

1. Dérivées de fonctions composées

E.3506   Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (3 \cdot x + 5)^5$ b) $g(x) = \frac{1}{3 \cdot x^4 + 1}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ d) $j(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$

E.5103   Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{6x^2 - 3x + 1}$ b) $g(x) = (4 \cdot x - 1)^4$

E.95   On considère la fonction f définie par :

$$f: x \mapsto \sqrt{-2x^2 - x + 6}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2) Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction f .

E.5217   On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left] -\infty; -\frac{1}{2} \right]$ par la relation par la relation suivante :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$$

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en -1 .

E.5751   Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (3x + 2)^5$ b) $g(x) = \sqrt{1 - 2x}$

c) $h(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ d) $j(x) = \sqrt{\frac{x}{x + 1}}$

E.2394  

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par : $f: x \mapsto 5 \cdot (x^2 + x + 1)^4$

2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie par : $g: x \mapsto \frac{2}{5} x^2 \cdot \sqrt{3 - 2x}$

Écrire cette fonction dérivée de la fonction g sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est $\sqrt{3 - 2x}$.

E.6137   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = (a \cdot x^2 + b \cdot x)^4 \cdot (c \cdot x + 1)$$

où a , b et c sont trois entiers relatifs.

On sait que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$$f'(x) = (-18x^2 + 21x - 4) \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x)^3$$

Déterminer l'expression de la fonction f .

E.8399   Déterminer l'expression, sous forme simplifiée, de la fonction f' dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = (\sqrt{x + 1})^3$$

E.8400   Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner l'expression simplifiée de leur fonction dérivée :

a) $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)\sqrt{x}$ b) $g(x) = (2x + 1) \cdot \sqrt{3 - x}$

2. Dérivées de fonctions composées de la fonction exponentielle

E.8410   Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

a) $f(x) = e^{2-x^2}$ b) $f(x) = e^{x^2+1}$ c) $f(x) = e^{x^2+x+1}$

E.8420   Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

a) $f(x) = (2 \cdot x + 1)e^{x+1}$ b) $f(x) = x \cdot e^{3 \cdot x^2}$

E.3613   Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ 2) $g(x) = x \cdot e^{x^2+1}$

3) $h(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ 4) $j(x) = \frac{e^{-2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$

5) $k(x) = e^{x^2+x}$ 6) $\ell(x) = e^{x^2+1}$

E.5140   Dans le tableau ci-dessous, sont données des fonctions et l'expression de leurs dérivées. Vérifier l'exactitude de ce tableau :

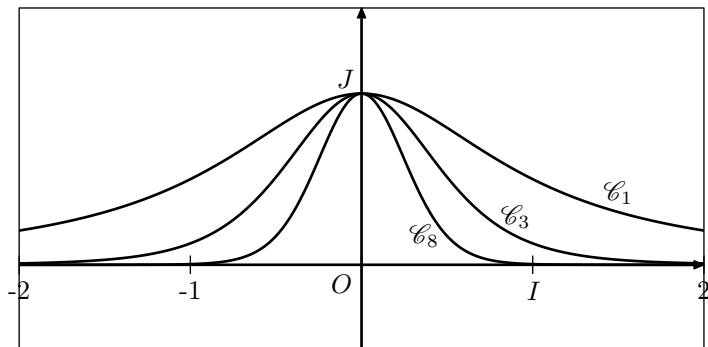
	$f(x)$	$f'(x)$
a)	$3x \cdot e^{5x^2+3}$	$(30x^2 + 3) \cdot e^{5x^2+3}$
b)	$e^{3-x^2} \cdot e^{x^2+1}$	0
c)	$\frac{e^{2-x^2}}{2x}$	$-\frac{(2x^2 + 1)e^{2-x^2}}{2x^2}$
d)	$e^{x\sqrt{x}}$	$\frac{3}{2} \cdot \sqrt{x} \cdot e^{x\sqrt{x}}$
e)	$\frac{2x}{e^{2-x}}$	$\frac{4}{(x-2)^2} \cdot e^{\frac{2x}{2-x}}$

3. Dérivées de familles de fonctions

E.6134   On considère, pour tout entier naturel n non-nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f_n(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^n}$$

Dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n .

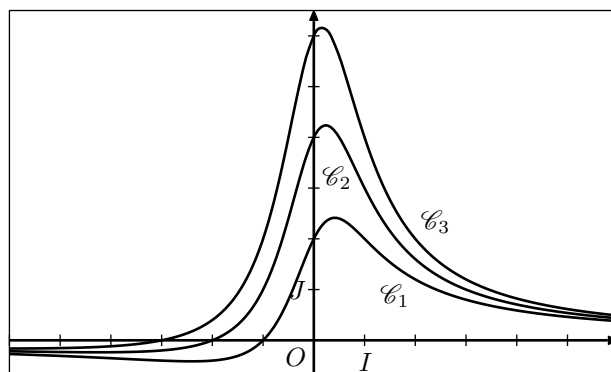


- 1 Déterminer l'expression de la dérivée f'_n de la fonction f_n .
- 2 **a** Déterminer l'équation réduite de la tangente (d) à la courbe $\mathcal{C}_3$ au point d'abscisse 1.
b On considère la droite (Δ) d'équation réduite :
$$y = \frac{5}{32} \cdot x + \frac{3}{16}$$
Parmi la famille de courbe $(\mathcal{C}_n)$, quelle est celle qui admet la droite (Δ) comme tangente au point d'abscisse -1? Justifier votre réponse.

E.6810   On considère pour tout entier naturel n non-nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f_n(x) = \frac{2 \cdot (x + n)}{1 + x^2}$$

Dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n .



- 1 Déterminer l'expression de la fonction dérivée f'_n .
- 2 Déterminer l'équation réduite de la tangente (d_n) à la courbe $\mathcal{C}_n$ au point d'abscisse 1.
- 3 **a** Établir l'égalité suivante :
$$n \cdot x^3 - (2 \cdot n + 1) \cdot x^2 + (n + 2) \cdot x - 1 = (x - 1)^2 \cdot (n \cdot x - 1)$$
b Étudier la position relative de la droite (d_n) et de la courbe $\mathcal{C}_n$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

4. Tangente de fonctions composées

E.7740   On considère la fonction g définie par la relation :

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g .

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .
- 2 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $\frac{3}{2}$.

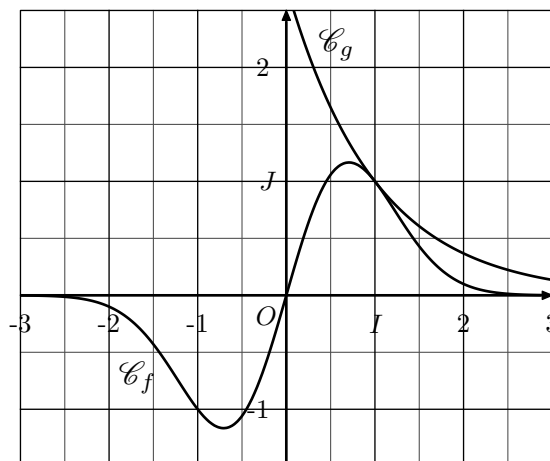
E.6919    On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$$

et la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{1-x}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement des fonctions f et g .



Justifier qu'au point d'abscisse 1, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent la même tangente.

5. Tableau de variations d'une fonction composée

E.5752   On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{6x^2 + 13x - 5}$$

- 1 Justifier que la fonction f admet pour ensemble de

définition la partie I de $\mathbb{R}$ définie par :

$$I = \left] -\infty; -\frac{5}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty \right[.$$

- 2 Déterminer le sens de variation de la fonction f sur son ensemble de définition I .

E.6135



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- 1 Établir que la dérivée f' de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x^2+1) \cdot \sqrt{x^2+1}}$$

- 2 Dresser le tableau de variations de la fonction f .

On admettra les deux limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

6. Etude de la fonction dérivée de fonctions composées

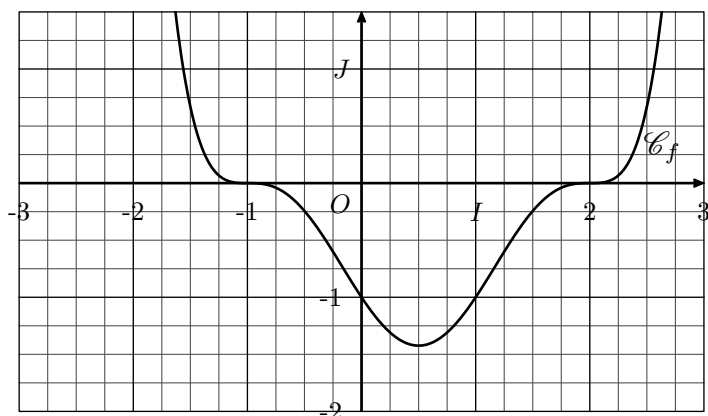
E.5753



On considère la fonction f dont l'image d'un nombre $x \in \mathbb{R}$ est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x^2 - x - 2)^3$$

Ci-dessous, est donnée la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé.



- 1 Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 2 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
(on utilisera la valeur approchée $f(\frac{1}{2}) \approx -1,4$)

E.5062



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = (5x^2 + 3x + 2)^5$$

- 1 Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f .
- 2 Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

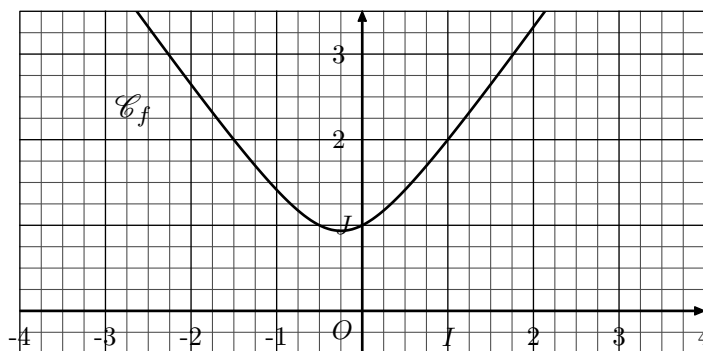
E.5063



On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2 Déterminer le tableau de variations de la fonction f .
- 3 Dans un repère $(O; I; J)$, on donne la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f :

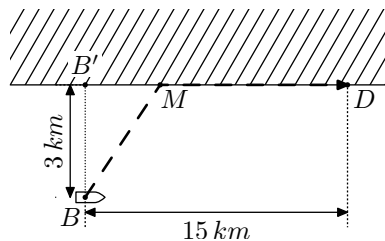


- a Déterminer l'équation de la tangente (d) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
- b Tracer la droite (d) dans le repère ci-dessus.

E.2962



Un bateau, représenté par le point B , se trouve à trois kilomètres du rivage; le point B' représente le point du rivage le plus proche du bateau (*son projeté orthogonal*); le point D représente la destination à atteindre par le marin. Pour ce faire, le marin décide d'atteindre un point M de la berge, puis de rejoindre le point D en voiture.



Le bateau navigue à une vitesse de 15 km/h et la voiture se déplace à une vitesse de 40 km/h .

On note x la distance $B'M$:

- 1 Exprimer la distance BM et MD en fonction de x .
- 2 On note $h(x)$ le temps de parcours effectué lorsque $B'M = x$.
 - a Justifier que: $h(x) = \frac{1}{120} \cdot (8\sqrt{x^2+9} + 45 - 3x)$
 - b Déterminer l'expression de la fonction dérivée h' .
 - c Dresser le tableau de variations de la fonction h .
- 3 En déduire la valeur de x pour laquelle le temps de trajet du marin est minimale, arrondie au mètre près.

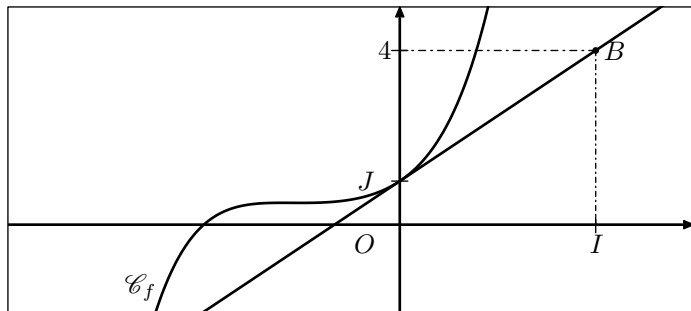
E.6163



On considère la fonction f définie par la relation:

$$f(x) = (a \cdot x + 1) \cdot (2x^2 + x + 1)^2$$

Dans un repère $(O; I; J)$ orthogonal donné ci-dessous, on représente la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f :



La droite (d) passe par les points J et $B(1; 4)$.

- 1 a Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point J .
- b Déterminer le coefficient de la droite (JB) .
- c Démontrer que tout réel x , on a:

$$f'(x) = [10ax^2 + (3a+8) \cdot x + (a+2)] \cdot (2x^2 + x + 1).$$
- d On suppose que la droite (JB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point J . Déterminer la valeur de a . Justifier votre réponse.

- 2 On admet que f' a pour expression:

$$f'(x) = (10x^2 + 11x + 3)(2x^2 + x + 1).$$

Déterminer les sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

E.3643



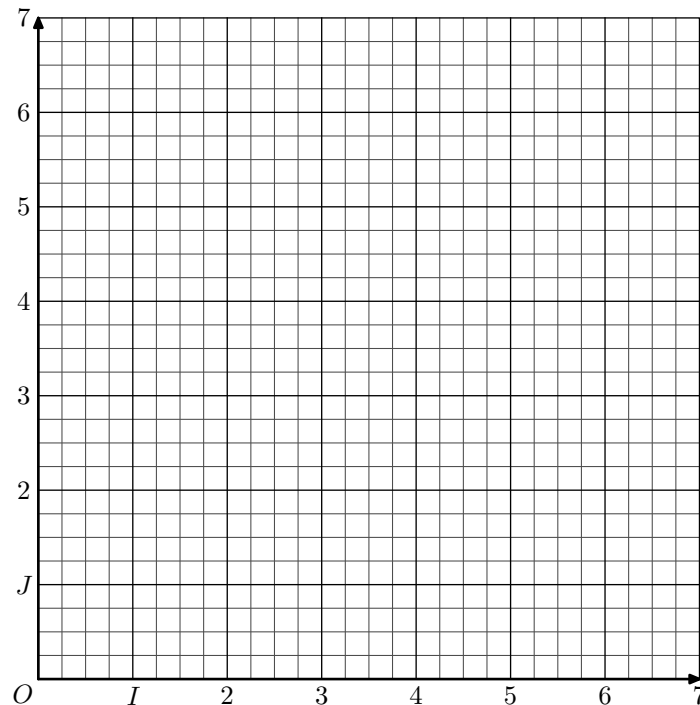
On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm .

- 1 Étude des limites
 - a Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0 .
 - b Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
 - c Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathcal{C}$?
- 2 Étude des variations de la fonction f .
 - a Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot (2x + 1)$$
 - b Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - c Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ et donner la valeur de α arrondie au centième.
- 3 Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



7. Lien entre dérivée et nombre dérivée

E.5064



Déterminer la valeur des limites suivantes:

$$\text{a) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^4 - 81}{h}$$

$$\text{b) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6 \cdot h + 1} - 1}{h}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)^8 - 1}{x}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}{x}$$

<https://icmath.fr/> (CC) BY-NC

E.5101   Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2h+5} - \sqrt{5}}{h}$ b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2-2h)^4 - 16}{h}$

E.5829    Soit f une fonction numérique dérivable.

① Soit $a \in \mathcal{D}_f$. Établir la limite suivante :

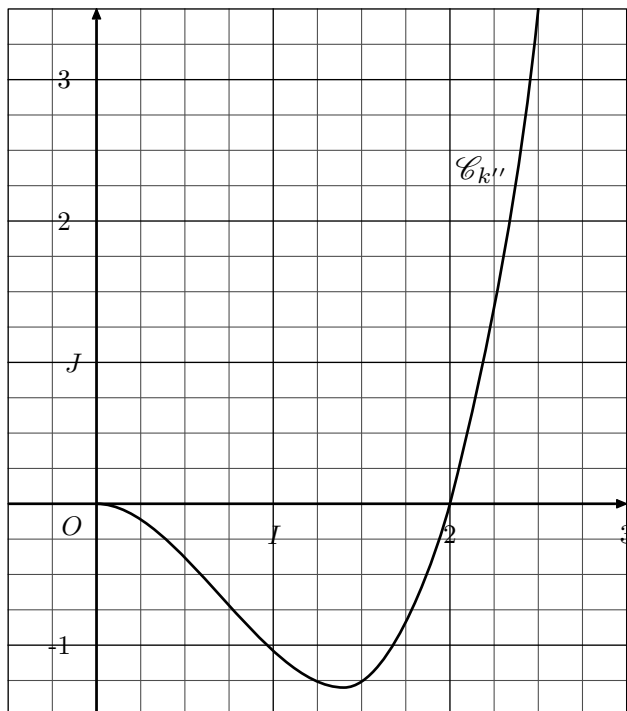
$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{x \cdot f(a) - a \cdot f(x)}{x - a} = f(a) - a \cdot f'(a)$$

On posera : $x = a + h$.

② En déduire la limite : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{x^3 \cdot a - a^3 \cdot x}{x - a}$

8. Convexité : graphiquement

E.7011    On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $[0; +\infty[$.

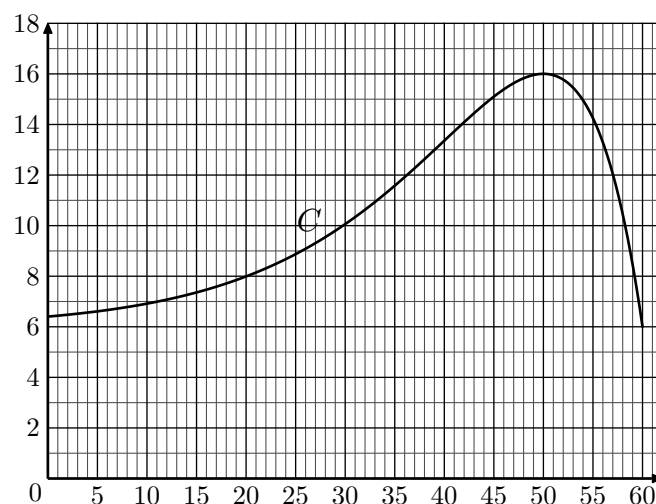


Parmi les réponses proposées, laquelle est correcte?

- ① k est concave sur l'intervalle $[1; 2]$.
- ② k est convexe sur l'intervalle $[0; 2]$.
- ③ k est convexe sur $[0; +\infty[$.
- ④ k est concave sur $[0; +\infty[$.

E.7059    On considère une fonction P définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 60]$.

On donne, ci-dessous, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction P .



À partir d'une lecture graphique répondre aux questions qui suivent :

- ① En argumentant la réponse, donner le signe de $P'(54)$, où P' est la fonction dérivée de la fonction P .
- ② Donner un intervalle sur lequel la fonction P est convexe.
- ③ Donner, à l'unité près, les solutions de l'équation : $P(x) = 10$.

E.7054

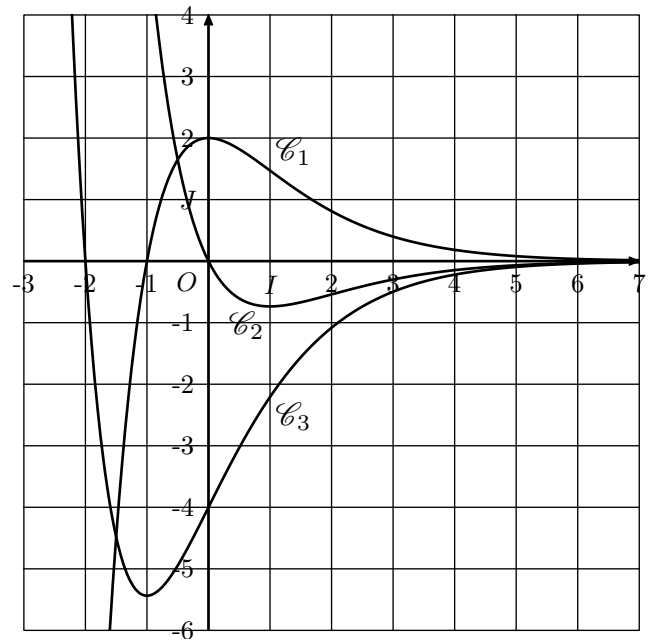


Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ définies sur $[-3; 7]$ ont été représentées.

L'une de ces fonctions représente une fonction f , une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.

Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f .

Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.



9. Convexité: étude de fonctions

E.7730



Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 9x$ est convexe sur l'intervalle :

- (a) $]-\infty; +\infty[$ (b) $[0; +\infty[$
 (c) $]-\infty; 0]$ (d) $[-3; 3]$

E.7702



Indication : pour la question posée, une seule des quatre réponses est exacte.

Aucune justification n'est demandée.

La fonction f est définie pour tout nombre réel x appartenant à $]0; +\infty[$ par : $f(x) = e^{2x + \ln(x)}$

- (1) la fonction f est concave.
- (2) la fonction f possède une fonction dérivée seconde qui s'annule.
- (3) la fonction f possède une fonction dérivée seconde strictement positive.
- (4) la fonction f possède une fonction dérivée qui s'annule.

E.7043



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \cdot e^{x^2 - 1}$

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f .

- (1) (a) Montrer que pour tout réel x :
 $f'(x) = (2x^2 + 1) \cdot e^{x^2 - 1}$
 (b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- (2) On admet que pour tout réel x :
 $f''(x) = 2x \cdot (2x^2 + 3) \cdot e^{x^2 - 1}$
 Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

E.7793



On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-2; 4]$ par : $f(x) = (x + 2) \cdot e^{-x+1}$

On note f' la fonction dérivée de f .

- (1) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[-2; 4]$, on a :
 $f'(x) = -(x + 1) \cdot e^{-x+1}$
- (2) Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	factoriser(dériver $[-(x+1) \cdot \exp(-x+1)]$) $x \cdot \exp(-x+1)$
2	intégrer $[(x+2) \cdot \exp(-x+1)]$ $-(x+3) \cdot \exp(-x+1)$

En utilisant ces résultats, répondre à la question suivante :

Déterminer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe. Justifier.

E.7026    Soit f la fonction définie sur $[0; 8]$ par :

$$f(x) = \frac{0,4}{20 \cdot e^{-x} + 1} + 0,4$$

- 1 Montrer que $f'(x) = \frac{8 \cdot e^{-x}}{(20 \cdot e^{-x} + 1)^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
- 2 Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f'(x) := 8 \cdot e^{-x} / (20 \cdot e^{-x} + 1)^2$ $f'(x) := \frac{8 \cdot e^{-x}}{400(e^{-x})^2 + 40 \cdot e^{-x} + 1}$
2	$g(x) := \text{Dérivée}[f'(x)]$ $g(x) := \frac{160 \cdot (e^{-x})^2 - 8 \cdot e^{-x}}{8000 \cdot (e^{-x})^3 + 1200 \cdot (e^{-x})^2 + 60 \cdot e^{-x} + 1}$
3	$\text{Factoriser}[g(x)]$ $8 \cdot e^{-x} \cdot \frac{20 \cdot e^{-x} - 1}{(20 \cdot e^{-x} + 1)^3}$

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

10. Convexité et positions des tangentes

E.7794    On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par :

$$f(x) = -x \cdot \ln(x) + 2 \cdot x + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.

Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0; 10]$.

E.7695    On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 \cdot x - 3 \cdot x \cdot \ln(x)$$

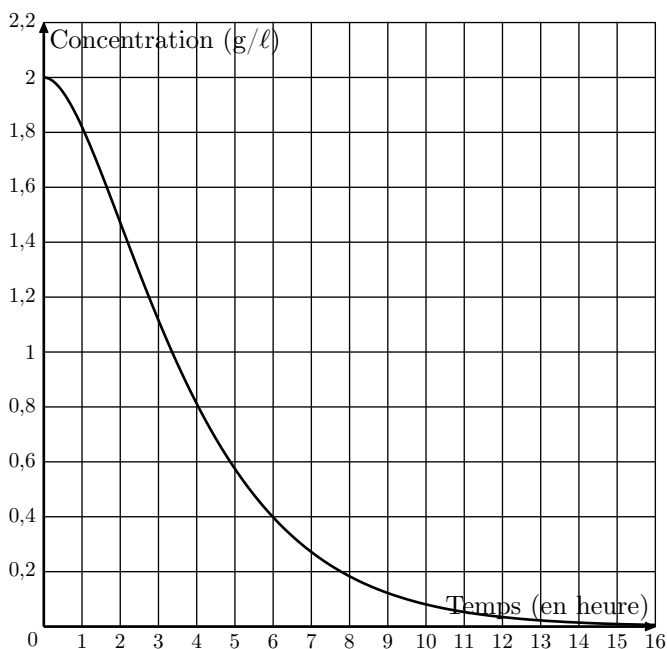
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T ?

11. Point d'inflexion : graphiquement

E.7050    On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes en litres, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie ci-dessous :



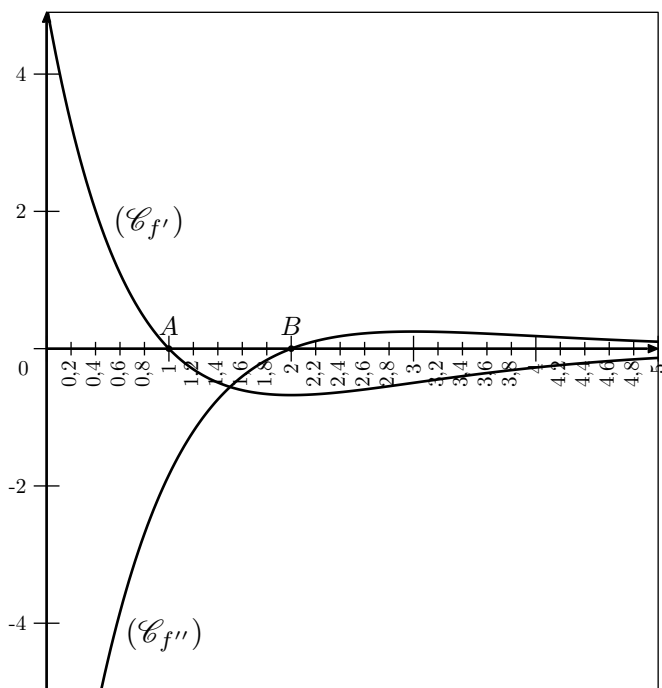
En vous aidant d'une lecture graphique et sans justifier, au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle?

E.7061



On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 5]$.

On a représenté ci-dessous la courbe $(\mathcal{C}_{f'})$ de la fonction dérivée f' ainsi que la courbe $(\mathcal{C}_{f''})$ de la fonction dérivée seconde f'' sur l'intervalle $[0; 5]$.



Le point A de coordonnées $(1; 0)$ appartient à $(\mathcal{C}_{f'})$ et le point B de coordonnées $(2; 0)$ appartient à la courbe $(\mathcal{C}_{f''})$.

- 1 Déterminer le sens de variation de la fonction f . Justifier.
- 2 Déterminer sur quel(s) intervalle(s), la fonction f est convexe. Justifier.
- 3 La courbe de f admet-elle des points d'inflexion? Justifier. Si oui, préciser leur(s) abscisse(s).

12. Point d'inflexion: étude de fonctions

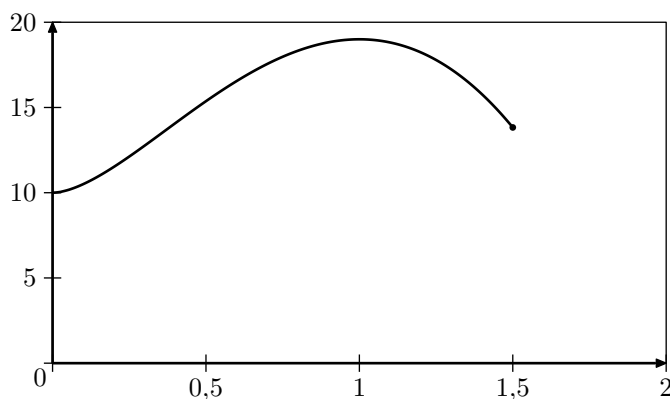
E.7020



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 15]$ par :

$$f(x) = 9 \cdot x^2 \cdot (1 - 2 \cdot \ln x) + 10.$$

La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



On admet que $f''(x) = -36 \cdot \ln x - 36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $]0; 1,5]$.

Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1} .

E.7052



La production mensuelle de légumes permettra de livrer, au maximum, 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$C(x) = -\frac{1}{48} \cdot x^4 + \frac{5}{16} \cdot x^3 + 5 \cdot x + 10$$

Lorsque x est exprimé en centaines de papiers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0; 10]$, le coût marginal est donné par la fonction $C_m = C'$ où C' est la fonction dérivée de C .

- 1 Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour six cents paniers vendus.
- 2 On note C'' la fonction dérivée seconde de C et on a :

$$C''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{15}{8} \cdot x$$
 - a Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0; a]$ inclus dans $[0; 10]$ sur lequel la fonction C est convexe.
 - b Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe de la fonction C ?
Interpréter cette valeur de a en termes de coût.

E.7791    On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20; 20]$ par :

$$f(x) = (-2 \cdot x + 30) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$$

- 1
 - a Montrer que $f'(x) = (-0,4 \cdot x + 4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20; 20]$.
 - b Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-20; 20]$.
On précisera la valeur exacte du maximum de f .
- 2
 - a Montrer que, sur l'intervalle $[-20; 20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α .
 - b Donner un encadrement de α d'amplitude 0,2.
- 3 Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver $(-10 \cdot x + 200) \cdot e^{0,2 \cdot x + 3}$ $(-2 \cdot x + 30) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$
2	Dériver $(2 \cdot x + 30) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$ $(-0,4 \cdot x + 4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$
3	Dériver $(-0,4 \cdot x + 4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$ $(-0,08 \cdot x + 0,4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$

Répondre à la question suivante en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

E.7729    On admet que la fonction f est définie par :

$$f(x) = (x^2 - 2 \cdot x + 1) \cdot e^{-2x+6}$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés :

L1	$f(x) := (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-2x+6}$ $\rightarrow f(x) = (x^2 - 2 \cdot x + 1) \cdot e^{-2x+6}$
L2	$f'(x) := \text{Dérivée}[f(x)]$ $\rightarrow f'(x) = (-2 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 4) \cdot e^{-2x+6}$
L3	$g(x) := \text{Dérivée}[f'(x)]$ $\rightarrow g(x) = -16 \cdot x \cdot e^{-2x+6} + 4 \cdot x^2 \cdot e^{-2x+6} + 14 \cdot e^{-2x+6}$
L4	$\text{Factoriser}[g(x)]$ $\rightarrow 2 \cdot e^{-2x+6} \cdot (2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 7)$
L5	$\text{Résoudre}[g(x)=0]$ $\rightarrow \left\{ x = \frac{-\sqrt{2}+4}{2}; x = \frac{\sqrt{2}+4}{2} \right\}$
L6	$F(x) := \text{Primitive}[f(x)]$ $\rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \cdot (-2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1) \cdot e^{-2 \cdot x+6}$

- 1 Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.
- 2 La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion?
Si oui, en donner l'abscisse.

E.7790    On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{0,5 + 100 \cdot e^{-x}}$$

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0; 10]$.

- 1 Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $[0; 10]$, on a : $f'(x) = \frac{100 \cdot e^{-x}}{(0,5 + 100 \cdot e^{-x})^2}$

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $[0; 10]$. Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{100 \cdot e^{-x} \cdot (100 \cdot e^{-x} - 0,5)}{(0,5 + 100 \cdot e^{-x})^3}$$

- 2
 - a Montrer que, dans l'intervalle $[0; 10]$, l'inéquation $100 \cdot e^{-x} - 0,5 \geq 0$ est équivalente à l'inéquation :
 $x \leq -\ln(0,005)$.
 - b En déduire le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle $[0; 10]$.
- 3 On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f tracée dans un repère.
Montrer, à l'aide de la question 2, que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion noté I , dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.
- 4 En utilisant les résultats de la question 2, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

13. Exercices non-classés

E.1984   On considère la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{-2 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 3}$$

- 1 Montrer l'égalité suivante :
 $(2 \cdot x - 1)(3 - x) = -2 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 3$

- 2
 - a Étudier le signe de $-2 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 3$ en fonction de la valeur de x .
 - b En déduire l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction f .
- 3 Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction

f .

- 4 Dresser le tableau de variations de la fonction f .

E.3644 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

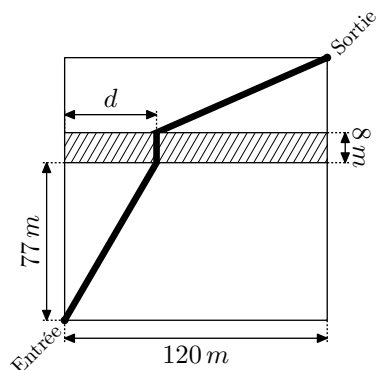
$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$$

- 1 Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- 2 Résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$, l'équation $f(x) = x$. On note a l'unique solution de cette équation.
- 3 Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0; a]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0; a]$.

E.8215

La ville "Promenade" souhaite emménager un terrain de forme carré traversé par une rivière traversant latéralement le terrain.

La figure ci-dessous représente le terrain et la rivière est la partie hachurée :



À quelle distance d doit-on placer le pont pour que la distance parcourue par un visiteur soit minimale?

E.111 On considère un segment $[AB]$ de longueur 10 centimètres et un point M de ce segment, différent de A et B . Les points N et P sont tels que $AMNP$ est un carré.

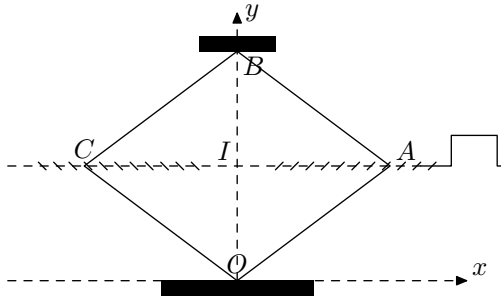
L'objectif de l'exercice est de déterminer le point M du segment $[AB]$ pour lequel la distance BN est minimale.

Les distances sont exprimées en centimètres.

- 1 On pose: $AM = x$.
 - a Faire une figure.
 - b Déterminer l'intervalle des valeurs possibles pour x .
 - c Déterminer en fonction de x la distance BM .
 - d Déterminer en fonction de x la distance BN .
(On rappelle le théorème de Pythagore: dans un triangle ABC rectangle en A , on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$)
- 2 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par: $f(x) = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$
La fonction dérivée f' de f est définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par: $f'(x) = \frac{2x - 10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}}$.
 - a Répondre aux questions suivantes
 - i Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$
 - ii Montrer que la fonction f admet un minimum sur l'intervalle $[0; 10]$ que l'on précisera.
 - b Répondre aux questions suivantes:
 - i Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité un centimètre.
 - ii Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 8$. On fera apparaître les traits de construction utiles et on donnera des valeurs approchées des solutions lues.
- 3 En utilisant les résultats précédents, déterminer le point M du segment $[AB]$ pour lequel la distance BN est minimale.



La figure ci-dessous est le schéma d'un cric de voiture.



Celui-ci est constitué d'un losange déformable $OABC$, le point O étant le point d'appui sur le sol et le point B étant le point par lequel la voiture est soulevé.

Lorsqu'on tourne la manivelle M , les écrous A et C se rapprochent (ou s'éloignent), ce qui fait monter (ou descendre) l'appui B , selon l'axe (Oy) .

On donne : $OA = OC = AB = BC = 25 \text{ cm}$

Dans le repère orthonormé $(O ; x ; y)$ d'unité un centimètre, x_A désigne l'abscisse du point A et varie de 0 à 25.

L'ordonnée du point B est notée y_B :

- Pour $x_A = 0$, on a : $y_B = 50$;
- Pour $x_A = 25$ on a : $y_B = 0$.

Pour le cric fonctionne correctement, il faut :

$$x_A > 6 \quad ; \quad y_B > 10.$$

- 1 a En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle AIB , trouver une relation entre x_A et y_B et vérifier que : $y_B = 2 \cdot \sqrt{625 - x_A^2}$.
- b En utilisant la relation trouvée à la question a, calculer la valeur de x_A lorsque y_B est égal à 10, puis la valeur de y_B lorsque x_A est égal à 6.
- 2 On considère la fonction f définie pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; 25]$ par : $f(x) = 2 \cdot \sqrt{625 - x^2}$.

On admettra qu'une fonction de type $\sqrt{u}$, où u est une fonction définie et positive sur un intervalle, a le même sens de variation que u sur cet intervalle.

- a Déterminer la dérivée u' de la fonction u définie sur

l'intervalle $[0 ; 25]$ par $u(x) = 625 - x^2$. Étudier le signe de $u'(x)$ quand x varie entre 0 et 25.

En déduire le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0 ; 25]$.

- b En déduire le tableau de variations de la fonction f . On précisera les valeurs de la fonction aux bornes de l'intervalle.
- c Tracer la courbe (Γ) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique 0,5 cm. (On précisera sur la courbe les points d'abscisses 18, 20, 22 et 24.)
- 3 a Quand l'abscisse x_A passe de 24 à 22, calculer l'augmentation q_1 de la hauteur y_B arrondie au dixième près. Vérifier la cohérence de ce résultat sur la courbe (Γ) en faisant apparaître les constructions effectuées.
- b Évaluer, à l'aide du graphique en faisant apparaître les traits de constructions utiles, l'augmentation q_2 de y_B lorsque x_A passe de 22 à 20, puis l'augmentation q_2 de y_B lorsque x_A passe de 20 à 18.
- c Lorsqu'on actionne la manivelle de façon régulière, peut-on dire que la voiture monte à une vitesse constante? Justifier votre réponse.



Le tableau présente pour chaque ligne une fonction et l'expression de la dérivée. Établir l'exactitude de chaque ligne.

Fonction	Image de x	Nombre dérivé en x
f	$(3x + 2)^6$	$18 \cdot (3x + 2)^5$
g	$4 \cdot (3 - 2x)^4$	$-32 \cdot (3 - 2x)^3$
h	$\frac{1}{-2x^2 + 3x + 1}$	$\frac{4x - 3}{(2x^2 - 3x - 1)^2}$
j	$\sqrt{5x^2 + 6x - 2}$	$\frac{5x + 3}{\sqrt{5x^2 + 6x - 2}}$
k	$\frac{2x - 1}{\sqrt{3 - x}}$	$\frac{2x - 11}{2 \cdot (x - 3) \cdot \sqrt{3 - x}}$