

1. Résolution de systèmes

E.6348   Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 3x + y + 2z = -1 \\ x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

(On montrera que ce système admet un unique triplet solution).

E.8653   Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ -x + 5y - 9z = -5 \end{cases}$$

(On montrera que ce système n'admet aucune solution)

E.8654   Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x - y + 4z = -2 \\ 5x - y + 7z = 1 \end{cases}$$

(On montrera que ce système admet une infinité de solutions qu'on écrira sous la forme $(\dots; \dots; z)$ où $z \in \mathbb{R}$)

2. Représentations paramétriques d'une droite

E.5400   Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point A et admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur directeur dans chaque cas ci-dessous :

a) $A(3; 0; -2)$; $\vec{u}(-1; -2; 1)$

b) $A(2; -1; 1)$; $\vec{u}(2; 0; -4)$

E.4038    L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère le point A de coordonnées $(-2; 8; 4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1; 5; -1)$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

E.4035    Indiquer pour la proposition suivante si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

La droite de l'espace, passant par le point B de coordonnées $(2; 3; 4)$ et admettant le vecteur $\vec{u}(1; 2; 3)$ comme vecteur directeur, a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = 3t + 1 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

3. Représentations paramétriques de droites et positions relatives

E.6347   On considère l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ et la droite (d) admettant la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1 a) Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}; 4; -\frac{5}{2}\right)$ appartient à la droite (d) .

b) Montrer que le point $B\left(-\frac{9}{4}; \frac{3}{2}; -\frac{23}{4}\right)$ n'appartient pas à la droite (d) .

2 On considère la droite (d') admettant la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{3}{2}t \\ y = 3 - 3t \\ z = -4 - \frac{9}{2}t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

a) Montrer que le point A appartient à la droite (d') .

b) Quelle est la position relative des droites (d) et (d') ?

E.5401   On considère l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour représentations paramétriques :

$$(d) : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + 6t \end{cases} \quad (d') : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = -1 + t \\ z = -3t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

1 Montrer que les droites (d) et (d') sont parallèles.

2 Montrer que les droites (d) et (d') sont parallèles strictes? (on montrera qu'un point de (d) n'appartient pas à (d'))

E.5413   Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé, on considère les deux points M et N de coordonnées :

$$M(-1; 2; 3) \quad ; \quad N(1; -2; 9)$$

$$(d): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 9t \end{cases} \quad (d'): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -6 - t \\ z = 12 - 2t \end{cases} \quad (d''): \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 6 - 2t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$$

où t est un réel parcourant l'ensemble des réels.

- 1  À quelles droites appartient le point M ?
-  Parmi les droites (d) , (d') et (d'') , laquelle représente la droite (MN) ?
- 2 Déterminer, par une autre méthode, une autre représentation de la droite (MN) .

E.4057    L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Soit A le point de coordonnée $(3; 1; 3)$.

On considère la droite $\mathcal{D}$ de l'espace passant par A et de

vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; -1)$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Dire laquelle des trois affirmations suivantes est exacte. Aucune justification n'est demandée :

- 1 Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires et parallèles ;
- 2 Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires et sécantes ;
- 3 Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont non coplanaires.

E.4067    On considère les deux droites (d) et (d') dont les représentations paramétriques sont respectivement :

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 + t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 5 - 2k \\ y = -1 + k \\ z = 2 - \frac{1}{2}k \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d) et (d') sont coplanaires.

4. Représentations paramétriques d'une droite et résolution de systèmes

E.5402   On considère l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour représentation paramétrique :

$$(d): \begin{cases} x = -t \\ y = -1 - t \\ z = 5 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (d'): \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Montrer que les droites (d) et (d') sont coplanaires et sécantes. On précisera les coordonnées du point d'intersection.

E.5409   Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les deux droites (d) et (d') admettant pour représentations paramétriques :

$$(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (d'): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -6 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Montrer que les droites (d) et (d') sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

E.5403   On considère l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour représentation paramétrique :

$$(d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad (d'): \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -1 - t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Justifier que ces deux droites sont non coplanaires.

E.2679    On considère les deux droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad ; \quad \begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases} \quad \text{où } u \in \mathbb{R}$$

Montrer que ces deux droites sont sécantes et déterminer les coordonnées du point d'intersection.

E.4066    On considère les deux droites de représentation paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases} \quad \text{où } u \in \mathbb{R}$$

Montrer que ces deux droites sont sécantes. Donner les coordonnées du point d'intersection.

E.4065    L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère les droites (d) et (d') admettant respectivement les représentations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

E.8655   On considère les droites (Δ) et (Δ') dont les représentations paramétriques sont respectivement :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 6 + 3t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = -1 - k \\ y = 2 + 2k \\ z = 1 - k \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (Δ) et (Δ') sont coplanaires.

5. Représentations paramétriques de droites et orthogonalités

E.5414   Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé, on considère les deux droites (d) et (d') définies par leur représentation paramétrique :

$$(d) \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -4 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad (d') \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - 2t \\ z = -2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

- 1 Montrer que les droites (d) et (d') sont orthogonales entre elles.
- 2 Les droites (d) et (d') sont-elles sécantes? Si oui, préciser le point d'intersection.

E.6968   Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé, on considère deux droites (d) et (d') admettant pour représentation paramétrique :

$$(d) \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad ; \quad (d') \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- 1 Montrer que les droites (d) et (d') sont sécantes. On déterminera les coordonnées de leur point M d'intersection.
- 2
 - a On considère les deux vecteurs $\vec{u}(2; -1; 1)$ et $\vec{v}(-2; 3; -1)$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ qui soit orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
 - b En déduire une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point M et orthogonale aux deux droites (d) et (d') .

E.4096    On admet que si (d) et (d') sont deux droites non coplanaires, il existe une unique droite (Δ) perpendiculaire à (d) et (d') .

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On note (d) la droite des abscisses et (d') la droite admettant la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

On considère la droite (Δ) perpendiculaire commune à (d) et (d') . Prouver qu'il existe deux réels b et c tels que le vecteur :

$$\vec{w} = b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$$

soit un vecteur directeur de (Δ) .

E.6405    On considère l'espace muni d'un repère $(O; I; J; K)$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour équation paramétrique :

$$(d) \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 + t \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad ; \quad (d') \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = -2 - t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

- 1 Montrer que les droites (d) et (d') sont non coplanaires.
- 2 On suppose l'existence d'une droite (Δ) perpendiculaire à la droite (d) et perpendiculaire à la droite (d')

- a Justifier l'existence d'un réel t tel que la droite (Δ) admette pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + t + t' \\ y = -5 + t - t' \\ z = 4 + t' \end{cases} \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}$$

- b En déduire une équation paramétrique de la droite (Δ) .

E.4036    L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On note $\mathcal{D}$ la droite des abscisses et $\mathcal{D}'$, la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

- 1 Justifier que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.
- 2 On considère la droite Δ perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Prouver qu'il existe deux réelles b et c tels que le vecteur $\vec{w} = b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$ soit un vecteur directeur de Δ .

6. Représentations paramétriques d'un plan

E.5424   Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les trois points :

$$A(2; 0; -1) \quad ; \quad B(1; 0; 3) \quad ; \quad C(2; 1; 1)$$

- 1 Justifier que les points A , B et C définissent un plan.
- 2 En choisissant $(\vec{AB}; \vec{AC})$ comme couple de vecteurs directeurs, montrer que le plan (ABC) admet pour représentation paramétrique le système suivant :

$$\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = t' \\ z = 4t + 2t' - 1 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

- 3 Justifier que le point $D(1; -2; -1)$ appartient au plan (ABC) .

E.5425   Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les trois points :

$$A(3; -1; 2) \quad ; \quad B(3; 1; 1) \quad ; \quad C(2; -1; 1)$$

- 1 Justifier que les points A , B et C définissent un plan.
- 2 Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC) .

E.6350   Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les trois points :

$$A(2; 0; -1) ; B(1; 2; 2) ; C(-1; 1; -2)$$

- 1  Les points A, B, C déterminent-ils un plan? Justifier votre réponse.

7. Coplanéarité

E.6945  

- 1 On considère les trois vecteurs :
 $\vec{u}(1; -1; 2) ; \vec{v}(1; 1; 3) ; \vec{w}(-1; -9; -7)$

Montrer que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.

- 2 On considère les trois vecteurs :
 $\vec{u}(2; -2; 1) ; \vec{v}(1; 4; -2) ; \vec{w}(1; -16; 6)$

Montrer que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

E.6947   On considère l'espace muni d'un repère. Dans chacun des cas et sans justification, donner la relation :

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$$

établissant la coplanéarité des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

- 1 $\vec{u}(3; 2; 0) ; \vec{v}(1; 0; 1) ; \vec{w}(7; 6; -2)$
 2 $\vec{u}(1; 0; -1) ; \vec{v}(3; -1; 2) ; \vec{w}(1; -1; 4)$

E.2780   Au fil de cet exercice, nous considérons les deux systèmes suivants de trois équations à trois inconnues :

$$(S) : \begin{cases} 5a - 2b + 3c = 0 \\ -a + 3b + 2c = 0 \\ -a + b - c = 0 \end{cases}$$

$$(T) : \begin{cases} -2a + b - 5c = 0 \\ a - 3b - 5c = 0 \\ 5a - 2b + 14c = 0 \end{cases}$$

On se place dans un repère $(O; I; J; K)$ pour étudier la coplanarité de vecteurs dans l'espace :

- 1  Montrer que le système (S) n'admet que le triplet $(0; 0; 0)$ pour solution.

-  En déduire que les vecteurs :
 $\vec{p}(5; -1; -1) ; \vec{q}(-2; 3; 1) ; \vec{s}(11; 2; -1)$
 sont non-coplanaires.

- 2 On considère les trois vecteurs suivants :
 $\vec{u}(-2; 1; 5) ; \vec{v}(1; -3; -2) ; \vec{w}(-5; -5; 14)$
 Justifier que la coplanarité de ces trois vecteurs est équivalente à la condition :

$$\mathcal{S}_{(T)} \neq \{(0; 0; 0)\}$$

-  En déduire que les trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.

-  Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC)

- 2  On considère le point $D(0; 3; 1)$. Le point D appartient-il au plan (ABC) ? Justifier votre réponse.

-  On considère le point $E(7; 0; 4)$. Le point E appartient-il au plan (ABC) ? Justifier votre réponse.

E.2791   On munit l'espace d'un repère $(O; I; J; K)$:

- 1 On considère les quatre points suivants :

$$A(-5; -2; 3) ; B(0; 0; 6)$$

$$C(-7; -1; 7) ; D(-21; -3; 9)$$

Montrer que les points A, B, C, D sont coplanaires.

- 2 On considère les 5 points suivants :

$$E(-2; 1; -1) ; F(-4; 3; -2)$$

$$G(-3; 4; -4) ; H(-5; 6; 2) ; L(-11; 8; 5)$$

Monter que la droite (HL) n'est pas parallèle au plan (EFG) .

E.2800   Dans l'espace muni d'un repère $(O; I; J; K)$, on considère les quatre points suivants :

$$A(5; -4; 3) ; B(7; -5; 6)$$

$$C(10; -2; 1) ; D(-11; -14; 17)$$

Montrer que les points A, B, C, D sont coplanaires.

E.2815   On considère dans l'espace muni d'un repère les deux vecteurs suivants définis par leurs coordonnées :

$$\vec{u} = (3; 2; 1) ; \vec{v} = (-1; 3; 1)$$

On considère le vecteur $\vec{w}$ défini en fonction de x un nombre réel par ses coordonnées :
 $\vec{w}(2; 16; x)$

Déterminer le(s) valeur(s) de x tel(les) que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.

E.5437   Dans l'espace muni d'un repère $(O; I; J; K)$ orthonormé, on considère quatre points repérés par leurs coordonnées :

$$A(3; -1; 5) ; B(-2; 2; 3) ; C(-1; -2; 4) ; D(5; 8; 4)$$

Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires?

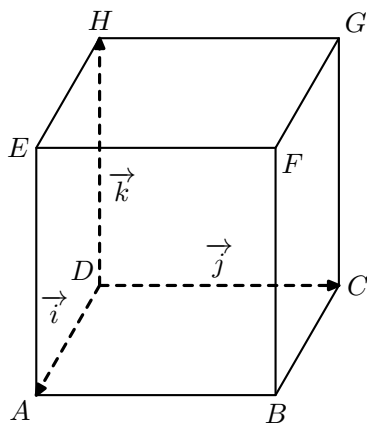
E.6316   Dans l'espace muni d'un repère $(O; I; J; K)$ orthonormé, on considère quatre points repérés par leurs coordonnées :

$$A(3; -1; 5) ; B(-2; 2; 3) ; C(-1; -2; 4) ; D(5; 8; 4)$$

Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires?

8. Equation cartésienne du plan

E.4125   On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



On munit l'espace du repère $(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE})$.

- 1) Nommer les plans admettant les équations cartésiennes suivantes :

- (a) $z = 0$ (b) $y = 1$
 (c) $x + y = 1$ (d) $x + y + z = 2$
 (e) $x + y + z = 1$ (f) $x - y = 0$

- 2) Déterminer l'équation cartésienne de chacun des plans suivants :

- (a) (EHD) (b) (FGH) (c) (HDC)

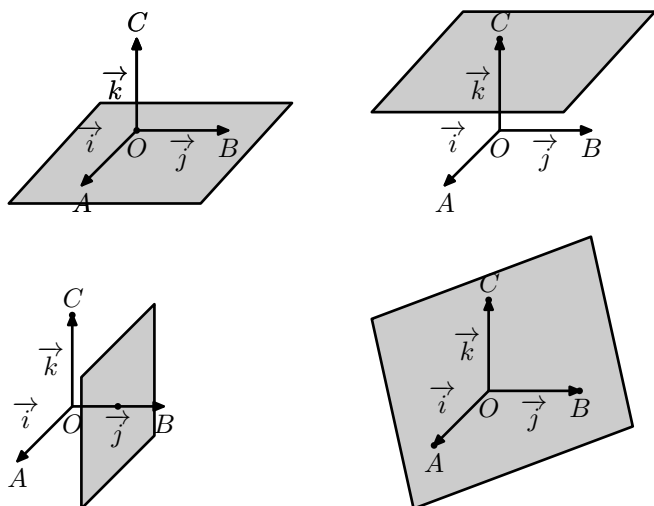
- 3) (a) Justifier que le vecteur $\overrightarrow{BG}$ est orthogonal au plan (EFC) .

- (b) En déduire une équation du plan (EFC) .

E.4119   On considère les quatre points suivants :

- 1) le plan (P_1) est parallèle au plan (OAB) et passe par le point C ;
 2) le plan (P_2) passent par les points A, B, C ;
 3) le plan (P_3) médian du segment $[OB]$;
 4) le plan (P_4) est parallèle au plan (OAB) et passe par le point O ;

Associer à chaque plan une des représentations ci-dessous et donner son équation cartésienne.



E.5418   Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère le plan (P) passant par le point $A(1; 2; -1)$ et admettant le vecteur $\vec{n}(1; -1; 3)$ pour vecteur normal.

- 1) Déterminer une équation cartésienne du plan P .
 2) Les points $B(2; 8; 1)$ et $C(-2; 5; 1)$ appartiennent-ils au plan P ?

E.5416   Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé, on considère le plan (P) passant par le point A et admettant $\vec{n}$ pour vecteur normal où :

$$A(3; 1; 2) \quad ; \quad \vec{n}(2; 1; -1)$$

On considère les points M et N deux points de l'espace où :

$$M(4; -2; 1) \quad ; \quad N(-2; 8; 2)$$

Les points M et N appartiennent-ils au plan (P) ?

E.4092    L'espace E est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1; 0; 2)$, $(1; 1; 4)$ et $(-1; 1; 1)$.

- 1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

- 2) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3; 4; -2)$.

- (a) Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

- (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .

E.4097    L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère les points :

$$A(1; -1; 4) \quad ; \quad B(7; -1; -2) \quad ; \quad C(1; 5; -2)$$

- 1) Justifier que les trois points A, B, C forment un plan.

- 2) Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; 1; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

- 3) En déduire que $x + y + z - 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

E.4095    L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé. On considère les deux points :

$$A(8; 0; 8) \quad ; \quad B(10; 3; 10)$$

ainsi que la droite (d) admettant pour représentation paramétrique :

$$(d) : \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

- 1) (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) définie par A et B .

- (b) Démontrer que (d) et (Δ) sont non coplanaires.

- 2) Le plan (P) est parallèle à (d) et contient (Δ) . Montrer que le vecteur $\vec{n}(2; -2; 1)$ est un vecteur normal à (P) . Déterminer une équation cartésienne du plan (P) .

9. Equation cartésienne du plan - recherche du vecteur normal

E.4111   L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère le plan $(\mathcal{P})$ admettant l'équation cartésienne suivante :

$$(\mathcal{P}) : 5x - 2y + z - 5 = 0$$

- 1 Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan $(\mathcal{P})$.
- 2 Déterminer l'équation du plan $(\mathcal{Q})$ parallèle au plan $(\mathcal{P})$ et passant par le point $A(5; -1; 2)$

E.5419   Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les trois points :

$$A(1; 1; -2) \quad ; \quad B(3; -1; 2) \quad ; \quad C(0; 2; 1)$$

- 1 Justifier que les trois points définissent un plan.
- 2 Déterminer un vecteur normal non-nul au plan (ABC) ayant ses coordonnées entières.
- 3 Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

E.4112   L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère les points $A(2; -3; -1)$ et $B(-1; 1; 0)$.

Déterminer l'équation du plan médiateur du segment $[AB]$.

E.4251   Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on donne les trois points :

$$A(1; 2; -1) \quad ; \quad B(-3; -2; 3) \quad ; \quad C(0; -2; -3)$$

- 1 Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; -1; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
- 2 Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

E.4245    L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

on considère les points :

$$A(1; -1; 4) \quad ; \quad B(7; -1; -2) \quad ; \quad C(1; 5; -2)$$

- 1 Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.
- 2 Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
- 3 Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; 1; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
- 4 En déduire que $x+y+z-4=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

10. Positions relatives de plans

E.5420   Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ admettant pour équation cartésienne :

$$(\mathcal{P}) : 2x - y + z + 3 = 0 \quad ; \quad (\mathcal{P}') : -4x + 2y - 2z - 1 = 0$$

Justifier que ces deux plans sont parallèles.

E.5463    Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on donne les trois points :

$$A(1; 2; -1) \quad ; \quad B(-3; -2; 3) \quad ; \quad C(0; -2; -3)$$

- 1
 - a Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
 - b Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; -1; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

- 2 Soit $(\mathcal{P})$ le plan dont une équation cartésienne est :
$$x + y - z + 2 = 0$$

Démontrer que les plans (ABC) et $(\mathcal{P})$ sont perpendiculaires.

E.5536    On considère :

- (P_1) le plan d'équation : $x+y+z=0$;
- (P_2) le plan d'équation : $x+4y+2=0$.

- 1 Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.
- 2 Vérifier que la droite (d) , intersection des plans (P_1) et (P_2) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

11. Plan sécant et représentation paramétrique de l'intersection

E.3129    L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soit $(\mathcal{P}_1)$ le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ et $(\mathcal{P}_2)$ le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$.

- 1 Montrer que $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont perpendiculaires.

On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si, et seulement si, un vecteur normal non nul à l'un est or-

thogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

- 2 Soit (D) la droite d'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

Montrer qu'une représentation paramétrique de (d) est :

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

E.5421 Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ admettant pour équation cartésienne:

$$(\mathcal{P}): x + 2y - z + 3 = 0 \quad ; \quad (\mathcal{P}'): 4x - 2y + z - 1 = 0$$

- 1 Justifier que ces deux plans sont sécants.
- 2 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

E.4093 Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormal, on considère les deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ admettant pour équations cartésiennes:

$$(\mathcal{P}_1): 2x + y + 2z + 1 = 0 \quad ; \quad (\mathcal{P}_2): x - 2y + 6z = 0$$

Montrer que les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants selon une droite (d) dont on déterminera une représentation paramétrique.

E.4039 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère:

- les quatre points:

$$A(0; 0; 3) \quad ; \quad E(2; 0; 4) \quad ; \quad C(-1; 1; 2) \quad ; \quad D(1; -4; 0)$$

- les deux plans:

$$(\mathcal{P}_1): 7x + 4y - 3z + 9 = 0 \quad ; \quad (\mathcal{P}_2): x - 2y = 0.$$

- Les deux droites admettant pour représentation paramétrique:

$$(\Delta_1) \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -8 + 2t \\ z = -10 + 5t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} \quad ; \quad (\Delta_2) \begin{cases} x = 7 + 2t' \\ y = 8 + 4t' \\ z = 8 - t' \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point; une réponse inexacte enlève 0,25 point; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Le plan $(\mathcal{P}_1)$ est	Le plan (ABC)	Le plan (BCD)	Le plan (ACD)	Le plan (AED)
La droite (Δ_1) contient	Le point A	Le point B	Le point C	Le point D
Position relative de $(\mathcal{P}_1)$ et de (Δ_1)	(Δ_1) est strictement parallèle à $(\mathcal{P}_1)$	(Δ_1) est incluse dans $(\mathcal{P}_1)$	(Δ_1) coupe $(\mathcal{P}_1)$	(Δ_1) est orthogonale à $(\mathcal{P}_1)$
Position relative de (Δ_1) et de (Δ_2)	(Δ_1) est strictement parallèle à (Δ_2)	(Δ_1) et (Δ_2) sont confondues	(Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes	(Δ_1) et (Δ_2) sont non coplanaires.
L'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et de $(\mathcal{P}_2)$ est une droite dont une représentation paramétrique est	$\begin{cases} x = t \\ y = -2 + \frac{1}{2}t \\ z = 3t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 5t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$	$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3t \end{cases}$

E.5537 On considère les deux plans (P_1) et (P_2) d'équations cartésiennes:

$$(P_1): 2x + y - z + 1 = 0 \quad ; \quad (P_2): x - y + 2z + 3 = 0$$

- 1 Justifier que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.
- 2 Déterminer une équation paramétrique de la droite d'intersection des plans (P_1) et (P_2) .

E.4131 L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ d'équations respectives:

$$x + y + z = 0 \quad ; \quad 2x + 3y + z - 4 = 0$$

- 1 Montrer que l'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ est la droite (d) dont une représentation paramétrique est:

$$\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

- 2 Soit λ un nombre réel.

On considère le plan $(\mathcal{P}_\lambda)$ d'équation:

$$(1 - \lambda) \cdot (x + y + z) + \lambda \cdot (2x + 3y + z - 4) = 0$$

- a Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1 + \lambda; 1 + 2\lambda; 1)$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P}_\lambda)$.
- b Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_\lambda)$ sont confondus.
- c Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_\lambda)$ sont perpendiculaires?
- 3 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d') , intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_{-1})$.
Montrer que les droites (d) et (d') sont confondus.

Indication: dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère le point $A(1; 1; 1)$.

Déterminer la distance du point A à la droite (d) , c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite (d) .

12. Positions relatives de droites et de plans

E.4088



L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère :

- $(\mathcal{P})$ est le plan passant par $A(3; 1; 2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1; -4; 1)$;
- (d) est la droite passant par $B(1; 4; 2)$ de vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 3)$.

- 1 Démontrer que le plan $(\mathcal{P})$ a pour équation cartésienne : $x - 4y + z - 1 = 0$
- 2 Montrer que la droite (d) est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

E.5451



Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère la droite (d) dont on donne une représentation paramétrique, et le plan $(\mathcal{P})$ dont on donne une équation cartésienne :

$$(d) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 4t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} ; \quad (\mathcal{P}) : 3x + 2y - z - 5 = 0$$

Montrer que la droite (d) est strictement parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

E.5422



Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère la droite (d) admettant la représentation paramétrique et le plan $(\mathcal{P})$ admettant l'équation cartésienne définie par :

$$(d) : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} ; \quad (\mathcal{P}) : 2x - 4y - 2z + 3 = 0$$

- 1 a Justifier que la droite (d) est parallèle au plan $(\mathcal{P})$.
b La droite (d) est-elle incluse dans le plan $(\mathcal{P})$?
- 2 On considère le plan $(\mathcal{P}')$ admettant pour équation cartésienne : $(\mathcal{P}') : 2x - 4y - 2z + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$
Déterminer la valeur du paramètre c afin que la droite (d) soit incluse dans le plan $(\mathcal{P}')$.

E.4083



L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé direct. On considère les points :

$$A(-2; 0; 1) ; B(1; 2; -1) ; C(-2; 2; 2)$$

On admettra que les points A , B et C ne sont pas alignés.

- 1 Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$
- 2 Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les plans d'équations respectives : $x + y - 3z + 3 = 0$; $x - 2y + 6z = 0$

Montrer que les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants selon une droite (d) dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

- 3 Démontrer que la droite (d) et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

E.5423



Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère la droite (d) admettant la représentation paramétrique et le plan $(\mathcal{P})$ admettant l'équation cartésienne définie par :

$$(d) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} ; \quad (\mathcal{P}) : 3x - y + 2z + 1 = 0$$

- 1 Justifier que la droite (d) est sécante au plan $(\mathcal{P})$.
- 2 Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) et du plan $(\mathcal{P})$.

E.3113



On considère la droite paramétrique :

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

et le plan dont une équation cartésienne est :

$$x + 2y + z - 3 = 0$$

Justifier que ce plan et cette droite sont parallèles.

E.4037



L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On note (D) la droite passant par les points $A(1; -2; -1)$ et $B(3; -5; -2)$.

- 1 Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

- 2 On note (D') la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

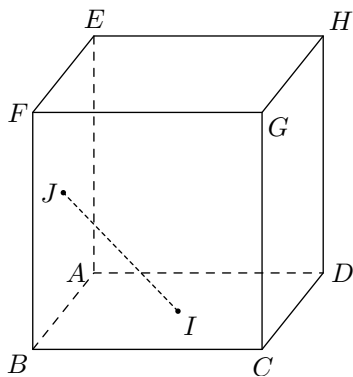
- 3 On considère le plan (P) d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.

- a Montrer que le plan (P) contient la droite (D) .
b Montrer que le plan (P) et la droite (D') se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

E.4129



Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$. Les points I et J représentent respectivement les centres des faces $ABCD$ et $ABFE$.



On munit l'espace du repère $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$.

- 1 a Donner les coordonnées des points I et J .

- b Donner une représentation paramétrique de la droite (IJ) .

- 2 On considère la droite (Δ) admettant la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \frac{1}{2} + 2t \\ z = -t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Démontrer que les droites (Δ) et (IJ) sont non coplanaires.

- 3 a Justifier que le plan (AGH) admet pour équation : $y - z = 0$

- b Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (IJ) et du plan (AGH) .

E.5450



Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de l'espace, on considère les plans (P) et (P') d'équations respectives :

$$(P) : x - y - z - 2 = 0 \quad ; \quad (P') : x + y + 3z = 0$$

- 1 On considère la droite (d) admettant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

- a Justifier que la droite (d) est orthogonale au plan (P) .
b Déterminer les coordonnées du point M d'intersection du plan (P) avec la droite (d) .

- 2 On considère la droite (Δ) ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{cases} \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}$$

- a Justifier que les plans (P) et (P') sont sécants.
b Montrer que la droite (Δ) est la droite d'intersection des plans (P) et (P') .

13. Equation cartésienne du plan et projeté orthogonal

E.3213



Pour cet exercice, recopier pour chaque question, votre réponse.

Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée.

Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse.

La note finale de l'exercice ne pourra pas être inférieure à zéro.

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormé.

- 1 La droite passant par $A(1; 2; -4)$ et $B(-3; 4; 1)$ et la droite (d) représentée par :

$$\begin{cases} x = -11 - 4t \\ y = 8 + 2t \\ z = 11 + 5t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

- a sécantes b strictement parallèles

- c confondues d non coplanaires

- 2 Soient le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + 3y - z + 4 = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ représentée par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 8 + t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

- a $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont sécants

- b $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont strictement parallèles

- c $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$

- d Aucune de ces possibilités n'est vraie.

- 3 La distance du point $A(1; 2; -4)$ au plan d'équation

$2x + 3y - z + 4 = 0$ est :

- (a) $\frac{8\sqrt{14}}{7}$ (b) 16 (c) $8\sqrt{14}$ (d) $\frac{8}{7}$

4 Soient le point $B(-3; 4; 1)$ et la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 16$:

- (a) B est à l'intérieur de $\mathcal{S}$ (b) B est à l'extérieur de $\mathcal{S}$
(c) B est sur $\mathcal{S}$ (d) On ne sait pas

E.4242 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on donne les points :

$$A(3; 2; -1) \quad ; \quad B(-6; 1; 1) \\ C(4; -3; 3) \quad ; \quad D(-1; -5; -1)$$

- 1 Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2x - 3y + 4z - 13 = 0$
2 Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD) .
3 Calculer le produit scalaire : $\vec{BH} \cdot \vec{CD}$

E.4240 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $-x + 3y - z + 5 = 0$ et le

point $A(1; -2; 1)$

- 1 Déterminer la représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
2 En déduire les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.
3 Déterminer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$.

E.6084 On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation :

$$x - y + 3z + 1 = 0$$

et la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

On donne les points :

$$A(1; 1; 0) \quad ; \quad B(3; 0; -1) \quad ; \quad C(7; 1; -2)$$

- 1 Justifier que la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
2 Les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont-ils parallèles? Justifier votre réponse?
3 Déterminer les coordonnées du point M projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

14. Un peu plus

E.4317 On considère un cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1. On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH) .

- 1 On se place dans le repère $(D; \vec{DA}; \vec{DC}; \vec{DH})$. Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :
 $A(1; 0; 0) \quad ; \quad B(1; 1; 0) \quad ; \quad C(0; 1; 0) \quad ; \quad D(0; 0; 0)$
 $E(1; 0; 1) \quad ; \quad F(1; 1; 1) \quad ; \quad G(0; 1; 1) \quad ; \quad H(0; 0; 1)$
(a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC) .
(b) Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH) .
(c) En déduire les coordonnées du point I , puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH) .
(d) Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
(e) Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF) .
Que représente le point I pour le triangle AFH ?

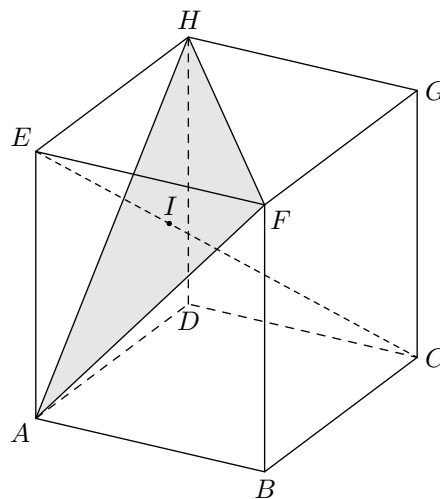
2 **Indication :** dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Définitions :

- Un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont la même aire ;
- il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;

- il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

Préciser de quel(s) type(s) est le tétraèdre $EAFH$.



E.5462    L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation $3x+y-z-1=0$ et (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ désigne un nombre réel.}$$

- 1
 - a Le point $C(1; 3; 2)$ appartient-il au plan $(\mathcal{P})$? Justifier.
 - b Démontrer que la droite (d) est incluse dans le plan $(\mathcal{P})$.

- 2 Soit $(\mathcal{Q})$ le plan passant par le point C et orthogonal à la droite (d) .

- a Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$.
- b Calculer les coordonnées du point I , point d'intersection du plan $(\mathcal{Q})$ et de la droite (d) .
- c Montrer que : $CI = \sqrt{3}$.

- 3 Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite (d) de coordonnées : $M_t(-t+1; 2t; -t+2)$

- a Vérifier que pour tout nombre réel t , : $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.
- b Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

15. Cours - Vecteurs et espaces

E.5504   On considère l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé :

- 1 $(\mathcal{P})$ un plan passant par le point A et admettant le vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ pour vecteur normal.

Montrer que le plan $(\mathcal{P})$ admet pour équation cartésienne l'équation suivante :

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0 \quad \text{où } d \in \mathbb{R}.$$

- 2 Soit a, b, c, d quatre nombres réels où a, b, c sont tous non-nuls. Montrer que l'ensemble des points vérifiant l'équation cartésienne ci-dessous est un plan de l'espace : $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$

E.5505   Une droite est orthogonale à un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

16. Ancienne annales (avant 2012)

E.3153    L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

- 1 On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $B(1; -2; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2; 1; 5)$ et le plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne $x+2y-7=0$

- a Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.
- b Démontrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est la droite Δ passant par le point $C(-1; 4; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 1)$.
- c Soit le point $A(5; -2; -1)$. Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ puis la distance du point A au plan $\mathcal{R}$.
- d Déterminer la distance du point A à la droite Δ .

- 2
 - a Soit, pour tout nombre réel t , le point M_t de coordonnées $(1+2t; 3-t; t)$. Déterminer en fonction de t la longueur AM_t .

On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- a Étudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.
- b Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

E.4055    L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la position relative d'objets de l'espace.

$\mathcal{P}$ est le plan passant par $A(3; 1; 2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1; -4; 1)$;

$\mathcal{D}$ est la droite passant par $B(1; 4; 2)$ de vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 3)$.

$\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1; 9; 0)$ passant par A .

- 1 **Intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$.**

- a Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x - 4y + z - 1 = 0$
- b Montrer que la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

- 2 **Intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$.**

- a Calculer la distance d du point Ω au plan $\mathcal{P}$.
- b Calculer le rayon de la sphère $\mathcal{S}$. En déduire l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$.

- 3 **Intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de la sphère $\mathcal{S}$.**

- a Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
- b Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.

- c En déduire que la droite $\mathcal{D}$ coupe la sphère $\mathcal{S}$ en deux points M et N distincts dont on ne cherchera pas à déterminer les coordonnées.

E.3126    L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé direct.

Il n'est pas demandé de faire de figure.

Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2.

On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; B \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} ; C \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ; I \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- 1 a Calculer le produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
b Déterminer une équation cartésienne du plan con-

tenant les trois points A, B, C .

- 2 Soit (Q) le plan d'équation : $x+y-3z+2=0$ et (Q') le plan de repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

- a Pourquoi (Q) et (Q') sont-ils sécants?
b Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection (Δ) des plans (Q) et (Q') .

- 3 Écrire une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ de centre I et de rayon 2.

- 4 On considère les points J et K de coordonnées respec-

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer avec soin l'intersection de la sphère $(\mathcal{S})$ et de la droite (JK) .

17. Cours - ancien programme : Espaces

E.3906   Soit D le point de coordonnées $(x_D; y_D; z_D)$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$, où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls.

Démontrer que la distance du point D au plan $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$d(D, \mathcal{P}) = \frac{|a \cdot x_D + b \cdot y_D + c \cdot z_D + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

E.4090    Soit a, b, c et d des réels tels que : $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$.

On considère le point I de coordonnées $(x_I; y_I; z_I)$ et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a; b; c)$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I

au plan $\mathcal{P}$ est égale à :

$$\frac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- 1 Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan $\mathcal{P}$. Déterminer, en fonction de a, b, c, x_I, y_I et z_I , un système d'équations paramétriques de Δ .

- 2 On note H le point d'intersection de Δ et $\mathcal{P}$.

- a Justifier qu'il existe un réel k tel que : $\vec{IH} = k \cdot \vec{n}$.
b Déterminer l'expression de k en fonction de a, b, c, d, x_I, y_I et z_I .

- c En déduire que : $IH = \frac{|a \cdot x_I + b \cdot y_I + c \cdot z_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

18. Exercices non-classés

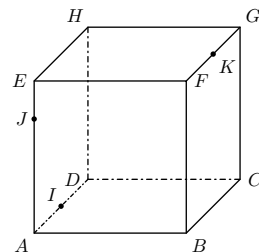
E.7247   Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

E.8139   

La figure ci-contre représente un cube $ABCDEFGH$. Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment $[AD]$
- J est tel que : $\vec{AJ} = \frac{3}{4} \cdot \vec{AE}$
- K est le milieu du segment $[FG]$.



On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK) . Le point R est donc l'unique point du plan (IJK) tel que la droite (FR) est orthogonale au plan (IJK) .

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points

$$M(x; y; z) \text{ tels que : } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$$

Le point R est-il à l'intérieur du cube?

E.5417 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère le plan $(\mathcal{P})$ admettant pour équation cartésienne :

$$2x + 3y - z + 1 = 0$$

Le vecteur $\vec{u}(4; -2; 2)$ admet-il un représentant inclus dans le plan $(\mathcal{P})$.

E.3858 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère :

- le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $B(1; -2; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2; 1; 5)$;
- le plan $\mathcal{R}$ d'équation cartésienne : $x + 2y - 7 = 0$.

- Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont perpendiculaires.
- Démontrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ est la droite Δ passant par le point $C(-1; 4; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 1)$.
- Soit le point $A(5; -2; -1)$. Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ puis la distance du point A au plan $\mathcal{R}$.
- Déterminer la distance du point A à la droite Δ .

E.4089 Le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $x - y + z - 11 = 0$ est tangent à une sphère $\mathcal{S}$ de centre le point Ω de coordonnées $(1; -1; 3)$.

- Déterminer le rayon de la sphère $\mathcal{S}$.
- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan $\mathcal{Q}$.
- En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{Q}$.

E.4106 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on donne les points :

$$A(3; 2; -1) \quad ; \quad B(-6; 1; 1)$$

$$C(4; -3; 3) \quad ; \quad D(-1; -5; -1)$$

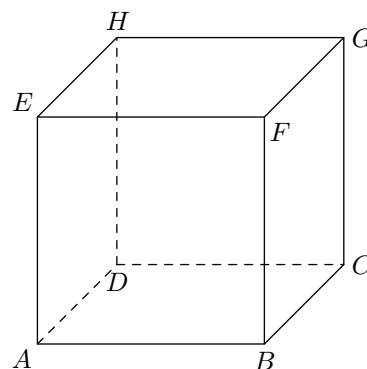
- Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2x - 3y + 4z - 13 = 0$
- Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD) .
- Calculer le produit scalaire $\vec{BH} \cdot \vec{CD}$.

E.4134 L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ et on désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation :

$$3x + 2y = 29$$

- Démontrer que $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe (Oz) de vecteur directeur $\vec{k}$.
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les axes (Ox) et (Oy) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les trois plans de coordonnées.
- Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (xOy) , les points dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.

E.4329 On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-dessous :



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $(D; \vec{DA}; \vec{DC}; \vec{DH})$.

On note K le barycentre des points pondérés $(D; 1)$ et $(F; 2)$.

Partie A

- Montrer que le point K a pour coordonnées $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.
- Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.
- Calculer la distance EK .

Partie B

Soit M un point du segment $[HG]$.

On note $m = HM$ (m est donc un réel appartenant à $[0; 1]$).

- Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, le volume du tétraèdre $EMFD$, en unités de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.
- Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est : $(-1 + m) \cdot x + y - m \cdot z = 0$.
- On note d_m la distance du point E au plan (MFD) .
 - Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$:
$$d_m = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot m^2 - 2 \cdot m + 2}}$$
 - Déterminer la position de M sur le segment $[HG]$ pour laquelle la distance d_m est maximale.
 - En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan

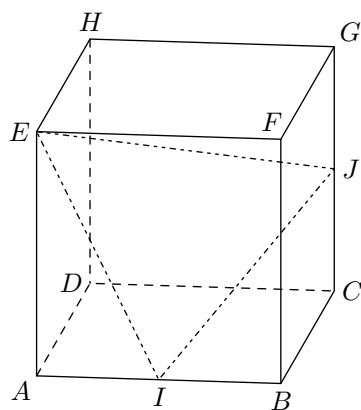
(MFD)

E.6068



On considère le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1,

et on note I et J les milieux des arêtes $[AB]$ et $[CG]$. On utilisera le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

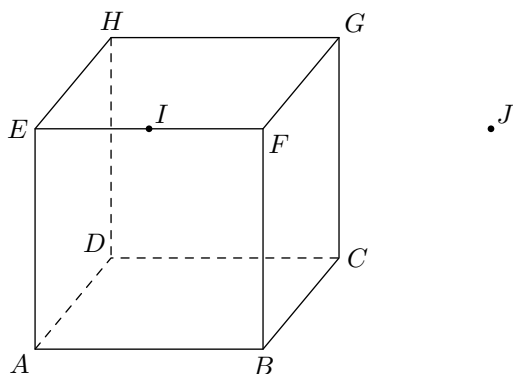


- 1 Déterminer l'équation cartésienne du plan EFJ .
- 2 Déterminer les coordonnées du point P projeté du point I sur le plan (EFJ) .
- 3 Déterminer la distance IP .
- 4 Montrer que le volume du tétraèdre $EFIJ$ est égal à $\frac{1}{6}$.

E.4046



On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de $[EF]$ et par J l'image de E par la symétrie de centre F .



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

- 1 a Déterminer les coordonnées des points I et J .
b Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI) .
c En déduire une équation cartésienne du plan (BGI) .
d Calculer la distance du point F au plan (BGI) . (hors programme 2012).
- 2 On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI) .
a Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) .
b Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face $ADHE$.
c Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L , de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.
d **Indication:** dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

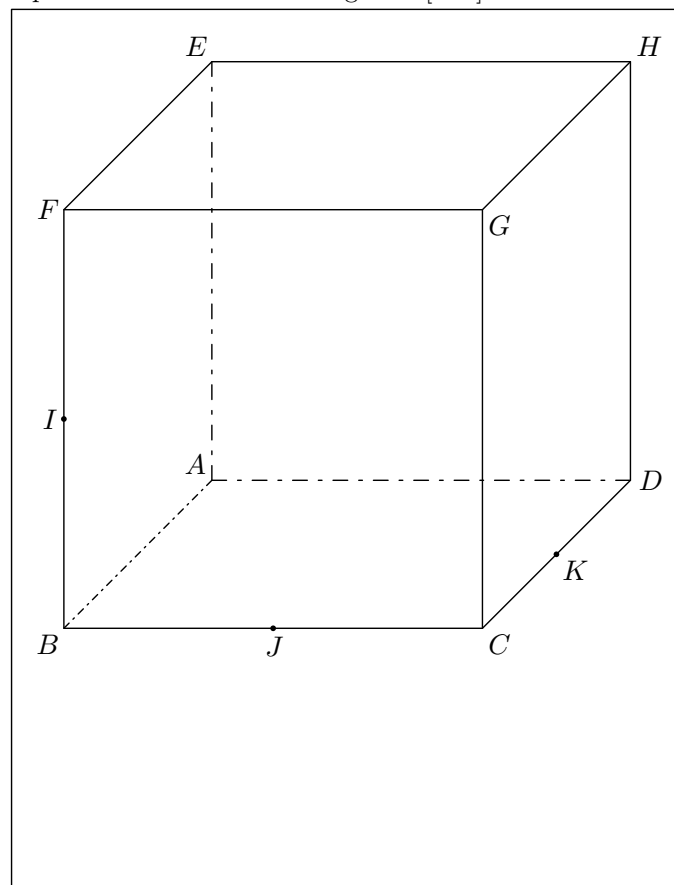
E.6882



$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1. Le point I est le milieu du segment $[BF]$.

Le point J est le milieu du segment $[BC]$.

Le point K est le milieu du segment $[CD]$.



Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L .

Construire, sur la figure fournie ci-dessus et en laissant apparent les traits de construction :

- le point L ;
- l'intersection $\mathcal{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK) .

Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

- 1 Donner les coordonnées A, G, I, J et K dans ce repère.
- 2 a Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) .
b En déduire une équation cartésienne du plan (IJK) .
- 3 On désigne par M un point du segment $[AG]$ et t le réel de l'intervalle $[0; 1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AG}$.
a Démontrer que: $MI^2 = 3 \cdot t^2 - 3 \cdot t + \frac{5}{4}$
b Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
- 4 Démontrer que pour ce point $N \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$:
a N appartient au plan (IJK) .
b La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF) .