

1. Système d'équations linéaires sans calculatrice

E.6173    On souhaite résoudre le système suivant :

$$(S): \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x + 2z = 7 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

1 a Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b Que peut-on dire des solutions de l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2 a Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

b En utilisant la question précédente, simplifier l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c Donner le triplet $(x; y; z)$ solution du système (S) d'équations.

E.6183    On considère les deux matrices A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1 Effectuer le produit matriciel : $A \cdot B$

2 On considère le système d'équations linéaires à trois inconnues :

$$(S): \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 2z = -1 \\ -2x + 3z = -1 \end{cases}$$

a Justifier que le système (S) admet pour ensemble de solution celui de l'équation matricielle :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b En déduire l'ensemble des solutions du système (S) .

E.6184    On considère les deux matrices A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

1 Effectuer le produit : $A \cdot B$

2 On considère le système ci-dessous de trois équations à trois inconnues :

$$(S): \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 3x + 6y - 4z = 13 \\ 2x + 5y - 3z = 11 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des triplets solutions de (S) .

E.6096     On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1 a Calculer la matrice $6 \cdot A - A^2$.

b En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1} , peut s'écrire sous la forme :

$$A^{-1} = \alpha \cdot I + \beta \cdot A,$$

où α et β sont deux réels que l'on déterminera.

c Établir que la matrice A^{-1} admet pour expression :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -5 \\ 3 & 4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

2 Proposer une résolution du système :

$$\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

2. Système d'équations linéaires avec calculatrice

E.6195    On considère le système (S) d'équations défini par :

$$(S): \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ -x - 2z = -4 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

1 À l'aide de la calculatrice, donner la matrice inverse de la matrice M où :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2 a On considère la matrice X définie par : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Donner les deux matrices A et B telle que l'équation matricielle $A \cdot X = B$ ait les mêmes solutions que le système (S) .

b) Donner l'ensemble des solutions du système (S).

E.6185   

1) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'inverse de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Résoudre le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = -4 \\ 3x - y - z = -5 \end{cases}$$

E.6186   

1) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'inverse de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y - 2z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

E.5113    On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1) À l'aide d'un logiciel de calcul matriciel, établir que la matrice A est inversible et donner la matrice inverse de la matrice A .

2) Résoudre le système d'équations suivant :

$$(S) : \begin{cases} x - 2y - 2z = 11 \\ -x + y + 2z = -9 \\ 2y - z = -3 \end{cases}$$

E.5114    Résoudre le système d'équations ci-dessous en utilisant un logiciel de calcul formel et les matrices :

$$(S) : \begin{cases} 3x - 3y - 2z = 0 \\ 3x + y + z = -2 \\ -2x + 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

E.8635    Résoudre le système d'équations ci-dessous en utilisant un logiciel de calcul formel et les matrices :

$$(S) : \begin{cases} 2x - 3y + z = -8 \\ -3x + 2y - 3z = 3 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

E.8636    Résoudre le système d'équations ci-dessous en utilisant un logiciel de calcul formel et les matrices :

$$(S) : \begin{cases} -x - 3y - 2z = -1 \\ -3x - 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y - z = -1 \end{cases}$$

E.8637    Résoudre le système d'équations ci-dessous en utilisant un logiciel de calcul formel et les matrices :

$$(S) : \begin{cases} -2x - 3y - 2z = 2 \\ -3x - 3y + 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$$

E.6208     Lors d'une campagne de marketing, l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80€ par stylo et 1,20€ par porte-clés distribué.

À la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540€.

On cherche le nombre s de stylos et le nombre c de porte-clés distribués.

1) Écrire un système traduisant cette situation.

2) Montrer que le système précédent est équivalent à :

$$R \cdot X = T \quad \text{où } R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$$

et X et T sont des matrices que l'on précisera.

3) Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

3. Système d'équations linéaires et modélisation

E.6207     L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$C(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 10 \quad \text{où } \begin{cases} a, b \text{ et } c \text{ sont des} \\ \text{nombres réels.} \end{cases}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

Justifier que le triplet $(a; b; c)$ est solution du système (S).

$$(S) : \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 27a + 9b + 3c = 17,4 \\ 125a + 25b + 5c = 73 \end{cases}$$

E.6215



L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$C(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 10 \quad \text{où } \begin{cases} a, b \text{ et } c \text{ sont des} \\ \text{nombre s réels.} \end{cases}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

On admet que le triplet $(a; b; c)$ est solution du système (S) .

$$(S) : \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 27a + 9b + 3c = 17,4 \\ 125a + 25b + 5c = 73 \end{cases}$$

On pose : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

- 1 a Écrire ce système sous la forme $M \cdot X = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.
- b On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet $(a; b; c)$ solution du système (S) .
- 2 En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites?

E.6110



L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$C(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 10$$

où a, b, c des nombres réels.

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

On admet que le triplet $(a; b; c)$ est solution du système (S) :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 27a + 9b + 3c = 17,4 \\ 125a + 25b + 5c = 73 \end{cases}$$

On pose : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

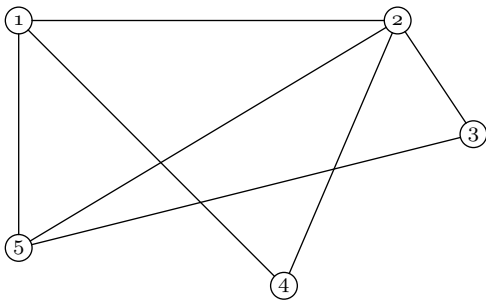
- 1 a Écrire ce système sous la forme $M \cdot X = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.
- b On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet $(a; b; c)$ solution du système (S) .
- 2 En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites?

E.6233



Un parc de loisirs propose à ses visiteurs des parcours d'accrobranches.

Les différents parcours sont modélisés par le graphe Γ ci-dessous où les sommets correspondent aux cinq arbres marquant leurs extrémités. Chaque parcours est représenté par une arête du graphe et peut être réalisé dans les deux sens.

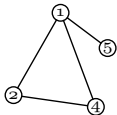


- 1 a Donner, sans justifier, le degré de chacun des sommets (la réponse pourra être présentée sous forme de tableau où les sommets seront mis dans l'ordre numérique).

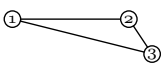
- b Donner la matrice M associée au graphe (les sommets seront mis dans l'ordre numérique).

- 2 Parmi les graphes ci-dessous, lesquels représentent un sous-graphe du graphe de départ :

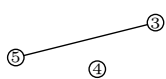
a



b

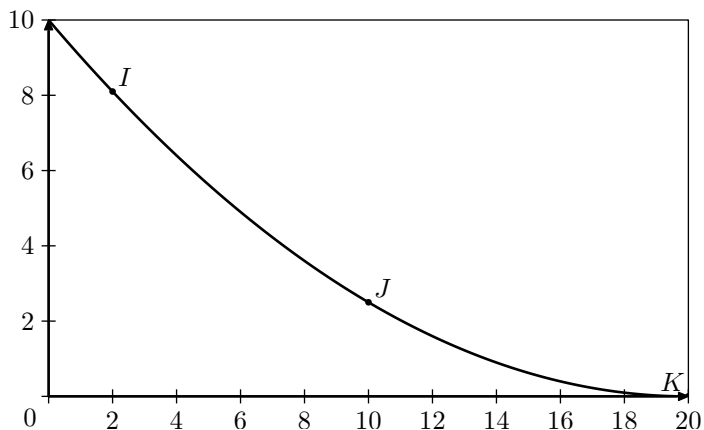


c



On ne justifiera sa réponse que dans le cas où on n'est pas en présence d'un sous-graphe.

- 3 On installe un toboggan géant sur l'arbre 4. La forme de ce toboggan est modélisée par une fonction f dont la courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Cette courbe passe par les points I , J et K de coordonnées respectives $(2; 8,1)$, $(10; 2,5)$ et $(20; 0)$.

La fonction f est définie sur $[0; 20]$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont trois nombres réels.

- a Justifier que a , b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} 400a + 20b + c = 0 \\ 100a + 10b + c = 2,5 \\ 4a + 2b + c = 8,1 \end{cases}$$

- b Déterminer les matrices X et V pour que le système précédent soit équivalent à :

$$U \cdot X = V \quad \text{où } U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- c Déterminer a , b et c .

E.6216



On considère la fonction f définie par le polynôme du troisième degré :

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 2 \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}$$

La fonction f admet les images suivantes :

$$f(-1) = -8 \quad ; \quad f(1) = 8 \quad ; \quad f(2) = 28$$

- 1 Écrire un système $(\mathcal{S})$ de trois équations et de trois inconnues dont le triplet $(a; b; c)$ est solution.

- 2 On note X la matrice colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

- a Exprimer deux matrices A et Y tel que l'équation $(\mathcal{E})$ matrice ci-dessous admet le même triplet solution du système $(\mathcal{S})$ d'équations :

$$(\mathcal{E}) : A \cdot X = Y.$$

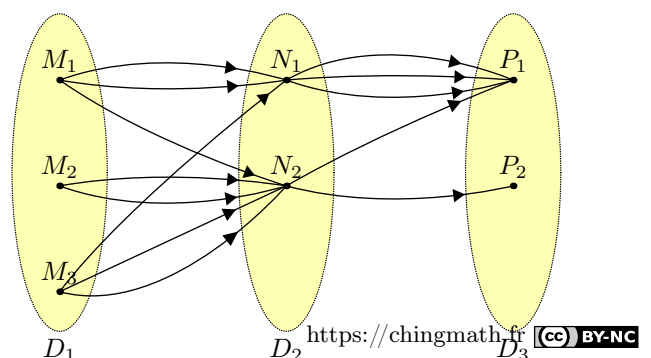
- b À l'aide de la calculatrice, donner le triplet solution de $(\mathcal{S})$.

4. Graphes et chemins de longueurs p

E.6156

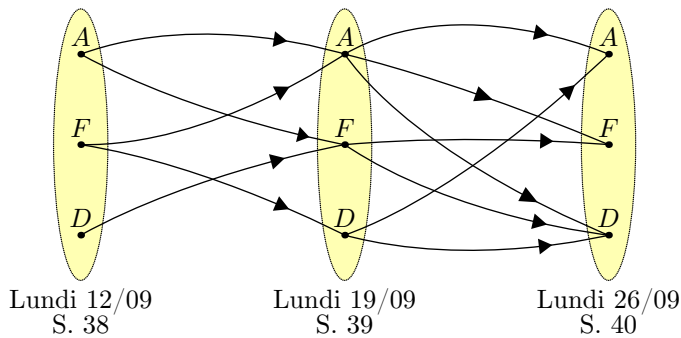


Le graphe ci-dessous représente les villes principales des départements D_1 , D_2 et D_3 et les axes routiers les reliant.



- 1 a Combien de chemins permettent de relier la ville M_1 à la ville P_1 ?
- b Combien de chemins permettent de relier la ville M_3 à la ville P_2 ?
- 2 a Donner la matrice $A=(a_{ij})$ où le coefficient a_{ij} représente "le nombre de routes reliant la ville M_i avec la ville N_j " pour $i \in \llbracket 1;3 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1;2 \rrbracket$.
- b Donner la matrice $B=(b_{ij})$ où le coefficient b_{ij} représente "le nombre de routes reliant la ville N_i avec la ville P_j " pour $i \in \llbracket 1;2 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1;2 \rrbracket$.
- 3 a Donner la matrice $C=(c_{ij})$ de dimension 3×2 obtenue par le produit de la matrice A par la matrice B .
- b Donner les valeurs des coefficients c_{11} et c_{32} .
- 4 Quelle conjecture peut-on émettre en comparant les résultats des questions 1 et 3?

E.6164 Trois amies Abondance, Fortune et Désirée (on les considèrera dans cet ordre tout au long de l'exercice) s'échangent chaque début de semaine leur produit de maquillage. Dans le graphe ci-dessous, est représenté les différentes possibilités d'échanges entre deux semaines :



- 1 a Combien de possibilités d'échanges permettent à Abondance de retrouver ses produits de maquillage en début de semaine 40?
- b Combien de possibilités d'échanges permettent à Fortune d'avoir, en semaine 40, les produits de maquillages d'Abondance en semaine 38?
- 2 a On note M la matrice représentant les échanges entre la semaine 38 et la semaine 39. Plus précisément, le coefficient m_{ij} représente le nombre de possibilités d'échanges au cours de la première semaine entre la $i^{\text{ème}}$ amie et la $j^{\text{ème}}$ amie.
- b On note N la matrice représentant les échanges au cours de la seconde semaine. Plus précisément, le coefficient n_{ij} représente le nombre d'échanges au cours de la seconde semaine entre la $i^{\text{ème}}$ amie et la $j^{\text{ème}}$ amie.
- 3 On note $P=(p_{ij})$ la matrice, carrée d'ordre 3, produit de la matrice M par la matrice N :
- a Donner la matrice C .
- b Donner les valeurs des coefficients p_{11} et p_{22} .
- 4 En comparant les résultats des questions 1 et 3 b, quelle conjecture peut-on émettre?

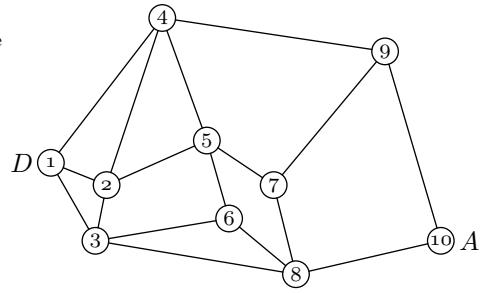
E.6341



Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux.

La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-dessous. Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables. Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.

1. Départ 2. Passerelle
3. Roche percée 4. Col des 3 vents
5. Pic rouge 6. Refuge
7. Col vert 8. Pont Napoléon
9. Cascade des anglais 10. Arrivée



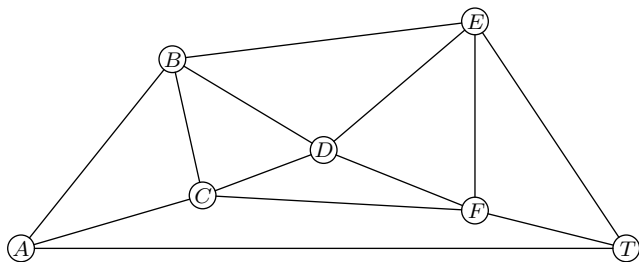
- 1 Donner un itinéraire allant de D à A passant par tous les sommets du graphe une seule fois, mais n'empruntant pas forcément tous les sentiers.
- 2 Existe-t-il un itinéraire allant de D à A utilisant tous les sentiers une seule fois? Justifier votre réponse.
- 3 On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique. On donne M^5 .

$$M^5 = \begin{pmatrix} 56 & 78 & 75 & 82 & 59 & 57 & 54 & 40 & 26 & 31 \\ 78 & 88 & 95 & 89 & 96 & 57 & 50 & 65 & 48 & 30 \\ 75 & 95 & 68 & 68 & 77 & 68 & 46 & 73 & 52 & 23 \\ 82 & 89 & 68 & 62 & 98 & 49 & 29 & 79 & 67 & 13 \\ 59 & 96 & 77 & 98 & 50 & 82 & 80 & 40 & 24 & 46 \\ 57 & 57 & 68 & 49 & 82 & 36 & 25 & 68 & 49 & 16 \\ 54 & 50 & 46 & 29 & 80 & 25 & 10 & 73 & 60 & 5 \\ 40 & 65 & 73 & 79 & 40 & 68 & 73 & 32 & 14 & 48 \\ 26 & 48 & 52 & 67 & 24 & 49 & 60 & 14 & 6 & 39 \\ 31 & 30 & 23 & 13 & 46 & 16 & 5 & 48 & 39 & 2 \end{pmatrix}$$

- a Que représente le nombre 89 situé sur la deuxième ligne et la quatrième colonne?
- b Déterminer le nombre d'itinéraires allant de D à A empruntant 5 sentiers. Citer un tel itinéraire passant par le pic rouge.

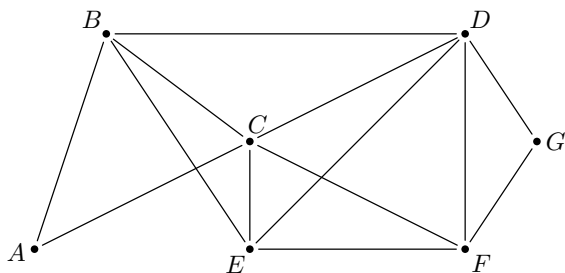
E.6340     Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage. Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterrissage, sont appelées *taxiways*.

Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation (les *taxiways*) et les sommets du graphe sont les intersections.



- 1 Écrire la matrice M associée à ce graphe (ranger les sommets dans l'ordre alphabétique).
- 2 Citer tous les chemins de longueur 3 reliant A à T .

E.6342     Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'une municipalité. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants.



- 1 Donner la matrice M associée au graphe (les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).
- 2 On donne la matrice :

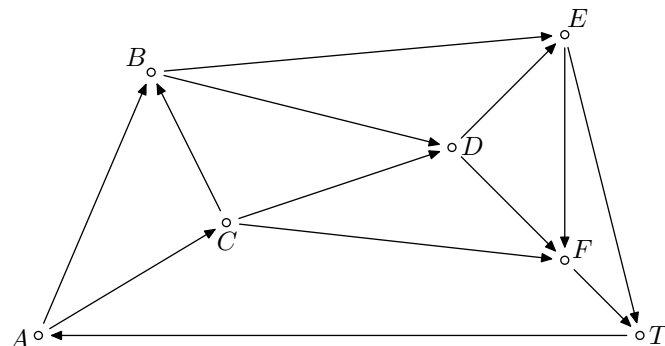
$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 12 & 13 & 12 & 8 & 5 \\ 8 & 12 & 12 & 15 & 13 & 13 & 5 \\ 5 & 13 & 15 & 12 & 13 & 12 & 8 \\ 5 & 12 & 13 & 13 & 10 & 12 & 5 \\ 5 & 8 & 13 & 12 & 12 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 8 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A et F puis donner leur liste.

E.6111     Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage. Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterrissage, sont appelées *taxiways*.

Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation (les *taxiways*) et les sommets du graphe sont les intersections.

Ce graphe est orienté pour indiquer le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies :

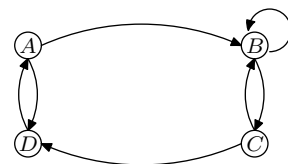


- 1 Écrire la matrice M associée à ce graphe (ranger les sommets dans l'ordre alphabétique).
- 2 À l'aide de la calculatrice, donner la valeur du coefficient $(1; 7)$ de M^3 .
- 3 Citer tous les chemins de longueur 3 reliant A à T .

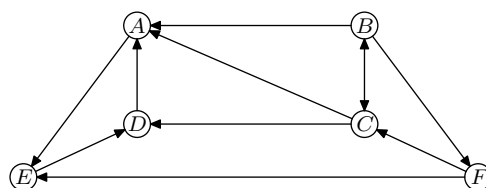
E.6241    On considère le graphe ci-contre.

On considère le graphe ci-contre.

- 1 Donner la matrice M d'adjacence de ce graphe. (on considérera les sommets du graphe à l'aide de l'ordre alphabétique).
- 2 À l'aide de la calculatrice, donner l'expression de la matrice M^4 .

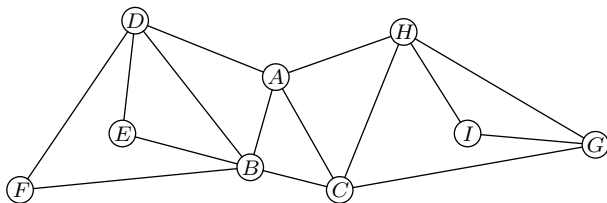


E.6240     Dans le graphe ci-contre, on a indiqué, pour cette même ville, le sens de circulation pour les véhicules sur les différentes avenues.



- 1 Peut-on trouver un trajet de longueur quelconque qui permet d'aller de D à B en respectant le sens de circulation? Justifier la réponse.
- 2 Écrire la matrice M associée à ce graphe (on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique).
- 3 À l'aide de la calculatrice, donner l'expression de la matrice M^3 .

E.8318    On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous :



- 1 Donner la matrice M associée au graphe $\mathcal{G}$ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).
- 2 On donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 9 & 10 & 3 & 3 & 4 & 9 & 3 \\ 11 & 8 & 10 & 9 & 8 & 8 & 3 & 4 & 3 \\ 9 & 10 & 6 & 5 & 3 & 3 & 8 & 9 & 3 \\ 10 & 9 & 5 & 6 & 7 & 7 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 3 & 1 & 1 & 4 & 7 & 5 \\ 9 & 4 & 9 & 3 & 3 & 3 & 7 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

- a Donner le nombre de chemins de longueur 3 reliant le sommet B au sommet D .
- b Donner le nombre de chemins de longueur 4 reliant le sommet F au sommet I .

5. Suites définies conjointement

E.5950    On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par les relations :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad v_0 = 1 \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 Déterminer les valeurs des termes u_2 et v_2 .
- 2 On considère la matrice M :
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
 - a Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$
 - b Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'identité pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - c À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs des termes u_{10} et v_{10} .

E.5357    On considère les deux suites réelles (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,7 \cdot a_n + 0,6 \cdot b_n \\ b_{n+1} = 0,3 \cdot a_n + 0,4 \cdot b_n \end{cases}$$

Pour tout entier n naturel, on définit la matrice-colonne U_n définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

- 1 Déterminer la matrice T réalisant pour tout entier naturel n l'égalité suivante : $U_{n+1} = T \cdot U_n$
- 2 On suppose que : $a_0 = \frac{2}{3}$ et $b_0 = \frac{1}{3}$.
 - a Déterminer les valeurs de a_1 et b_1 à l'aide de la relation matricielle établie à la question 1.
 - b Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement des suites (a_n) et (b_n) ?
- 3 On suppose que : $a_0 = 0,3$ et $b_0 = 0,7$.
 - a Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a la relation : $U_n = T^n \cdot U_0$
 - b À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel, déterminer l'expression des matrices U_2 , U_3 et U_5 à 10^{-6} près.
 - c Que peut-on conjecturer sur le comportement des suites (a_n) et (b_n) ?

E.6093    Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé. Trois marques X, Y, Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel.

On note :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_n \text{ l'événement : "la marque } X \text{ est utilisée le mois } n" \\ \mathcal{Y}_n \text{ l'événement : "la marque } Y \text{ est utilisée le mois } n" \\ \mathcal{Z}_n \text{ l'événement : "la marque } Z \text{ est utilisée le mois } n" \end{cases}$$

Les probabilités des événements $\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n, \mathcal{Z}_n$ sont notées respectivement x_n, y_n, z_n .

La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition :

- Un acheteur de la marque X le mois n , a le mois suivant :
 - ▶ 50 % de chance de rester fidèle à cette marque ;
 - ▶ 40 % de chance d'acheter la marque Y ;
 - ▶ 10 % de chance d'acheter la marque Z .
- Un acheteur de la marque Y le mois n , a le mois suivant :
 - ▶ 30 % de chance de rester fidèle à cette marque ;
 - ▶ 50 % de chance d'acheter la marque X ;

▶ 20 % de chance d'acheter la marque Z .

- Un acheteur de la marque Z le mois n , a le mois suivant :
 - ▶ 70 % de chance de rester fidèle à cette marque ;
 - ▶ 10 % de chance d'acheter la marque X ;
 - ▶ 20 % de chance d'acheter la marque Y .

1 Représenter le graphe de transitions associé à ce phénomène d'évolutions.

2 En notant U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, déterminant l'expression de la matrice T réalisant la relation :

$$U_{n+1} = T \cdot U_n$$

3 On suppose ce phénomène d'évolutions initialisé avec les valeurs :

$$x_0 = 0,3 \quad ; \quad y_0 = 0,5 \quad ; \quad z_0 = 0,2$$

À l'aide d'un calcul matriciel et manuel, déterminer le pourcentage d'acheteurs dévolus à chacune de ces marques le second mois ?

6. Matrice diagonalisable et suites

E.5944    On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On définit la suite de matrice (X_n) par la relation $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

On considère la matrice A définie par :
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- 1 a Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$X_{n+1} = A \cdot X_n$$
 b Démontrer par récurrence la relation suivante pour tout entier naturel n :

$$X_n = A^n \cdot X_0$$
- 2 On définit les matrices P et P' :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} ; \quad P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- a Montrer que les matrices P et P' sont inversibles.
- b Déterminer la matrice B diagonale réalisant l'égalité suivante :

$$P' \cdot B \cdot P = A$$
- c Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$A^n = P' \cdot B^n \cdot P$$

3 a Donner l'expression de la matrice B^n en fonction de n .

b Établir que la matrice X_n admet pour expression, pour tout entier naturel n :
$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

4 En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) .

7. Exercices non-classés

E.8824   On considère la suite (F_n) de Fibonacci définie par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = 1 \quad ; \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

On note U_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$.

- 1 Donner la matrice carrée A d'ordre 2 à coefficients réels qui vérifie :

$$U_{n+1} = U_n \cdot A$$

2 On considère les deux matrices :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

- a Montrer que la matrice P est inversible, puis déterminer sa matrice inverse.
- b Établir que : $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

- c En déduire une expression du terme F_n en fonction de n .

Formule de Binet : (1843)

Pour tout entier naturel n , le terme F_n de rang n de la suite de Fibonacci a pour valeur :

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \cdot \sqrt{5}}$$