdot z_2$. En déduire l'écriture trigonométrique de ce produit.

3 a Exprimer le module du produit $z_1 \cdot z_2$ en fonction des modules de z_1 et z_2 .

b Exprimer l'argument du produit $z_1 \cdot z_2$ en fonction des arguments de z_1 et z_2 .

E.8579 On considère les deux nombres complexes :

$$z_1 = 2 - 2i ; \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i$$

- 1) Déterminer l'écriture trigonométrique des nombres complexes z_1 et z_2 .
- 2) Donner l'écriture trigonométrique du quotient $\frac{z_1}{z_2}$.
- 3) a) Exprimer le module du produit $\frac{z_1}{z_2}$ en fonction des modules de z_1 et z_2 .
b) Exprimer l'argument du produit $\frac{z_1}{z_2}$ en fonction des arguments de z_1 et z_2 .

E.5952 Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes :

- a) $z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$
- b) $z_2 = -3 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right)$
- c) $z_3 = \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)$
- d) $z_4 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \right)$

E.3828 Rechercher tous les couples $(z_1 ; z_2)$ de nombres complexes satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{2} \\ z_1 + 2 \cdot z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

5. Écritures exponentielles

E.5365 Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

- a) $z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \pi}$
- b) $z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$
- c) $z_3 = 2\sqrt{3} \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{6}}$

E.3848 Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

- a) $z_1 = 5$
- b) $z_2 = -3$
- c) $z_3 = -3i$
- d) $z_4 = -3 + 3i$
- e) $z_5 = -2\sqrt{3} - 2i$
- f) $z_6 = \sqrt{3} - 3i$

6. Produit, quotient d'écriture exponentielle

E.3798

- 1) Donner l'écriture exponentielle des deux nombres complexes suivants : $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 1 + i$
- 2) En déduire l'écriture exponentielle du nombre complexe : $z = \frac{1 - i}{1 + i}$

E.8581 Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe z_3 définie par : $z_3 = \frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}$

Déterminer l'écriture trigonométrique de chacun des nombres ainsi obtenus.

E.3826 On considère les deux nombres complexes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i \cdot \sqrt{2}}{2} ; \quad z_2 = 1 - i$$

- 1) Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes z_1 et z_2 .
- 2) a) Établir l'égalité suivante :
$$\frac{\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)}{\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right)} = \cos \frac{\pi}{12} + i \cdot \sin \frac{\pi}{12}$$

b) On définit le nombre Z par la relation : $Z = \frac{z_1}{z_2}$
Déterminer l'écriture trigonométrique du nombre complexe Z .
- 3) En déduire que :
$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} ; \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$
- 4) On considère l'équation d'inconnue réelle x : $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \sin x = 2$
Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

E.3831

- 1) Soit z un nombre complexe admettant la forme exponentielle : $z = r \cdot e^{i \cdot \theta}$ où $r \in \mathbb{R}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$
Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants : a) $\bar{z}$ b) $-z$
- 2) a) Justifier l'égalité suivante : $2 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{3}} = -2 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}}$
b) En déduire l'écriture exponentielle de : $2 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{3}} + 3 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}}$

z_4 .

E.5366    On considère les deux nombres complexes donnés ci-dessous :

$$z_1 = \sqrt{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_2 = \sqrt{6} \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{6}}$$

Déterminer une expression simplifiée des calculs suivants :

(a) $z_1 \cdot z_2$ (b) $\frac{z_1}{z_2}$ (c) $z_1 + z_2$

E.4253     Dans $\mathbb{C}$, on considère les deux nombres complexes suivants :

$$z_A = 1 - i \quad ; \quad z_B = 2 + \sqrt{3} + i$$

(1) Déterminer le module et un argument de z_A .

(2) Écrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous écriture algébrique.

(3) Montrer que : $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3}) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$

(4) En déduire l'écriture exponentielle de z_B .

E.3827     On considère dans $\mathbb{C}$ les nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β . Montrer que :

$$\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 \cdot z_2} \text{ est un réel positif ou nul.}$$

E.6380     On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$z_0 = \sqrt{3} - i \quad ; \quad z_{n+1} = (1 + i) \cdot z_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(1) Déterminer la forme algébrique de z_1 .

(2) Déterminer la forme exponentielle de z_0 et $1+i$.
En déduire la forme exponentielle de z_1 .

(3) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

E.8582    On considère le nombre complexe z défini par :

$$z = \frac{1 + i}{3 + \sqrt{3} \cdot i}$$

(1) Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z .

(2) En déduire la mesure principale de l'angle θ réalisant :

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \quad ; \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

7. Écriture exponentielle et mesure principale de l'argument

E.5381    On considère les deux nombres complexes suivants donnés sous leur forme exponentielle :

$$z_1 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} \quad ; \quad z_2 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}}$$

Donner l'écriture exponentielle des expressions suivantes :

(a) $z_1 \cdot z_2$ (b) $(z_1)^2 \cdot z_2$ (c) $\frac{z_2}{(z_1)^3}$

Indication : On donnera les mesures principales des arguments

E.3829   

(1) (a) Soit z_1 le nombre complexe admettant pour écriture algébrique : $z_1 = -2 \cdot \sqrt{3} + 2i$

Déterminer l'écriture exponentielle de ce nombre.

(b) Soit z_2 le nombre complexe vérifiant :

$$|z_2| = \sqrt{2} \quad ; \quad \arg(z_2) = \frac{3}{4} \cdot \pi$$

Déterminer l'écriture algébrique du complexe z_2

(2) Déterminer, à votre convenance, soit l'écriture algébrique, soit l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

(a) $z_1 \cdot z_2$ (b) $z_1 + z_2$

Indication : On donnera les mesures principales des arguments

E.3830   

(1) On définit les deux nombres complexes z et z' par :

$$z = 3 - 4i \quad ; \quad z' = -2 + i$$

Déterminer l'écriture algébrique des nombres suivants :

(a) $z + \bar{z}'$ (b) $\bar{z} \cdot z'$ (c) $\bar{z}' \cdot \overline{z + i}$

(2) Considérons les deux nombres complexes z et z' admettant pour écriture algébrique :

$$z = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z' = e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$$

Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

(a) $-z$ (b) $\bar{z}$ (c) $z \cdot z'$ (d) $\frac{(\bar{z}')}{z}$

Indication : On donnera les mesures principales des arguments

E.6081   

Le plan complexe est rapporté à un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct. On considère l'application z de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f: z \mapsto z^2$.

On considère le complexe : $a = \sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}$

(1) Exprimer a sous écriture exponentielle.

(2) En déduire les nombres complexes antécédents du nombre a par f .

8. Puissance d'écriture exponentielle

E.8583    On considère le nombre complexe z défini par :

$$z = 1 + i$$

Établir que le nombre z^{100} est un nombre réel.

E.4325     Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

① Soit $z = 3 + i \cdot \sqrt{3}$.

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n non nul, $z^{3 \cdot n}$ est imaginaire pur.

② Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 2 : Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z alors :
 $|i + z| = 1 + |z|$

9. Formule d'Euler

E.8584   

Définition : on **linéarise** une expression de la forme $\cos^p(x) \cdot \sin^q(x)$, où $p, q \in \mathbb{N}$ lorsqu'on la transforme en une combinaison linéaire d'expression de la forme $\cos(n \cdot x)$ et $\sin(m \cdot x)$, où $n, m \in \mathbb{N}$

Établir la linéarisation suivante :

$$\cos(x)^2 \cdot \sin(x)^2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot \cos(4x)$$

E.5947    On souhaite linéariser l'expression $\cos^3(x)$:

③ Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 3 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

E.5325    On considère le nombre complexe :
 $a = (-\sqrt{3} + i)^{2011}$.

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

"Le nombre complexe a est un nombre imaginaire pur."

① À l'aide de la formule d'Euler et la formule du binôme, établir :

$$\cos^3(x) = \frac{e^{-3i \cdot x} + 3 \cdot e^{-i \cdot x} + 3 \cdot e^{i \cdot x} + e^{3i \cdot x}}{8}$$

② En déduire l'identité : $\cos^3(x) = \frac{\cos(3x) + 3 \cdot \cos(x)}{4}$

E.599   Pour tout nombre réel x et pour tout entier k non-nul, établir la relation :

$$[\cos(x)]^{2k} = \frac{1}{4^k} \cdot \binom{2k}{k} + \frac{1}{2^{2k-1}} \cdot \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{2k}{\ell} \cdot \cos[(2k-2\ell)x]$$

10. Formule de Moivre

E.8585  

Prérequis : pour tout entier naturel n et tout nombre réel θ , on a :

$$(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)^n = \cos(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta)$$

① À l'aide de la formule du binôme, établir l'identité :

$$(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)^3 = (4 \cdot \cos(\theta)^3 - 3 \cdot \cos \theta) + i(3 \cdot \sin \theta - 4 \cdot \sin(\theta)^3)$$

② À l'aide de la formule de Moivre, établir les identités :

$$\cos(3\theta) = 4 \cdot \cos(\theta)^3 - 3 \cdot \cos \theta \quad ; \quad \sin(3\theta) = 3 \cdot \sin \theta - 4 \cdot \sin(\theta)^3$$

11. Cours

E.3299   

Rappels :

- Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \iff \begin{cases} z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ r > 0 \end{cases}$$

- Pour tous nombres réels a et b :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
 Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

E.3301    On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z , on a :

$$|z| = \|\vec{w}\| \quad ; \quad \arg(z) = (\vec{u} ; \vec{w}) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

Prérequis : on sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

E.5951



On considère deux nombres complexes z et z' non-nuls de modules respectifs r et r' et d'arguments respectifs θ et θ' .

- Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes z et z' .

- Montrer que le nombre complexe $z \cdot z'$ est un nombre complexe de module $(r \cdot r')$ et d'argument $(\theta + \theta')$.

- Montrer que le nombre complexe $\frac{z}{z'}$ est un nombre complexe de module $\frac{r}{r'}$ et d'argument $(\theta - \theta')$.

12. Exercices non-classés

E.5280



Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + i \cdot \sqrt{6} \quad ; \quad z_2 = 2 + 2 \cdot i \quad ; \quad Z = \frac{z_1}{z_2}$$

- Écrire Z sous forme algébrique.
- Donner les modules et les arguments de z_1 , z_2 et Z .
- En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

E.5281



On considère l'équation (E) suivante : $z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot z + 1 = 0$

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre affirmation :

“L'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1.”