

1. *Rappels: suites arithmétiques et géométriques*

E.3393   On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $\frac{3}{4}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

- 1 Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
- 2 Donner la formule explicite de (u_n) donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
- 3 Déterminer la valeur de la suite suivante :

$$S = u_5 + u_6 + \dots + u_{12}$$

E.3394   On considère la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $\frac{16}{27}$ et de raison $\frac{3}{2}$.

- 1 Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
- 2 Donner la formule explicite de (u_n) donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
- 3 Déterminer la valeur de la suite suivante :

$$S = u_3 + u_4 + \dots + u_{16}$$

E.5012  

- 1 Soit (u_n) une suite arithmétique définie pour $n \in \mathbb{N}$. On a la valeur des deux termes suivants :

$$u_4 = 3 \quad ; \quad u_7 = 15$$

- a Déterminer les éléments caractéristiques de la suite (u_n) .
 - b Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite (u_n) .
- 2 Soit (v_n) une suite géométrique définie pour $n \in \mathbb{N}$. On a la valeur des deux termes suivants :

$$v_2 = 2 \quad ; \quad v_5 = 54$$

- a Déterminer les éléments caractéristiques de la suite (v_n) .
- b Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite (v_n) .

E.6724   On considère les deux suites de nombres ci-dessous dont on donne les sept premiers termes :

$$\text{a) } 3 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad 7 \quad ; \quad 10 \quad ; \quad 12 \quad ; \quad 14 \quad ; \quad 16$$

$$\text{b) } 6 \quad ; \quad 3,5 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad -1,5 \quad ; \quad -4 \quad ; \quad -6,5 \quad ; \quad -9$$

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite arithmétique?

Si oui, donner le premier terme et la raison. Si non, justifier votre rejet de cette affirmation.

E.6725   On considère les deux suites de nombres ci-dessous où sont donnés les six premiers termes :

$$\text{a) } 8 \quad ; \quad 4 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{4}$$

$$\text{b) } 1 \quad ; \quad 3 \quad ; \quad 9 \quad ; \quad 18 \quad ; \quad 54 \quad ; \quad 162$$

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite géométrique?

Si oui, préciser le premier terme et la raison. Sinon, justifier votre rejet de la conjecture.

E.3398   En identifiant chacune des sommes comme une somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique, déterminer chacune de leurs valeurs :

$$\text{a) } 12 + 7 + 2 + (-3) + \dots + (-28)$$

$$\text{b) } 27 + 3 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{243}$$

$$\text{c) } \frac{2}{3} + \frac{8}{3} + \frac{14}{3} + \dots + \frac{62}{3}$$

$$\text{d) } \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{24}}$$

E.3807   On considère la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont les six premiers termes vérifient :

- Les six premiers termes sont tous positifs et leur somme vaut 1.
- Les six premiers termes de la suite sont non constants.
- Les six premiers termes de (p_n) sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique.
- Les nombres p_1, p_2, p_4 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Déterminer la valeur des six premiers termes de la suite (p_n) .

2. *Rappels: autres*

E.3395  

- 1 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Déterminer la valeur des huit premiers termes de la suite (u_n) .

- 2 On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_1 = 2 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{v_n} + n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n) .

E.3396   Déterminer la valeur de chacune des sommes suivantes :

$$\text{a) } \sum_{i=0}^7 i \quad \text{b) } \sum_{i=3}^8 (i^2 - i) \quad \text{c) } \sum_{i=0}^7 (i - 4)$$

$$\text{d) } \sum_{i=1}^6 \frac{1}{i} \quad \text{e) } \sum_{i=1}^4 \frac{1}{i^2} \quad \text{f) } \sum_{\ell=0}^3 \left[\sum_{i=0}^{\ell} i \right]$$

E.5042   Justifier que, dans chaque question, les informations ci-dessous ne définissent pas de suites :

a $u_0 = 5$; $u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

b $u_0 = 1$; $u_1 = 4$; $u_{n+1} = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c $u_0 = 3$; $u_n = 2 \cdot u_{n-1} - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

d $u_0 = -1$; $u_n = \frac{u_{n-1} - 2}{u_{n-1} + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3. Limites de suites arithmétiques et géométriques

E.6726  

1 On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme -4 et de raison 5 :

a Compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	-4	1	6	11	16	21		

b Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme u_n lorsque le rang n devient de plus en plus grand?
On notera : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$

2 On considère la suite (v_n) arithmétique de premier terme 3 et de raison $-1,2$:

a Compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n	3	1,8	0,6	-0,6	-1,8	-3		

b Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme v_n lorsque le rang n devient de plus en plus grand?
On notera : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots$

E.6727  

1 On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 4 et de raison 2 :

a Compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	4	8	16	32	64	128		

b Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme u_n lorsque le rang n devient de plus en plus grand?
On notera : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$

2 On considère la suite (v_n) géométrique de premier terme 81 et de raison $\frac{1}{3}$:

a Compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n	81	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$		

b Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme v_n lorsque le rang n devient de plus en plus grand?
On notera : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots$

E.6728   On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme $2,8$ et de raison $0,9$.

1 À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous à l'aide de valeurs approchées au centième :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	2,8	2,52	2,268	2,041				

2 À l'aide de la calculatrice, quelle conjecture peut-on établir pour la limite des termes de la suite (u_n) ?

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$

E.2557  

1 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie explicitement par :
 $u_n = 9n - 5$

a Déterminer la nature de la suite (u_n) en précisant ses caractéristiques.

b Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2 On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie explicitement par :
 $v_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

a Déterminer la nature de la suite (v_n) en précisant ses caractéristiques.

b Déterminer la limite de la suite (v_n) .

E.6729   Donner, si possible, les limites des suites suivantes :

1 La suite (u_n) est géométrique de premier terme strictement négatif et de raison 2 .

2 La suite (v_n) est géométrique de premier terme strictement positif et de raison -3 .

3 La suite (w_n) est géométrique de premier terme strictement négatif et de raison $-0,2$.

4. Limites de somme des termes de suites

E.2559  

1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison -1 .

a Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang n .

b On note $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de S_n en

fonction de n .

(c) En déduire la limite: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

(2) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{1}{2}$.

(a) Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang n .

(b) On note $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de S'_n en fonction de n .

(c) En déduire la limite: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$.

E.2588   Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{2}{5}$:

(1) Déterminer les trois premiers termes de cette suite.

(2) (a) Déterminer l'expression de la somme des $n+1$ premiers termes de cette suite en fonction de n .

(b) En déduire la valeur de la limite suivante:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

E.2622   On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 4×5^2 et de raison $\frac{1}{5}$ et la somme S_n définie par:

$$S_n = u_3 + u_4 + \dots + u_n \quad \text{pour tout } n \geq 5$$

(1) Déterminer l'expression de S_n en fonction de n .

(2) Justifier que la suite (S_n) converge vers 1.

E.2621   On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$ et la suite (R_n) définie, pour $n \geq 2$, par la somme:

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n}$$

Déterminer la limite de la suite (R_n) .

E.3105   Déterminer, en justifiant vos démarches, les limites des sommes suivantes:

(a) $S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(b) $S'_n = -\frac{15}{4} + 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \dots + 5 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n$

E.6174   Un coureur se lance un défi: il souhaite faire le tour de l'Europe.

Le premier jour, il parcourt 50 km. Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de 1 %.

On note u_n la longueur parcourue par le coureur le n -ième jour. En supposant que le coureur poursuive indéfiniment sa course, on obtient une suite (u_n) définie pour tout entier naturel non-nul.

(1) Déterminer la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n) .

(2) (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n) .

(b) Exprimer le terme u_n en fonction du rang n .

(c) Quelle distance sera parcourue par le coureur le 100^e jour? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.

(3) On note S la somme des n premiers termes de la suite (u_n) : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(a) Exprimer la somme S_n en fonction du rang n .

(b) Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres:

n	10	100	500	750	1000
S_n					

(c) Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la somme S_n quand la valeur de n devient de plus en plus grand?

E.2560    Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km à pied.

Il peut, frais et dispos, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % tous les jours.

On notera d_n la distance parcourue durant le n -ième jour.

(1) Calculer les distances d_1 , d_2 , d_3 parcourues durant les trois premiers jours.

(2) Quelle est précisément la nature de la suite? Déterminer la valeur de d_n en fonction de n .

(3) On note L_n la distance en kilomètres parcourus au bout de n jours.

$$L_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

(a) Déterminer l'expression de L_n en fonction de n .

(b) En déduire la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$. Le globe-trotter peut-il gagner?

(c) À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4 999 km

E.5738    On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par:

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

Pour tout entier naturel non nul n , on pose:

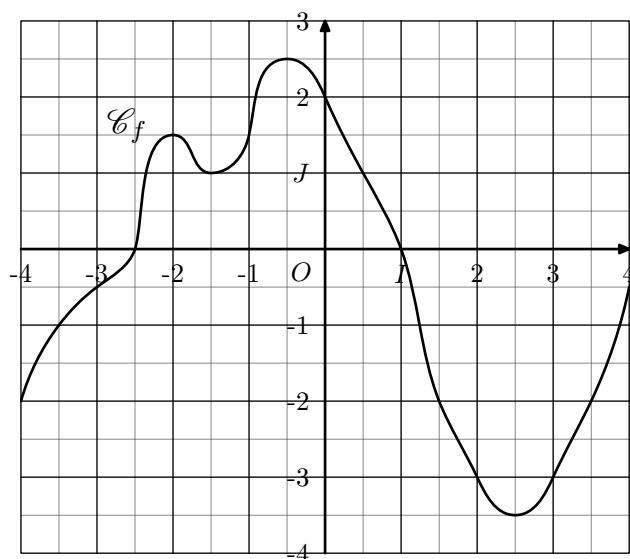
$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \dots + u_n \quad ; \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

(1) Exprimer le terme S_n en fonction de n .

(2) Déterminer la limite de la suite (T_n) .

5. Autres limites

E.3397   On considère la fonction f définie sur $[-4; 4]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous:



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation :
 $u_0 = 2$; $u_{n+1} = f(u_n)$

① Montrer que le terme u_1 est égal à -3 .

② Justifier les égalités suivantes :

Ⓐ $u_2 = -0,5$ Ⓑ $u_3 = 2,5$

③ Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										

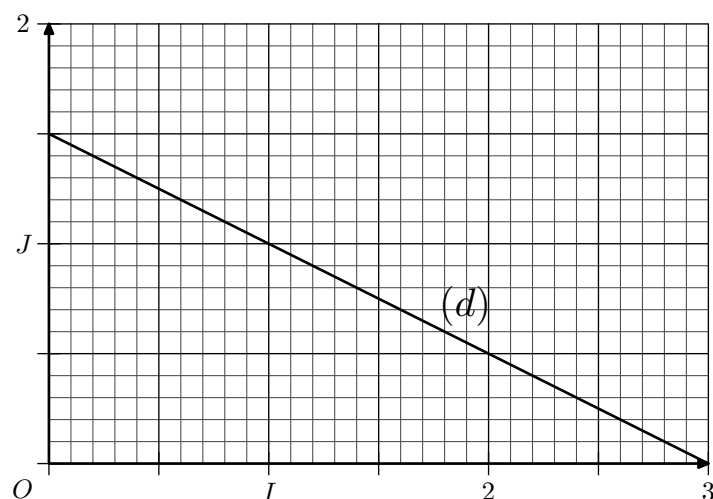
④ Que peut-on dire de la limite des termes de la suite (u_n) ?

E.3411 📖 📎 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = \frac{5}{2} ; u_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot u_n + \frac{3}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, la droite (d) ayant pour équation :

$$y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$$



6. Avec un tableur

① Graphiquement, sur l'axe des abscisses représentées les cinq premiers termes de cette suite (les constructions doivent être laissées).

② Ⓐ À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous en indiquant les valeurs arrondies au dixième près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	2,5	0,25	1,38	0,81	1,09					

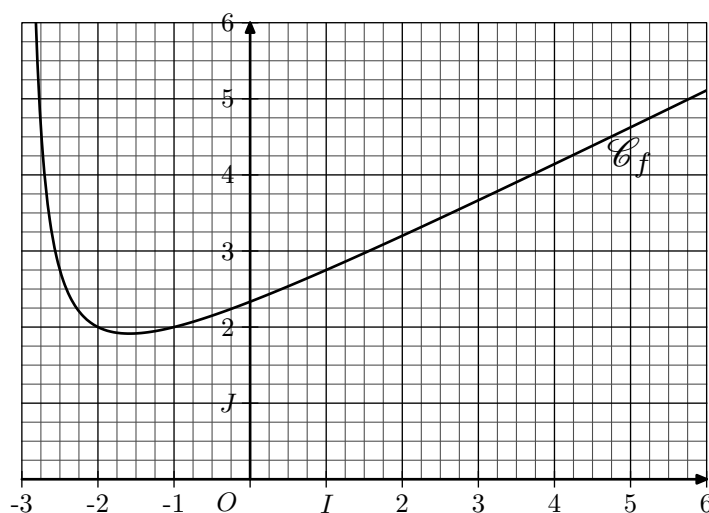
Ⓑ Quelle conjecture peut-on porter sur la limite de la suite (u_n) ?

E.3412 📖 📎 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = -1 ; u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

où la fonction f est définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 7 \cdot x + 14}{2 \cdot (x + 3)}$

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .



① Graphiquement, représenter les cinq premiers termes de cette suite sur l'axe des abscisses (les constructions doivent être laissées).

② Ⓐ À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous en y indiquant les valeurs arrondies des termes au centième près.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	-1	2	3,2	3,76	4,03	

n	6	7	8	9	10	11
u_n						

Ⓑ Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite des termes de la suite (u_n) ?

E.6732



Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau de valeurs de chacune des suites suivantes. Si nécessaire, on arrondit les valeurs au centième près :

- 1 Soit (u_n) définie par la relation :

$$u_n = 2 \cdot n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n								

- 2 Soit (v_n) définie par la relation :

$$v_0 = 5 ; \quad v_{n+1} = 0,75 \cdot v_n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Soit (w_n) définie par la relation :

$$w_n = v_n - 12 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- a Compléter le tableau de valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n								
w_n								

- b Vérifier que les 8 termes de la suite (w_n) permettent de conjecturer que la suite (w_n) est géométrique.

- 3 Soit (t_n) définie par la relation :

$$t_0 = 0 ; \quad t_1 = 1 ; \quad t_{n+1} = t_n + t_{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
t_n								

- 4 Soit (a_n) et (b_n) définies par les relations :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = -1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2 \cdot a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3 \cdot b_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n								
b_n								

E.6731



On définit les deux suites u et v par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 12 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot (u_n + 2 \cdot v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4} \cdot (u_n + 3 \cdot v_n) \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

7. Suites arithmético-géométriques

E.6733



On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$$u_0 = 8 ; \quad u_{n+1} = 0,95 \cdot u_n + 0,5 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 On définit la suite (v_n) définie par la relation :

$$v_n = u_n - 10 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- a Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95. On précisera la valeur de son premier

- 1 À l'aide d'un tableur, générer les 20 premiers termes de ces deux suites afin d'obtenir un tableau analogue à celui présenté ci-contre.

	A	B	C	D	E
1	x_n	y_n	w_n		t_n
2	1	12			
3	8,33	9,25			
4	8,94	9,02			
5	9,00	9,00			
6	9,00	9,00			

- 2 On définit la suite (w_n) par : $w_n = v_n - u_n$

- a Dans la colonne C, exprimer les 20 premiers termes de la suite w .

- b Que peut-on faire pour mettre en évidence que la suite w suit une progression géométrique sur ces 20 premiers termes?

- 2 On définit la suite t définie par : $t_n = 3 \cdot u_n + 8 \cdot v_n$

- a Exprimer les 20 premiers termes de la suite t .

- b Quelle conjecture peut-on effectuer sur la nature de la suite t ?

E.6722



On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies conjointement par les relations :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 0,8 \cdot x_n - 0,6 \cdot y_n \\ y_{n+1} = 0,6 \cdot x_n + 0,8 \cdot y_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1 À l'aide d'un tableur, générer les 100 premiers termes de la suite dans un tableau semblable à celui représenté ci-contre.

	A	B
1	x_n	y_n
2	-3	4
3	-4,8	1,4
4	-4,68	1,76
5	-2,688	-4,216
6	0,3792	-4,9856
7	3,29472	-3,76096

- 2 Utiliser l'outil graphique en sélectionnant la plage A2:B101 pour représenter dans le plan les points M_n définis par $M_n(x_n; y_n)$. On choisira le mode de représentation "XY (dispersion)".

- 3 a Quelle conjecture peut-on émettre sur la position de la suite de points (M_n) dans le plan?

- b Vérifier que le point M_0 vérifie cette conjecture.

- c Établir la relation : $OM_{n+1} = OM_n$

- d Compléter la phrase suivante :

"Si, pour tout entier naturel, les termes d'une suite vérifient la relation $u_{n+1} = u_n$ alors la suite est"

terme.

- b Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n .

- 2 En déduire une expression de la suite (u_n) en fonction de n .

- 3 Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

E.6734   On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$$u_0 = -2 \quad ; \quad u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 0,5 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 On définit la suite (v_n) définie par la relation :

$$v_n = u_n + 0,5 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 - a Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
 - b Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n .
- 2 En déduire une expression de la suite (u_n) en fonction de n .
- 3 Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

E.3399   On souhaite étudier la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On définit la suite (v_n) par :

$$v_n = u_n - 6 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

8. Suites définies conjointement

E.6739   On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies conjointement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ v_0 = 4 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = 2 \cdot u_n - v_n \\ v_{n+1} = -3 \cdot u_n + 4 \cdot v_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 On considère la suite (w_n) définie par la relation :

$$w_n = v_n - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 - a Établir que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 5.
 - b En déduire que, pour tout entier naturel n , le terme de rang n s'exprime par :

$$w_n = -5^n$$
- 2 On considère la suite (t_n) définie par :

$$t_n = 3 \cdot u_n + v_n$$
 - a Montrer que : $t_0 = 19$
 - b Établir que pour tout entier naturel, on a l'égalité :

$$t_{n+1} = t_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $t_n = 19$

- 3 Déduire une expression des termes des suites (u_n) et (v_n) en fonction de n .
- 4 En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) .

- 1 Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et sa raison.
- 2 Exprimer v_n en fonction du rang n .
- 3 En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- 4 En déduire la limite de la suite (u_n) .

E.5740    On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_1 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = 0,2 \cdot u_n + 0,04 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

On admet que pour tout entier naturel : $u_n < 0,05$

On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}^*$ par la relation :

$$v_n = u_n - 0,05$$

- 1 Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
- 2 Déterminer l'expression des termes de la suite (v_n) en fonction de n . En déduire l'expression des termes la suite (u_n) en fonction de n .
- 3 En déduire la limite de la suite (u_n) .

E.6738   On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies conjointement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = -1 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = 3 \cdot u_n - 2 \cdot v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2 \cdot v_n \end{cases}$$

- 1 On considère la suite (w_n) définie par la relation :

$$w_n = v_n - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 - a Établir que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 4.
 - b En déduire que, pour tout entier naturel n , le terme de rang n s'exprime par :

$$w_n = -4 \times 4^n$$
- 2 On considère la suite (t_n) définie par :

$$t_n = 4 \cdot u_n + 8 \cdot v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 - a Donner la valeur du terme t_0 .
 - b Établir que pour tout entier naturel, on a l'égalité :

$$t_{n+1} = t_n$$

On admettra que la suite (t_n) est constante.

- 3 Déduire une expression des termes des suites (u_n) et (v_n) en fonction de n .
- 4 En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) .

E.3414



On considère les deux suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les premiers termes sont : $p_0 = 5$; $q_0 = 2$.

Elles sont définies par les relations de récurrences suivantes :

$$p_{n+1} = 0,5 \cdot p_n + 0,4 \cdot q_n \quad ; \quad q_{n+1} = 0,4 \cdot p_n + 0,5 \cdot q_n$$

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les relations suivantes :

$$u_n = q_n + p_n \quad ; \quad v_n = p_n - q_n$$

- 1 Déterminer la valeur exacte des trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) .
- 2 a Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9.
b En déduire la limite de la suite (u_n) .
- 3 Déterminer la limite de la suite (v_n) .
- 4 a En remarquant que $u_n + v_n = 2 \cdot p_n$, déduire que la suite (p_n) est convergente ; préciser sa limite.

9. Autres suites

E.6765



Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 0,5 \cdot u_n + 0,5 \cdot n - 1,5$$

- 1 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :
 $v_n = 0,1 \cdot u_n - 0,1 \cdot n + 0,5$
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n .
- 2 En déduire que, pour tout entier naturel n :
 $u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$
- 3 Déterminer alors la limite de la suite (u_n)

E.6799



On considère la suite (u_n) définie par :
 $u_0 = 6$; $u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 3 \cdot n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- 1 Donner les trois premiers termes de la suite (u_n) .
- 2 On considère la suite (v_n) définie par :
 $v_n = u_n - 3 \cdot n + 2$
a Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.
b En déduire une expression des termes de la suite (v_n) en fonction de leur rang.
- 3 a Justifier que pour tout entier naturel n , on a :
 $u_n = 8 \times 2^n + 3 \cdot n - 2$
b En déduire la limite de la suite (u_n) .

- b Établir que la suite (q_n) est convergente ; déterminer sa limite.

E.6759



On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 6 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0,2 \cdot a_n + 1,3 \cdot b_n \\ b_{n+1} = -0,8 \cdot a_n - 0,2 \cdot b_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 Exprimer les termes a_{n+2} et b_{n+2} en fonction des termes a_n et b_n .
 - 2 Que peut-on dire des termes de la suite (a_{2n}) ?
- E.6758   On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :
- $$\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0,8 \cdot a_n + 0,9 \cdot b_n \\ b_{n+1} = 0,4 \cdot a_n - 0,8 \cdot b_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
- 1 Établir les égalités : $a_{n+2} = a_n$; $b_{n+2} = b_n$
 - 2 Que peut-on dire des limites des suites (a_n) et (b_n) ?

E.5737



Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot u_n + \frac{1}{3} \cdot n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n - n$$

- 1 Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
 - 2 En déduire que pour tout entier naturel n :
 $u_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$
 - 3 Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- E.2620   On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le premier terme est 0 définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{2}{5} \cdot u_n - 3 \cdot n - 8 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 Déterminer les trois premiers termes de cette suite.
- 2 On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation :
 $v_n = u_n + 5n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
a Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b En déduire la formule explicite de la suite (u_n) d'un terme en fonction de n son rang.
- 3 En déduire la limite de la suite (u_n) .

E.3285    On définit la suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On définit la suite (v_n) par : $v_n = 4u_n - 8n + 24$

- ① Par transformation successive, établir l'égalité suivante :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n.$$
- ② En déduire une expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n .

E.3518    On considère la suite numérique u définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + n - 1 \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

Soit v la suite définie pour tout entier naturel, par :

$$v_n = 4 \cdot u_n - 6n + 15$$

- ① Montrer que v est une suite géométrique.
- ② Calculer v_0 , puis calculer v_n en fonction de n .
En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n - 15}{4}$$
- ③ Montrer que la suite u peut s'écrire sous la forme :

$$u = t + w \quad \text{où } \begin{cases} t \text{ est une suite géométrique} \\ w \text{ une suite arithmétique} \end{cases}$$
- ④ Calculer la valeur des deux sommes :

$$T_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n \quad ; \quad W_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n.$$

En déduire : $U_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

10. Autres suites : suites récurrentes linéaires d'ordre 2

E.3515    On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \quad ; \quad u_{n+1} = 7 \cdot u_n + 8 \cdot u_{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- ① Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n) .
- ② Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$s_n = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire s_n en fonction de n .
- ③
 - a On pose $v_n = (-1)^n \cdot u_n$ et on considère la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $t_n = v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Exprimer t_n en fonction de s_n .
 - b Quelle est la nature de la suite (t_n) ?
- ④
 - a Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n (on pourra calculer, de deux manières, la somme $t_0 + \dots + t_{n-1}$).
 - b Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{8^n}$.

E.3421    On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante :
pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0,24 \cdot x_{n-1}$

- ① On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.
Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si, et seulement si, λ est solution de l'équation :

$$\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$$

En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E) .
On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :

$$u_n = \alpha \cdot (1,2)^n + \beta \cdot (-0,2)^n \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des réels.}$$
- ② On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E) .
Déterminer les valeurs de α et β telles que :

$$u_0 = 6 \text{ et } u_1 = 6,6.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{39}{7} \cdot (1,2)^n + \frac{3}{7} \cdot (-0,2)^n.$$
- ③ Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

11. Limites de suites définies explicitement

E.2558   Déterminer les limites des suites (u_n) définies ci-dessous :

$$\begin{array}{lll} \text{a } n^3 \times 5^n & \text{b } n - \left(\frac{2}{7}\right)^n & \text{c } \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n \\ \text{d } 8^n - 3^n & \text{e } \frac{5^n - 2^n}{3^n + 2^n} & \text{f } \left(\frac{31}{7}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n \end{array}$$

E.3104   Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) dont le terme général en fonction de n est donné ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} \text{a } n^5 \times \left(\frac{3}{n^2}\right)^3 & \text{b } 5^n - 8^n \\ \text{c } \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n+2} & \text{d } \frac{3^n - 2^n}{5^n - 4^n} \end{array}$$

12. Théorèmes des gendarmes

E.2554 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n , par la relation explicite: $u_n = \frac{3n+(-1)^n}{2n-1}$

- ① Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n) .
- ② Établir l'encadrement suivant :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \frac{3n-1}{2n-1} \leq u_n \leq \frac{3n+1}{2n-1}$$

- ③ En déduire la valeur de convergence de (u_n) .

E.2567 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la formule explicite de son terme de rang n :

$$u_n = \sqrt{2 \cdot n + 1} - \sqrt{2 \cdot n}$$

- ① Montrer l'égalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot n + 1} + \sqrt{2 \cdot n}}$$

- ② Pour tout entier naturel n non-nul, établir l'encadrement suivant : $0 < u_n < \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot n}}$
- ③ En déduire la limite de la suite (u_n) .

E.3441 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont le terme de rang n est définie par la relation :

$$u_n = \frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

- ① Établir l'encadrement suivant pour tout entier naturel n non-nul : $\frac{n}{n + \sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n + 1}$
- ② En déduire la convergence de la suite (u_n) ; on précisera la valeur de la limite.

E.2587 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie explicitement par la formule :

$$u_n = \frac{3}{\sqrt{4n^2 + 1}} + \frac{3}{\sqrt{4n^2 + 2}} + \dots + \frac{3}{\sqrt{4n^2 + n}}$$

- ① Comparer les deux termes suivants :

$$\frac{3}{\sqrt{4n^2 + 1}} \quad \text{et} \quad \frac{3}{\sqrt{4n^2 + n}}$$

- ② Établir que la suite (u_n) converge vers $\frac{3}{2}$.

13. Cours - Suites

E.5741 Soit ℓ un nombre réel. On considère une suite (u_n) qui converge vers ℓ alors le réel ℓ vers lequel converge la suite (u_n) est unique.

E.3281 **Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.**

"Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A , tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A "

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

E.5496 On considère les deux suites (u_n) et

(v_n) vérifiant :

- Il existe n_0 tel qu'à partir de n_0 , les termes des deux suites : $n \geq n_0 \implies v_n \geq u_n$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Établir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

E.5497 On considère une suite (u_n) croissante.

Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ finie alors tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs ou égaux à ℓ .

14. Exercices non-classés

E.5570 On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

- ① Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $-\frac{1}{2}$
- ②
 - a) Déterminer l'expression des termes de la suite (w_n) en fonction du rang n .
 - b) En déduire l'expression des termes de la suite (v_n) en fonction du rang n .
(on ne simplifiera pas l'expression de v_n).

- ③ Déterminer la limite de la suite (v_n) .

E.4012 On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1 \quad ; \quad u_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} \cdot u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- ① Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
- ② On définit la suite (v_n) en posant :
$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} \cdot u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 - a) Calculer v_0 .
 - b) Établir que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 - c) Exprimer v_n en fonction de n .

E.4225



Pierre et Claude jouent au tennis.

Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les événements :

- G_n : "Pierre gagne la n -ième partie."
- P_n : "Pierre perd la n -ième partie."

On pose : $p_n = \mathcal{P}(G_n)$; $q_n = \mathcal{P}(P_n)$

Recherche d'une relation de récurrence :

- 1 Déterminer p_1 puis les probabilités conditionnelles : $\mathcal{P}_{G_1}(G_2)$; $\mathcal{P}_{P_1}(G_2)$.
- 2 Justifier l'égalité : $p_n + q_n = 1$.
- 3 Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = 0,5 \cdot p_n + 0,2$.

E.2555



Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ci-dessous définies explicitement :

$$\text{a) } u_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{n + 1} \quad \text{b) } u_n = \frac{n - 3}{n^2 + 1}$$

$$\text{c) } u_n = \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \quad \text{d) } u_n = 1 + n - 2n^2 + 3n^3$$

E.6176



Déterminer la valeur des limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 2 \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{n}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 + n + 2 \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \frac{1}{n}$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot (n - 10) \quad \text{f) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{n + 1}$$

E.6177



Déterminer la valeur des limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2 + n + 1}$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + n + 1}{n - 2} \quad \text{f) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}$$