

1. Écriture algébrique d'un nombre complexe

E.6788    Sachant que $i^2 = -1$, simplifier l'écriture des expressions suivantes :

- (a) i^2 (b) i^3 (c) i^4 (d) i^5
 (e) i^{14} (f) i^{100} (g) i^{-1} (h) i^{-3}

E.3782    Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_1 = 3 \cdot (2 - i) + i \cdot (3 + 2i)$ (b) $z_2 = (5 + 2i) \cdot (1 - i)$

E.8649    Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_3 = -5i \cdot (5 - 4i) - 3i$ (b) $z_4 = (5 + 2i) \cdot (5 - 2i)$

E.6107    Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_1 = (5 + 2i)^2$ (b) $z_5 = (2 - i)^2 - 2 \cdot (1 + 3i)^2$

E.3788    Soit x un nombre réel. On considère le nombre complexe z défini par l'égalité :

$$z = (x + 2i) \cdot (1 - xi)$$

- Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z .
- Pour quelle(s) valeur(s) de x , z est un nombre réel?
 - Pour quelle(s) valeur(s) de x , z est un imaginaire pur?

2. Calcul avec une expression

E.5310   

- On considère le polynôme P à coefficient dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{C}$ par : $P = 2 \cdot z^3 + z^2 + 2 \cdot z + 1$

Vérifier que les trois nombres ci-dessous sont des racines du polynôme P :

$$z_1 = -i \quad ; \quad z_2 = i \quad ; \quad z_3 = -\frac{1}{2}$$

- On considère le polynôme Q à coefficient dans $\mathbb{C}$ définie sur $\mathbb{C}$ par : $Q = i \cdot z^2 + (2+i) \cdot z + 2$

Vérifier que le nombre complexe $z_4 = 2i$ est une racine du polynôme Q .

E.5311   

- On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P = 2 \cdot z^3 + 3 \cdot z^2 + 2 \cdot z - 2$

Vérifier que les deux complexes z_1 et z_2 sont des racines du polynôme P où :

$$z_1 = -1 + i \quad ; \quad z_2 = -1 - i$$

- On considère le polynôme Q défini sur $\mathbb{C}$ par : $Q = z^3 + z^2 + 3 \cdot z - 5$

Vérifier que les deux complexes z_3 et z_4 sont des racines du polynôme Q où :

$$z_3 = -1 - 2i \quad ; \quad z_4 = -1 + 2i$$

3. Equations

E.5324   

- Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (E) définie par : $(E) : z + 2 - i = (1 + i) \cdot z$

Montrer que le nombre complexe $-1 - 2i$ est solution de l'équation (E) .

- Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (F) définie par : $(F) : (z - 1 + 2i)(z + 2i) = z^2 - i$

Montrer que le nombre complexe $-i$ est solution de l'équation (F) .

E.3799   

Rappel : un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Considérons l'équation $(E) : i \cdot z + 2 = i$

- En notant $a + i \cdot b$ l'écriture algébrique d'une solution z de l'équation (E) , montrer que : $(2 - b) + i \cdot (a - 1) = 0$

- En déduire l'écriture algébrique de l'unique solution de l'équation (E) .

E.8650    Dans $\mathbb{C}$, résoudre les équations suivantes :

(a) $z + 2i \cdot z = i$ (b) $z + 2 - i \cdot (z + 1) = 0$

E.8560    Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante :

$$(3 + i) \cdot z - 3 \cdot (5 \cdot z - 2) = 0$$

E.6250    Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations :

(a) $\frac{z - 5}{z - i} = i$ (b) $\frac{2 - 3 \cdot z}{z + i} = -2i + z$

Indication pour la seconde équation : l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est dit **intègre**. C'est-à-dire qu'il vérifie la propriété pour tout nombre complexe a et b :

$$a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ ou } b = 0$$

4. Conjugué : définitions

E.5326   

Définition : pour tout nombre complexe z admettant l'écriture algébrique $a+i\cdot b$, avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$, on appelle **conjugué du nombre complexe z** , le nombre complexe, notée $\bar{z}$ définie par : $\bar{z}=a-i\cdot b$

Donner l'écriture algébrique du conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

5. Conjugué: simplification de quotient

E.8561   

Méthode : considérons le nombre défini par $\frac{z}{z'}$, où z et z' sont deux nombres complexes. Pour obtenir son écriture algébrique, on considère le quotient $\frac{z \cdot \bar{z'}}{z' \cdot \bar{z'}}$ dont le dénominateur est un nombre réel.

Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $z = \frac{1}{i}$ (b) $z = \frac{2}{2-i}$ (c) $z = \frac{3}{1+2i}$

E.3786    Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_1 = \frac{2}{i}$ (b) $z_2 = \frac{3}{2-4i}$ (c) $z_3 = \frac{-2}{1+i}$

E.5133    Donner l'écriture algébrique des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_1 = \frac{1+i}{i}$ (b) $z_2 = \frac{1}{1-i}$ (c) $z_3 = \frac{-2+i}{2+i}$

E.5309    On considère les deux nombres complexes z_1 et z_2 définis par :

(a) $z = 1+i$ (b) $z = 2i-3$ (c) $z = i\cdot(1+2i)$

E.3789    Soit z un nombre complexe.

- Démontrer que les deux nombres suivants sont des réels :
 $z + \bar{z}$; $z \cdot \bar{z}$
- Démontrer que le nombre complexe $z - \bar{z}$ est un imaginaire pur.

$z_1 = 1+i$; $z_2 = 5-2i$

Déterminer l'écriture algébrique des nombres suivants :

(a) $z_1 + z_2$ (b) $z_1 - z_2$ (c) $z_1 - 2\cdot z_2$
(d) $z_1 \cdot z_2$ (e) $\frac{z_1}{z_2}$ (f) $\frac{z_2}{z_1 - z_2}$

E.5327    Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z = \frac{2+2i}{-1+i}$ (b) $z = \frac{3-4i}{1+i}$ (c) $z = \frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}$

E.8562    Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

(a) $z_4 = \frac{3-2i}{5+3i}$ (b) $z_5 = \frac{2+3i}{1-i}$ (c) $z_6 = \frac{2}{2+\frac{1}{1+i}}$

E.4249     Soit z un nombre complexe distinct de 0 et de i . On considère les nombres complexes n , p et q dont leur affixe est définie par : $n=i\cdot z+1+i$; $p=-z+1+i$; $q=-i\cdot z$

Établir l'égalité suivante : $\frac{z-n}{p-n} = i + \frac{1}{z}$

6. Equations de la forme $a\cdot z = b$

E.8564    Résoudre les équations suivantes et donner les écritures algébriques de leurs solutions :

(a) $i\cdot z = 1+2i$ (b) $(1+i)\cdot z = 5$ (c) $4\cdot z = i-2$

E.8565    Résoudre les équations suivantes :

(a) $3\cdot z + 2i\cdot z = 3-i$ (b) $(5-i)(z+3) = i$

7. Equations du premier degré

E.8566    Résoudre les équations suivantes :

(a) $\frac{2-3\cdot z}{z+i} = -2i+z$ (b) $(1+2i)(z-3i) = z+2+3i$

8. Conjugué: propriétés algébriques

E.6789    Sans effectuer de calcul, justifier que les nombres complexes z_1 et z_2 sont des nombres complexes conjugués.

(a) $z_1 = (1+i) \cdot (2-i)$; $z_2 = (1-i) \cdot (2+i)$

(b) $z_1 = \frac{i-3}{2+2i}$; $z_2 = \frac{-i-3}{2-2i}$

(c) $z_1 = (1-i)^5$; $z_2 = (1+i)^5$

E.3824    Pour chacun des nombres complexes ci-dessous :

- sans calcul, donner une expression du nombre complexe conjugué du nombre z ;
- puis, donner l'écriture algébrique du nombre complexe $\bar{z}$.

9. Equations avec z et $\bar{z}$

E.6790    

Rappels : un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle est nulle et sa partie imaginaire est nulle. Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}$, cette propriété se traduit par :

$$z=0 \iff \Re(z)=0 \text{ et } \Im(z)=0$$

Déterminer les valeurs des réels a et b réalisant l'égalité suivante :

$$2 \cdot a + b \cdot (2+i) - 3 \cdot i = a \cdot (i-2) + b \cdot (1-2i)$$

E.3800    Résoudre les équations suivantes :

(a) $z = (2-i)(5+3i)$

(b) $z = i \cdot (3+2i) - 3 + i$

E.8563    Pour chacun des nombres complexes, déterminer l'écriture algébrique de leur conjugué :

(a) $z = \frac{5-2i}{i-2}$

(b) $z = \frac{(3-2i)(1-i)}{1+i}$

E.5333    On considère les deux nombres complexes z_1 et z_2 :

$$z_1 = \frac{3-2i}{1+i} ; z_2 = \frac{3+2i}{1-i}$$

- 1 Que peut-on dire des nombres complexes z_1 et z_2 ?
- 2 (a) Déterminer l'écriture algébrique du nombre z_1 .
(b) En déduire l'expression de z_1+z_2 et z_1-z_2 .

(a) $z + \bar{z} = 6$

(b) $z + \bar{z} = i$

(c) $z + 2 \cdot \bar{z} = 8 + i$

(d) $i \cdot \bar{z} + 2 \cdot (z-5) = 0$

E.6194    Résoudre les équations suivantes :

(a) $3 + i \cdot z + 2 \cdot i = z$

(b) $(3+i) \cdot z - 3 \cdot (5 \cdot z - 2) = 0$

E.6791    Résoudre les équations suivantes :

(a) $\frac{\bar{z}}{z+1} = 1$

(b) $(1-\bar{z})(i \cdot z + 2) = 2$

10. Formule du binôme

E.8567    Établir l'égalité : $(2+i)^5 = -38 + 41i$

E.6108    Donner l'écriture algébrique du nombre :

bre :

$$z = \sum_{k=0}^4 (1+i)^k$$

11. Suite

E.3783  

- 1 Simplifier l'écriture de l'expression suivante :
 $A = 1 + i + i^2 + i^3$

- 2 Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe :
 $B = 1 + i + i^2 + \dots + i^{99}$

12. Cours - Nombres complexes

E.4101   

Prérequis soit z un nombre complexe tel que $z = a + i \cdot b$ où a et b sont deux nombres réels.
On note $\bar{z}$ le nombre complexe défini par : $\bar{z} = a - i \cdot b$

Questions

- 1 Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z' :
 $z \times z' = z' \times z$

- 2 Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z :
 $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

E.6812



Restitution organisée de connaissance

Prérequis : tout nombre complexe z admet une écriture :

$$z = x + i \cdot y \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

Le **conjugué** de z est le nombre complexe défini par :

$$z = x - i \cdot y$$

Démontrer que :

- Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 : $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul : $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

E.3300

**Prérequis :** le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z .

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2 :

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|.$$

- pour tout nombre complexe z non nul :

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$

13. Exercices non-classés

E.8580

Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z défini par : $z = \frac{1-i}{1+i}$

E.8587



On considère le nombre complexe :

$$j = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$(1 + j)^{2n+1} = -j^{n+2}$$