

1. Addition

E.6809   

Définition : soit m, n deux entiers naturels non-nuls ($m, n \in \mathbb{N}^*$). On considère deux matrices A et B de dimensions $m \times n$ et on note respectivement a_{ij} et b_{ij} leurs coefficients.

La **somme des matrices A et B** est la matrice de dimensions $m \times n$ notée $A+B$ dont les coefficients c_{ij} , sont définis par :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad ; \quad \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$$

Effectuer les additions de matrices suivantes :

a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

E.6155    Effectuer les opérations suivantes :

a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Multiplication par un réel et addition

E.6154   

Définition : soit λ un nombre réel ($\lambda \in \mathbb{R}$) et A une matrice de dimension $m \times n$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$) dont les coefficients sont notés a_{ij}

On appelle **produit de la matrice A par le scalaire λ** , la matrice de dimensions $m \times n$ notée $\lambda \cdot A$ et dont les coefficients b_{ij} sont définis par :

$$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \quad \forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad ; \quad \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$$

Effectuer les opérations suivantes :

a $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b $4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Multiplication

E.6165   

Définition : soit m, n, p trois entiers naturels non-nuls ($m, n, p \in \mathbb{N}^*$).

On considère les deux matrices A et B de dimensions respectives $m \times n$ et $n \times p$. Le **produit de la matrice A par la matrice B** est une matrice de dimensions $m \times p$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \times b_{kj} \quad \forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad ; \quad \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket$$



Vérifier les égalités suivantes :

a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$

E.5355    Effectuer les produits suivants de matrices :

a $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

E.3107    Effectuer les produits de matrices suivantes :

a $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

E.5072    Effectuer les produits de matrices suivantes :

a $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

E.6157    Effectuer les produits de matrices suivantes :

a $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

E.6158    Effectuer les produits de matrices suivantes :

a $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

E.6172    Effectuer les produits matriciels suivants :

a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

E.6197   Une entreprise nécessite chaque année des fournitures de bureau pour faire fonctionner ses départements “administratifs” et “productions”. Le tableau ci-dessous recense ses besoins pour une année en milliers d’unités :

	Rames de feuilles (M_1)	Stylo (M_2)	Tubes de colle (M_3)
Administration (D_1)	3	4	1
Production (D_2)	1	2	3

4. Multiplication et matrice identité

E.6166   

Définition : on appelle **matrice identité d’ordre n** ($n \in \mathbb{N}^*$) la matrice carrée d’ordre n dont les coefficients ont pour valeur 1 sur la diagonale principale et 0 ailleurs. On la note I_n .

Pour $I_n = (a_{ij})$, on a : $\begin{cases} a_{ii} = 1 & \forall i \in \llbracket 1;n \rrbracket \\ a_{ij} = 0 & \forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2 \text{ et } i \neq j \end{cases}$

1 Effectuer les produits matriciels suivants :

a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

2 Que peut-on donner comme caractéristique à une matrice ne comportant que des 1 sur sa diagonale principale et des zéros ailleurs?

5. Commutativité de la multiplication

E.6167   

Un appel d’offres est lancé auquel répondent deux entreprises. Le tableau ci-dessous représente le prix unitaire en euros de chacun des fournitures nécessaires à cette entreprise :

	Rames de feuilles (M_1)	Stylo (M_2)	Tubes de colle (M_3)
Fournisseur PasTropCher (F_1)	2	3	1
Fournisseur BonPrix (F_2)	3	1	2

- a Écrire la matrice $A = (a_{ij})$ où le coefficient a_{ij} est la quantité du matériel M_j nécessaire au département D_i .

b Écrire la matrice $B = (b_{ij})$ où le coefficient b_{ij} est le prix proposé par le fournisseur F_j pour le matériel M_i .
- Effectuer le produit matriciel suivant : $A \cdot B$.
- a Afin de réaliser des économies, quel fournisseur l’entreprise doit choisir.

b Pour ce fournisseur, donner le montant de l’achat des fournitures de bureau.

E.5144    On souhaite déterminer l’ensemble des matrices carrées de dimensions 2 vérifiant : $A^2 = I_2$

Pour cela, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont quatre réels quelconques.

- a Exprimer la matrice A^2 en fonction des réels a, b, c et d .

b Déterminer un système d’équations vérifié par les réels a, b, c et d .
- Pour étudier ce problème, nous allons effectuer une disjonction de cas :
 - Si $b=0$, exprimer la matrice A en fonction du réel c .
 - Si $b \neq 0$, exprimer la matrice A en fonction des réels a et b .

Définition : soit A et B deux matrices carrées d’ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), on dit que le produit des matrices A et B est **commutatif** si :

$$A \cdot B = B \cdot A$$

1 Effectuer les deux produits matriciels suivants :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Effectuer les deux produits matriciels suivants :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3 Peut-on obtenir une règle sur les produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$ de deux matrices ?

E.5076 On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1 Démontrer que : $A \cdot B = 0$

2 Déterminer la matrice produit $B \cdot A$.

E.5093 Pour chaque question, montrer que le produit des matrices A et B est commutatif.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

E.8620 Pour chaque question, vérifier si le produit des matrices A et B est commutatif ou non.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Multiplication et résolutions de systèmes d'équations linéaires

E.5073 Soit a et b deux nombres réels vérifiant l'égalité ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs des réels a et b .

E.8629 Soit a et b deux nombres réels vérifiant l'égalité ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs des réels a et b .

E.5074 Soit a , b et c sont trois nombres réels réalisant l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs des réels a , b et c .

E.8630 Soit a , b et c sont trois nombres réels vérifiant l'égalité :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer la valeur de ces réels.

E.5075 Soit a , b et c solutions de l'équation :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'ensemble des triplets $(a; b; c)$ solutions de cette équation.

E.8631 Soit a , b et c sont trois nombres réels solutions de l'équation :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'ensemble des triplets $(a; b; c)$ solutions de cette équation.

7. Distributivité

E.5078 On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1 Calculer : $A+B$.

2 a) Calculer : $(A+B)^2$

b) Calculer : $A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$

3 En tenant compte des propriétés algébriques du produit matriciel, donner le développement de l'expression $(A+B)^2$.

E.5098    Soit A une matrice carrée d'ordre n et la matrice unité I_n d'ordre n .

① Développer les expressions suivantes :

(a) $(2 \cdot A + I_n) \cdot (I_n - A)$ (b) $(A + 2 \cdot I_n)^2$

② Calculer chacune de ces deux expressions dans le cas où :

$$n=2 \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

E.5099    Soit A et B deux matrices d'ordre n dont le produit est commutatif.

① Développer les expressions suivantes :

(a) $(A + 2 \cdot B) \cdot (B - A)$ (b) $(2 \cdot A - B)^2$

② Dans le cas d'ordre 2, calculer les deux expressions précédentes avec les deux matrices ci-dessous dont le produit est commutatif :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Puissances n -ième de matrices

E.8625    On considère la matrice : $A =$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

① Déterminer la matrice A^2 .

② En déduire l'expression de A^{101} .

E.8624    On considère la matrice : $A =$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

① Déterminer les matrices A^2 et A^3 .

② En déduire l'expression de A^{50} .

E.3745    On considère les deux matrices A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

E.6824     On définit les matrices A , B et M par :

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \quad ; \quad M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

① Démontrer que : $M = A + 0,5 \cdot B$

② Vérifier que $A^2 = A$, et que : $A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

③ Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n strictement positif : $A^n = A$

On admet que, pour tout entier naturel n strictement positif : $B^n = B$.

④ Démontrer que, pour tout entier naturel n : $M^n = A + 0,5^n \cdot B$.

① Déterminer le carré de chacune de ces matrices.

② Pour tout entier naturel n , déterminer une expression de A^n et une expression de B^n .

E.5100    On considère la matrice : $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

① Établir l'égalité : $A^3 = -8 \cdot I_2$.

② En déduire l'expression de A^{11} .

E.6069     On considère les deux matrices A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = k \cdot A \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Pour quelles valeurs de k la matrice B vérifie l'égalité : $B^2 = B$

9. Puissances n -ième de matrices, cyclicité et congruence

E.5129    On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de la puissance n -ième de la matrice A .

E.5126    On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non nul.

E.8621    On considère les matrices A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- ① Déterminer les carrés des matrices A et B .
- ② Pour tout entier naturel n , déterminer une expression de A^n et une expression de B^n .

E.8622    On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de la puissance n -ième de la matrice A .

E.5127    On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non-nul.

E.8623    On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de la puissance n -ième de la matrice A .

E.5145    On considère la matrice A carrée de dimension 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

- ① Établir que : $A^3 = 2 \cdot I_3$.
- ② Donner une expression de A^n pour tout entier naturel n .

E.5128    On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non-nul.

10. Puissances n -ième de matrices et raisonnement par récurrence

E.5082    On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Établir, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E.8626    Montrer que pour tout entier naturel non-nul n , on a :

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

E.5115    On considère la suite A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 ; \quad u_{n+1} = u_n + 2^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Établir que pour tout entier naturel n non-nul, on a l'égalité :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Indication : on utilisera : $A^{n+1} = A \cdot A^n$

E.7364     On considère la matrice B carrée d'ordre 3 définie par :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la relation :

$$B^n = B^2$$

E.5083    On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Établir, que pour tout entier naturel n : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$

E.6100     Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 4 - 2^{n+2} \\ 3 \times 2^n - 3 & 4 - 3 \times 2^n \end{pmatrix}$$

E.8627    Montrer que pour tout entier naturel non-nul n , on a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} & 2^{2n} \\ 2^{2n-2} & 2^{2n-1} \end{pmatrix}$$

E.8628    Montrer que pour tout entier naturel non-nul n , on a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -2 \times (-1)^n & -3 \times (-1)^n \\ 2 \times (-1)^n & 3 \times (-1)^n \end{pmatrix}$$

E.6826     On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

① On appelle I la matrice identité d'ordre 2.

Vérifier que : $A^2 = A + 2 \cdot I$

- ② En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme $\alpha \cdot A + \beta \cdot I$ où α et β sont des réels.
- ③ On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2 \cdot r_n \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$A^n = r_n \cdot A + s_n \cdot I$$

11. Matrice inverse

E.5094   

Définition : soit n un entier naturel non-nul et A et B deux matrices carrées d'ordre n .

On dit que la matrice B est **la matrice inverse de la matrice A** si : $A \cdot B = I_n$; $B \cdot A = I_n$

On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- ① Déterminer les matrices des produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$.
- ② Que peut-on dire des matrices A et B ?

E.5095    On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- ① Déterminer les produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$.
- ② Que peut-on dire des matrices A et B ?

E.5096    On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- ① Déterminer les produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$.
- ② En déduire la matrice inverse de la matrice A .

12. Matrice inverse et expressions algébriques

E.5116    On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- ① **a** Déterminer la matrice $A^2 + A$.
- b** Exprimer la matrice inverse de A en fonction A et de I_3 .
- ② En déduire la matrice inverse de la matrice A .

E.5117    On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- ① **a** Déterminer la matrice $A^2 - 3 \times A$.
- b** Exprimer la matrice inverse de A en fonction de A et de I_3 .
- ② En déduire la matrice inverse de la matrice A .

E.6871    On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

- ① **a** Déterminer la matrice A^2 .
- b** Déterminer la matrice $A^2 - 2 \cdot A$.
- c** En déduire une expression de la matrice inverse de la matrice A en fonction de A et de I_3 .
- ② En déduire la matrice inverse de la matrice A .

E.6825     On donne les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1 Déterminer la matrice M^2 .

$$\text{On donne : } M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

- 2 Vérifier que : $M^3 = M^2 + 8 \cdot M + 6 \cdot I_3$

- 3 En déduire que M est inversible et que :

$$M^{-1} = \frac{1}{6} \cdot (M^2 - M - 8 \cdot I_3)$$

- 4 En déduire la matrice inverse de la matrice M .

13. Matrice inverses de matrices d'ordre 2

E.8634   

Définition :

On considère A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On appelle **déterminant de la matrice A** , noté **det(A)**, le nombre : $\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$

Déterminer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

E.5097   

Proposition :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La matrice A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

$$\text{On a alors : } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$\text{a } \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b } \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

E.6828    Établir que chacune des matrices ci-dessous sont inversibles et déterminer l'expression de leurs matrices inverses :

$$\text{a } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

E.8633    Déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$\text{a } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{c } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

E.5112   

- 1 Soit n un entier naturel non-nul. On considère A et B deux matrices carrées d'ordre n inversible et λ un nombre réel non-nul.

- a Montrer que le produit $A \cdot B$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.
b Montrer que la matrice $\lambda \cdot A$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.

- 2 On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que la relation suivante est fausse :
 $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$