

1. Propriétés des nombres premiers

E.3363 Préciser si les entiers suivants sont premiers ou non :

- (a) 37 (b) 127 (c) 541 (d) $2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1$

E.4279 Établir que pour tout entier naturel k ($2 \leq k \leq n$), l'entier $n! + k$ n'est pas un entier premier.

E.6771 Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n .

- Vérifier que : $S(6) = 12$ et calculer $S(7)$.
- (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $S(n) \geq 1 + n$
(b) Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n) = 1 + n$?

E.6924 Ci-dessous est donnée une fonction d'un algorithme suivant où $\text{MOD}(N, k)$ représente le

reste de la division euclidienne de N par k .

```

Fonction f(a)
  k ← 2
  Tant que MOD(a;k) ≠ 0 et k ≤ √a
    k ← k+1
  Fin Tant que
  Si k > √a
    Alors Renvoyer 0
  Sinon
    Alors Renvoyer 1
  Fin Si
  
```

- Quelle est la valeur de k lorsque cette fonction est appelée avec pour paramètre $a=127$? Et si on saisit $a=119$?
- Que peut-on dire de l'entier a passé en paramètre lorsque la valeur renvoyée par la fonction f est 0? Justifier votre réponse.

2. Factorisation et nombres premiers

E.3620 Soit $a \in \mathbb{N}$, considérons l'expression :
(E) : $a^4 - 3a^2 + 1$

- Établir l'égalité suivante :
 $a^4 - 3a^2 + 1 = (a^2 - a - 1) \cdot (a^2 + a - 1)$
- (a) Résoudre les équations suivantes :
 $a^2 - a - 1 = 1$; $a^2 + a - 1 = 1$
(b) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a , l'expression (E) définit un entier premier.

E.3621 Pour a un entier naturel, on considère l'expression :
(F) : $a^3 - 5a$

Justifier que l'entier (F) ne peut pas être un entier premier.

E.8614 Pour a un entier naturel, on considère l'expression :
(E) : $a^3 - 5a^2 + 7a$

- Exprimer (E) sous la forme d'un produit d'un polynôme de degré un et d'un polynôme de degré deux.
- Déterminer les valeurs de a pour lesquelles l'expression (E) définit un entier premier.

E.3633
1 Soit x un nombre réel.

- (a) Montrer que : $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$
(b) En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficient entiers.
- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux entiers suivants :
 $A = n^2 - 2n + 2$; $B = n^2 + 2n + 2$
(a) Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
(b) Montrer que, tout diviseur de A qui divise également n est un diviseur du nombre 2.
(c) Montrer que, tout diviseur commun de A et de B , divise $4n$.

E.3668

- Soit x et p étant deux entiers naturels, calculer la somme :
 $1 - x + x^2 - \dots + (-1)^p \cdot x^p$
- (a) Démontrer que, quels que soient les entiers naturels x et n , l'entier $x^{2n+1} + 1$ est multiple de $x + 1$.
(b) On remarquera que si k est impair alors $(2^q)^k + 1$ est divisible par $2^q + 1$.
- Soit m un entier naturel. Démontrer l'hypothèse " m est une puissance de 2" est une condition nécessaire pour que $2^m + 1$ soit un entier premier.

3. Nombres premiers et congruence

E.3619 Soit p un entier premier supérieur ou égal à 5.

- Justifier que l'entier p vérifie l'une des deux conditions suivantes :
 $p \equiv 1 \pmod{6}$; $p \equiv 5 \pmod{6}$

- Justifier que l'entier $p^2 - 1$ est divisible par 24.

E.3624     On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

“Les entiers dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers?”

Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose $N_p = 1...1$ où 1 apparaît p fois. On rappelle dès lors que :

$$N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10^0.$$

- 1 Les entiers $N_2=11$, $N_3=111$, $N_4=1111$ sont-ils premiers?
- 2 Prouver que $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9?
- 3 On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.

On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

- a On suppose que p est pair et on pose $p=2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_2=11$.
- b On suppose que p est un multiple de 3 et on pose $p=3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_3=111$.
- c On suppose p non premier et on pose $p=k \cdot q$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1. En déduire que N_p est divisible par N_k .
- 4 Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier. Cette condition est-elle suffisante?

4. PGCD et décomposition en produit de facteurs premiers

E.8610   

- 1 Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres 1764 et 198.
- 2 En déduire le PGCD des nombres 1764 et 198.

E.282   

Définition : deux entiers sont dits **premiers entre eux**, si l'entier 1 est le seul diviseur commun à ces deux nombres.

Proposition : deux entiers sont premiers entre eux si, et seulement si, leur PGCD a pour valeur 1.

- 1 Déterminer le PGCD des différents couples d'entiers :
a (15 ; 21) b (18 ; 28) c (15 ; 22)
- 2 Déterminer si les deux entiers 56 et 45 sont premiers entre eux

E.3721    Dans chaque cas, à l'aide de la dé-

composition en produits de facteurs premiers, déterminer le PGCD du couple $(a ; b)$ d'entiers :

- 1 $a = 35 \times 21$; $b = 36 \times 25$
- 2 $a = 6^2 \times 12$; $b = 21^4 \times 15^2$
- 3 $a = 35\,280^{201}$; $b = 6\,804^{131}$

E.256   

- 1 Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des deux entiers suivants :

$$\text{a } 36 \times 26 \quad \text{b } 12 \times 21$$

- 2 En déduire le PGCD de 936 et 252.
- 3 Réduire la fraction : $\frac{936^4}{252^5}$

E.3723    Soit n un entier naturel inférieur à 120. Déterminer l'ensemble des valeurs de n tels que :

$$\text{pgcd}(n ; 120) = 6$$

5. Propriété caractéristique du PGCD

E.3724    Déterminer l'ensemble des couples $(m ; n)$ d'entiers naturels tels que :

$$\text{pgcd}(m ; n) = 6 \quad ; \quad m + n = 72$$

E.6022     Déterminer l'ensemble des couples $(m ; n)$ d'entiers naturels vérifiant le système :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} m^2 - n^2 = 5440 \\ \text{pgcd}(m ; n) = 8 \end{cases}$$

E.5344    Dans le système d'équation ci-dessous, les entiers x et y ci-dessous représentent des entiers naturels où $x < y$:

$$\begin{cases} x \cdot y = 135 \\ \text{pgcd}(x ; y) = 3 \end{cases}$$

Résoudre ce système d'équations.

6. PGCD et diviseurs

E.3715     On désigne par p un entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n

l'entier : $A_n = 2^n + p$.

On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1} .

- ① Montrer que d_n divise 2^n .
- ② Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p . Justifier.

E.6021     Soit n un entier relatif.

- ① On note d le PGCD des entiers $9n+4$ et $2n-1$. Justifier que d divise 17.
- ② Établir l'équivalence suivante :

$$n \equiv 9 \pmod{17} \iff \text{pgcd}(9n+4; 2n-1) = 17$$

E.6076    Pour tout entier naturel n , on considère les deux entiers α et β définis par : $\alpha = 2n+1$; $\beta = n+3$

On note d le PGCD des entiers α et β : $d = \text{pgcd}(\alpha; \beta)$

- ①  Justifier que l'entier d est un diviseur de 5.

7. Réduction du PGCD

E.3722   

Proposition : (lemme pour l'algorithme d'Euclide) soit a et b deux entiers relatifs non-nuls et pour tout entier relatif k tels que $a+k \cdot b$ soit non-nul, on a :

$$\text{pgcd}(a; b) = \text{pgcd}(a+k \cdot b; b)$$

- ① Déterminer le PGCD de deux entiers naturels pairs consécutifs.
- ② Déterminer le PGCD de deux entiers naturels impairs consécutifs.

E.3720     Pour tout entier naturel n non nul, on considère les entiers :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1 \quad ; \quad b_n = 2 \times 10^n - 1 \quad ; \quad c_n = 2 \times 10^n + 1$$

- ① Calculer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ et c_3 .
- ② Combien les écritures décimales des entiers a_n et c_n ont-elles de chiffres ?
Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.
- ③ Montrer, en utilisant la liste des entiers premiers, inférieurs à 100, donnée ci-dessous, que b_3 est premier.
- ④ Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$b_n \times c_n = a_{2n}.$$
 En déduire une décomposition en produit de facteurs premiers de a_6 .
- ⑤ Montrer que : $\text{pgcd}(b_n; c_n) = \text{pgcd}(c_n; 2)$.
En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

Liste des entiers premiers inférieurs à 100 :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23
 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59
 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97

E.5300     On considère deux entiers na-

 Quelles peuvent être les valeurs possibles de d ?

- ② Établir l'équivalence suivante :
 α et β sont des multiples de 5 $\iff n-2$ est multiple de 5.

E.4272    Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$A(n) = n^4 + 1$$

- ① Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
- ② Montrer que, quel que soit l'entier n , $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
- ③ Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n .
- ④ Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:

$$n^8 \equiv 1 \pmod{d}$$

turels x et y .

Montrer que si x et y sont premiers entre eux alors il en est de même pour les entiers $2x+y$ et $5x+2y$.

E.5729    On considère les deux entiers :
 $A = 10n+7$ et $B = 2n+1$.

- ① Déterminer les entiers réels a et b vérifiant l'égalité :

$$\frac{10n+7}{2n+1} = a + \frac{b}{2n+1}$$
- ② Justifier que les entiers A et B sont premiers entre eux.

E.6025    

- ①  En supposant que $a = 9p+4q$ et $b = 2p+q$, démontrer que les entiers a et b d'une part ; p et q d'autre part ont le même PGCD.
-  Démontrer que les entiers $9p+4$ et $2p+1$ sont premiers entre eux.

- ② Déterminer le PGCD des entiers relatifs $9p+4$ et $2p-1$ en fonction des valeurs de p .

E.5305     Soit k un élément de $\mathbb{Z}$.

- ① Démontrer que les entiers $2k+1$ et $9k+4$ sont premiers entre eux.
- ②  Démontrer que le PGCD des entiers $2k-1$ et $9k+4$ est nécessairement 1 ou 17.
-  Établir l'affirmation suivante :

$$\text{pgcd}(2k-1; 9k+4) = 17 \iff k \equiv 9 \pmod{17}$$

E.8823    On considère la suite (F_n) de Fibonacci définie par :

$$F_0 = 0 \quad ; \quad F_1 = 1 \quad ; \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{pour tout } n \neq 2$$

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, les entiers F_{n+1} et F_n sont premiers entre eux.

8. Propriété d'homogénéité du PGCD

E.5297   **Proposition:** (propriété d'homogénéité)Pour tout nombre relatif a, b, k non-nuls, on a :

$$\text{pgcd}(k \cdot a ; k \cdot b) = k \cdot \text{pgcd}(a ; b)$$

Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que :

9. PGCD et ensemble des diviseurs communs

E.12   

Proposition: soit a et b deux nombres relatifs non-nuls. L'ensemble des diviseurs commun à a et à b est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD.

- ① Effectuer la décomposition en facteurs premiers des nom-

$$\text{pgcd}(a ; b) = d \quad ; \quad \text{pgcd}(a+b ; ab) = d'$$

Montrer que d est un diviseur de d' .E.6023     Soit a et b deux entiers naturels avec $a > b$. Montrer l'équivalence :

$$\frac{a}{b} \text{ est irréductible} \iff \frac{a-b}{a \cdot b} \text{ est irréductible.}$$

bres suivants :

$$27 \times 90 \quad ; \quad 20 \times 21$$

- ② Déterminer le PGCD des entiers 2430 et 420.
 ③ Donner l'ensemble de diviseurs commun à ces deux entiers.

10. Identité et Théorème de Bézout

E.4284   **Proposition:** (Identité de Bézout)Soient a et b deux entiers relatifs. Si d est le PGCD de a et de b alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

$$u \cdot a + v \cdot b = d$$

Théorème de Bézout :Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si, et seulement, s'il existe deux entiers relatifs tels que :

$$u \cdot a + v \cdot b = 1$$

En utilisant le théorème de Bézout, montrer que les couples ci-dessous définissent un couple d'entiers premiers entre eux :

- a) (10 ; 3) b) (15 ; 11) c) (5 ; 17)

E.6926     On considère l'équation diophantienne $x^2 - 8 \cdot y^2 = 1$ où x et y désignent deux entiers relatifs.

- ① Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solutions de (E).
 ② Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x ; y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

E.3776    

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie :

Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n+1$ sont premiers entre eux.E.5303    Soit n un entier relatif. On définit la valeur des entiers a et b en fonction de celle de n par :

$$a = 3n - 1 \quad ; \quad b = -2n + 1$$

Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux quelle que soit la valeur de l'entier naturel n .

bres suivants :

$$27 \times 90 \quad ; \quad 20 \times 21$$

- ② Déterminer le PGCD des entiers 2430 et 420.
 ③ Donner l'ensemble de diviseurs commun à ces deux entiers.

E.3750    Soit n un entier relatif. On définit la valeur des entiers a et b en fonction de celle de n par :

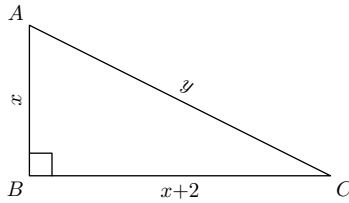
$$a = 6n + 1 \quad ; \quad b = 9n + 1$$

Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux quelle que soit la valeur de l'entier naturel n .E.5308    Établir que, quelle que soit la valeur de n , les deux entiers $n+3$ et $-2n^2 - n + 14$ sont premiers entre eux.E.4291     Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse :“S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a \cdot u + b \cdot v = 2$ alors le PGCD de a et de b est égal à 2.”

E.9480



On considère le triangle ABC rectangle en B , représenté ci-dessous, tel que $BC = AB + 2$ et ses mesures soient entières :



On modélise la situation en notant $AB = x$ et $AC = y$.

- 1 a Exprimer y^2 en fonction de x sous la forme d'une expression développée et réduite.

b En déduire que l'entier y est pair.

- 2 a Justifier que $2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 4$ est un multiple de 4.

b En déduire que l'entier x est pair.

- 3 Compléter l'algorithme ci-dessous nous donnant les valeurs de x et de y (avec $y < 1000$) réalisant les dimensions de ce triangle :

```
import math
for x in range(...):
    y=math.sqrt(...)
    if math.floor(...)==...:
        print(x,y)
```

11. Application du théorème de Bezout

E.6927



À chaque lettre de l'alphabet, on associe grâce au tableau ci-dessous un entier compris entre 0 et 25 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

- **Étape 1 :** à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
- **Étape 2 :** on calcule l'entier x' défini par les relations :

$$x' \equiv 9 \cdot x + 2 \pmod{26} \quad ; \quad 0 \leq x' \leq 25$$
- **Étape 3 :** à l'entier x' , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

- 1 Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J .
- 2 Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9 \cdot u + 26 \cdot v = 1$. Donner sans justifier un couple $(u; v)$ qui convient.
- 3 Démontrer que :

$$x' \equiv 9 \cdot x + 2 \pmod{26} \text{ équivaut à } x \equiv 3 \cdot x' + 20 \pmod{26}.$$

- 4 Décoder la lettre R .

E.3772



Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$A(n) = n^4 + 1$$

- 1 Étudier la parité de l'entier $A(11)$.
- 2 Montrer que, quel que soit l'entier n , $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
- 3 Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n .
- 4 Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:
- $$n^8 \equiv 1 \pmod{d}$$

E.6024



Soit n un entier naturel, on pose :

$$a = 2n + 8 \quad ; \quad b = 3n + 15$$

On note d le PGCD de a et de b .

- 1 Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d divise 6.
- 2 On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers naturels n pour lesquels $d = 6$. C'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{S}$ est défini par :

$$\mathcal{S} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{pgcd}(2n+8; 3n+15) = 6\}$$

- a Montrer que si $n \in \mathcal{S}$ alors il existe un entier k tel que :

$$n = -4 + 3 \cdot k.$$

- b En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$.

E.5828



On pose : $u = 2 + \sqrt{3}$ et $v = 2 - \sqrt{3}$.

- 1 Démontrer par récurrence que, n désignant un entier positif, on peut écrire :

$$u^n = a_n + b_n \cdot \sqrt{3} \quad ; \quad v^n = a_n - b_n \cdot \sqrt{3}$$

où a_n et b_n sont des entiers positifs.

Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

- 2 Établir les égalités :

$$a_n^2 - 3 \cdot b_n^2 = 1 \quad ; \quad a_n \cdot b_{n+1} - a_{n+1} \cdot b_n = 1$$

En déduire que les fractions $\frac{a_n}{b_n}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ sont irréductibles.

E.3261     On désigne par p un entier premier supérieur ou égal à 7.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n=p^4-1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

- 1 Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3
En déduire que n est divisible par 3.
- 2 En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2-1=4\cdot k\cdot(k+1)$, puis, que n est divisible par 16.

12. Théorème de Gauss

E.8615   

Théorème de Gauss :

Soit a, b, n trois entiers relatifs non-nuls tels que n divise $a\cdot b$.

Si n est premier avec a alors il divise b .

Déterminer l'ensemble des couples $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de l'équation : $12\cdot x = 13\cdot y$

E.4285     Soient a et b deux entiers relatifs.

- 1 Montrer que si $a\cdot b \equiv 0 \pmod{47}$ alors $a \equiv 0 \pmod{47}$ ou $b \equiv 0 \pmod{47}$.
- 2 En déduire que si $a^2 \equiv 1 \pmod{47}$ alors $a \equiv 1 \pmod{47}$ ou $a \equiv -1 \pmod{47}$.

E.3573     On considère le système de congruence :

$$(S) : \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

où n désigne un entier relatif.

- 1 Montrer que 11 est solution de (S) .
- 2 Montrer que si n est solution de (S) alors $n-11$ est divisible par 3.
- 3 Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11+15\cdot k$, où k désigne un entier relatif.

E.5299     On considère l'équation (E) définie par :

$$(E) : 17x - 15y = 3$$

où l'ensemble de résolution est l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers relatifs.

Démontrer que, pour tout couple $(x; y)$ solution de (E) , x est un multiple de 3.

E.3791     Soit x et y deux entiers vérifiant l'égalité :

$$y\cdot(y-x) = x\cdot(2-x)$$

On suppose que l'entier x est un entier premier.

- 1 Démontrer que l'entier x divise y .
- 2 On pose $y=k\cdot x$ avec $k \in \mathbb{Z}$:
 - a Montrer que x divise 2, puis, que $x=2$.
 - b En déduire les valeurs possibles de k .

3 En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n .

4 a Soient a, b et c trois entiers naturels.
Démontrer que si a divise c et b divise c , avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c .

b Déduire de ce qui précède que 240 divise n .

5 Existe-t-il quinze entiers premiers $p_1, p_2, \dots, p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier :

$$A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$$

soit un entier premier?

E.3718     Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie :

Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}^{10}$

Si N est divisible par 7 alors $a+b$ est divisible 7.

E.3775     Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque.

Exemples d'éléments de (E) : 2002 ; 3773 ; 9119.

- 1 Montrer que :
" n est divisible par 3 équivaut à $a+b$ est divisible par 3"
- 2 Montrer que :
" n est divisible par 7 équivaut à b est divisible par 7"

E.3716     On se propose d'étudier des couples $(a; b)$ d'entiers strictement positifs, tels que :

$$a^2 = b^3$$

Soit $(a; b)$ un tel couple. On note $d = \text{pgcd}(a; b)$ et u, v les deux entiers naturels vérifiant :

$$a = d\cdot u \quad ; \quad b = d\cdot v.$$

- 1 Montrer que : $u^2 = d\cdot v^3$.
- 2 En déduire que v divise u , puis, que $v=1$.
- 3 Soit $(a; b)$ un couple d'entiers strictement positifs.
Démontrer que l'on a $a^2=b^3$ si, et seulement si, a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

E.5298     On souhaite déterminer l'ensemble des couples $(a; b)$ d'entiers naturels non-nuls solutions de l'équation :

$$a^2 - 3\cdot a\cdot b + b^2 = 0$$

On suppose l'existence d'un couple $(a; b)$ solution de cette équation :

- 1 Justifier l'existence d'entiers naturels a' et b' premiers entre eux vérifiant l'égalité :
 $a'^2 - 3\cdot a'\cdot b' + b'^2 = 0$
- 2 Montrer que a' divise b'^2 , puis, que a' divise b' .
- 3 Établir que b' vérifie la relation : $1-3b'+b'^2 = 0$.
- 4 Conclure.

E.4273     Soit $(x; y; z)$ un triplet solution des deux équations suivantes :

$$z = (x - y)^2 \quad ; \quad z = x \cdot y$$

- 1 Montrer que si $x=0$, alors le triplet $(x; y; z)$ a pour valeur $(0; 0; 0)$.
- 2 On suppose dorénavant que l'entier x n'est pas nul.
 - a Montrer que les entiers x, y, z vérifient :

$$x^2 - 3 \cdot x \cdot y + y^2 = 0$$

En déduire qu'il existe alors des entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que :

$$x'^2 - 3 \cdot x' \cdot y' + y'^2 = 0$$

- b Montrer que x' divise y'^2 , puis, que x' divise y' .
- c Établir que y' vérifie la relation ; $1 - 3 \cdot y' + y'^2 = 0$
- d Conclure.

13. Corollaire A du théorème de Gauss

E.4281  

Corollaire : (du théorème de Gauss)

Soit a, b, c trois entiers relatifs non-nuls tels que a divise c et que b divise c .

Si les entiers a et b sont premiers entre eux alors le produit $a \cdot b$ divise c .

On considère le polynôme $A = n^3 - 6 \cdot n^2 - n + 6$ où $n \in \mathbb{Z}$.

- 1 Établir la factorisation :

$$A = (n - 6)(n - 1)(n + 1)$$
- 2 a Établir que pour tout entier relatif n , l'entier A est divisible par 2.
- b Établir que pour tout entier relatif n , l'entier A est

divisible par 3.

- c En déduire que pour tout entier relatif n , l'entier A est divisible par 6.

E.8616   On considère le polynôme $A = n^3 - 3 \cdot n^2 + n - 6$ où $n \in \mathbb{Z}$.

- 1 Établir la factorisation : $A = (n - 3)(n^2 + 2)$
- 2 Prouver que l'entier A est divisible par 6 pour tout $n \in \mathbb{Z}$

E.8618   Pour tout entier naturel n , on définit l'entier a par :

$$a = n \cdot (2n + 1)(7n + 1)$$

- 1 Justifier que l'entier a est pair.
- 2 Justifier que l'entier a est divisible par 6.

14. Corollaire B du théorème de Gauss

E.8617  

Corollaire : (du théorème de Gauss)

Soit a, b, c trois entiers relatifs non-nuls.

Si a et b sont premiers entre eux et si a et c sont premiers entre eux alors a est premiers avec le produit $b \cdot c$.

Ce qui peut se traduire par :

$$\left. \begin{array}{l} \text{pgcd}(a; b) = 1 \\ \text{pgcd}(a; c) = 1 \end{array} \right\} \implies \text{pgcd}(a; b \cdot c) = 1$$

On considère le polynôme $6 \cdot n^3 - 7 \cdot n^2 - 5 \cdot n + 1$ où $n \in \mathbb{Z}$.

- 1 Établir la factorisation : $A = (6 \cdot n - 1)(n^2 - n - 1)$
- 2 Établir que pour tout entier relatif n , l'entier A n'est pas divisible par 6.

15. Corollaire C du théorème de Gauss

E.3595    

Corollaire : (du théorème de Gauss)

Soit a, b, c trois entiers relatifs non-nuls tels que p soit un entier premier.

Si p divise le produit $a \cdot b$ alors p divise a ou p divise b .

Soient a et b deux entiers relatifs.

- 1 Montrer que :

$$\text{Si } a \cdot b \equiv 0 \pmod{47} \text{ alors } \begin{cases} a \equiv 0 \pmod{47} \\ \text{ou} \\ b \equiv 0 \pmod{47} \end{cases}.$$

- 2 En déduire que :

$$\text{Si } a^2 \equiv 1 \pmod{47} \text{ alors } \begin{cases} a \equiv 1 \pmod{47} \\ \text{ou} \\ a \equiv -1 \pmod{47} \end{cases}.$$

E.4324     On considère l'équation :
 $(F) : 11 \cdot x^2 - 7 \cdot y^2 = 5$ où x et y sont des entiers relatifs.

- 1  Démontrer que si le couple $(x; y)$ est solution de (F) , alors :

$$x^2 \equiv 2 \cdot y^2 \pmod{5}$$
- b Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					
Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2 \cdot y^2$ par 5?

- c En déduire que si le couple $(x; y)$ est solution de (F) , alors x et y sont des multiples de 5.
- 2 Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x; y)$ n'est pas solution de (F) .
 Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

E.4306     On considère l'équation (E) sur les triplets $(x; y; z)$ définie par : $x^2 + y^2 = \frac{5}{2} \cdot z^2$

Considérons un triplet $(x; y; z)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E) :

- 1 Vérifier que le triplet $A(1; 3; 2)$ est solution de (E) .
- 2 Démontrer que z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10.
- 3 Supposons que $y=3$, montrer alors l'équivalence suivante : $x^2 \equiv 1 \pmod{10}$
- 4 Déterminer un triplet $(x; y; z)$ à valeur entières solutions de (E) où y est un entier impair.

E.6019     Soit a et b deux entiers naturels dont la somme et le produit ont pour PGCD le carré d'un entier premier p .

- 1 Montrer que p^2 divise a^2 .
(on pourra remarquer que $a^2 = a \cdot (a+b) - a \cdot b$).
 En déduire que p divise a . Montrer que p divise b .
- 2 Démontrer que le PGCD de a et b est, soit p , soit p^2 .

E.5286     Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que :
 $\text{pgcd}(a+b; ab) = p$
 où p est un entier premier.

- 1 Démontrer que p divise a^2 .
(On remarquera que : $a^2 = a(a+b) - ab$)
- 2 En déduire que p divise a .
 On constate donc, de même que p divise b .
- 3 Démontrer que : $\text{pgcd}(a; b) = p$.

16. Théorème de Bezout et de Gauss

E.5304    

- 1 Déterminer l'ensemble U des entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $2n-1$.
- 2 Montrer que pour tout entier relatif, les entiers $n+2$ et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux.
- 3 Déterminer l'ensemble V des entiers relatifs $n \neq -2$ tels que $\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ soit un entier relatif.

E.4058    Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et a un entier naturel non-nul tel que a et p sont premiers entre eux :

- 1 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier n non-nul, les entiers a^n et p sont premiers entre eux.
- 2 Établir l'existence d'un entier naturel n non-nul tel que :

$$a^n \equiv 1 \pmod{p}$$

17. Equation diophantienne

E.6098    

- 1 Démontrer que le couple $(-2; 17)$ est solution de l'équation : $12x+31y=503$
- 2 En déduire que :
Si un couple d'entiers relatifs $(x; y)$ est solution de l'équation $12x+31y=503$ alors le couple vérifie la relation $12 \cdot (x+2) = 31 \cdot (17-y)$
- 3 Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de l'équation : $12x+31y=503$

E.6929     On considère l'équation :
 $51 \cdot x - 26 \cdot y = 1$
 où x et y sont deux entiers relatifs.

- 1 Justifier, en énonçant un théorème du cours, que cette équation admet au moins un couple de solution.
- 2  Donner un couple solution $(x_0; y_0)$ de cette équation.
-  Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

E.3752    On considère l'équation (E) définie par :

$$(E) : -7 \cdot x + 25 \cdot y = 1$$

- 1 Déterminer un couple trivial $(x; y)$ d'entiers solutions de l'équation (E).
- 2 En déduire l'ensemble des solutions entières de cette équation (E).

E.3790     On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

- 1 Donner une solution particulière de l'équation (E).
- 2 Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

E.4276     On considère l'équation (E) : $7 \cdot x - 6 \cdot y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

- 1 Donner une solution particulière de l'équation (E).
- 2 Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

E.8619    On considère l'équation (E) définie par

$$(E) : 135 \cdot x + 18 \cdot y = 9.$$

- 1 Déterminer un couple trivial $(x; y)$ d'entiers solutions de l'équation (E).
- 2 En déduire l'ensemble des solutions entières de l'équation (E).

E.4308     Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$, où x et y sont deux entiers relatifs, solutions de l'équation :

$$(E) : 2 \cdot x + 11 \cdot y = 7$$

E.6931     On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs : (E) : $7x - 3y = 1$

Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Son but est,

lors de son exécution pas à pas, de récupérer les valeurs prises par les variables a et b qui forment des couples solutions de l'équation (E) où $(a; b)$ est un couple d'entiers solution tel que : $-5 \leq a \leq 10$; $-5 \leq b \leq 10$.

```

Pour X variant de -5 à 10
  (1) ...
  (2) ...
    Alors (a; b) ← (X; Y)
  Fin Si
Fin Pour
Fin Pour

```

E.3476    Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

- 1 On considère l'équation notée (E) : $3x + 7y = 10^{2n}$ x et y sont des entiers relatifs.
 - a Déterminer un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tels que : $3u + 7v = 1$.
En déduire une solution particulière $(u_0; v_0)$ de l'équation (E).
 - b Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de (E).
- 2 On considère l'équation notée (G) : $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - a Montrer que : $100 \equiv 2 \pmod{7}$.
Démontrer que si $(x; y)$ est solution de (G) alors : $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$
 - b Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							
 - c Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

18. Cours

E.3384     Soient a , b et c trois entiers naturels.

Démontrer que si a divise c et b divise c , avec a et b premiers entre eux, alors $a \cdot b$ divise c .

E.6248     Le but de cette partie est de démontrer que l'ensemble des entiers premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

- 1 On suppose qu'il existe un nombre fini d'entiers premiers notés $p_1, p_2, \dots, p_n$.
On considère l'entier E produit de tous les entiers premiers augmentés de 1 :

$$E = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$$

Démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et que E est premier avec chacun des entiers $p_1, p_2, \dots, p_n$.

- 2 En utilisant le fait que E admet un diviseur premier, conclure.

E.6923     On désigne par a , b et c trois entiers naturels non nuls tels que : $\text{pgcd}(b; c) = 1$

Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

“Si b divise a et c divise a alors le produit $b \cdot c$ divise a ”

19. Exercices non-classés



Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

● **Proposition 1**

Pour tout entier naturel n , le chiffre des unités de n^2+n n'est jamais égal à 4.

● On considère la suite u définie, pour $n \geq 1$, par :

$$u_n = \frac{1}{n} \cdot \text{pgcd}(20; n)$$

Proposition 2 : la suite (u_n) est convergente.