

1. Raisonnement par récurrences

E.3642



Restitution organisée de connaissances.

On supposera connus les résultats suivants :

Proposition :

- $e^0 = 1$.
- Pour tous réels x et y : $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1 Démontrer que pour tout réel x : $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

2 Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n : $(e^x)^n = e^{nx}$

E.3494



Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$$

2. Formule explicite d'une suite

E.4223



La suite (u_n) est définie par $u_0 = 13$ et pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot u_n + \frac{4}{5}$$

1 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel :

$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$$

2 En déduire la limite de la suite (u_n) .

E.3660



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) u_{n-1} + \frac{6}{n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

1 Calculer u_1 , u_2 , u_3 .

2 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$

3 On considère la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{R}}$ définie par :

$$d_n = u_{n+1} - u_n$$

Déterminer la nature de la suite (on précisera son premier terme et sa raison).

3. Formule explicite, comparaison et variations

E.6713



Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 2 \cdot n^2 - n$$

1 Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

2 Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

On considère également la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = u_n + 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 5$$

3 Établir que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

4 En déduire une expression des termes de la suite (u_n) .

E.3640



Soit (u_n) une suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$: $u_n \geq 0$.

2 On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{25}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2} \cdot n - \frac{21}{4}$$

4. Somme des termes d'une suite

E.6097



On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 2 \cdot n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On définit, pour tout entier naturel n , la suite (v_n) :

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

1 a Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n .

b Justifier que la suite (v_n) est une suite arithmétique

de raison 2 et dont on précisera le premier terme.

2 On définit la suite (S_n) par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

$$S_n = (n+1)(n+2) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

5. Convergences de suites monotones

E.6910    On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est majorée par 7.
- 2 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est croissante.
- 3 En déduire que la suite (u_n) est convergente.

E.3418     On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{2}{5} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot u_n + \frac{2}{5} \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

- 1 Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.
- 2 Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
- 3 Justifier que la suite (u_n) est convergente (on ne demande pas la valeur de la limite).

E.3656     On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = \frac{2}{5} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot u_n + \frac{2}{5} \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

- 1 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.
- 2 Démontrer que (u_n) est croissante.
- 3 Justifier que la suite (u_n) est convergente.

E.3649     La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + \frac{23}{27} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \geq \frac{23}{18}$$
- 2 Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
- 3 Établir la convergence de la suite (u_n) .

6. Divergence de suites monotones

E.3473    On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + n - 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1 Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- 2  a Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$:

$$u_n \geq 0.$$
-  b En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$:

$$u_n \geq n - 3$$
-  c En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

E.5732    On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

- 1 Démontrer que, pour tout entier naturel n : $0 < u_n \leq 2$.
- 2 Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
- 3 Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

E.5080    Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2 \cdot n} \cdot u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
- 2  a Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
-  b Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
-  c Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3 Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $v_n = \frac{u_n}{n}$

 a Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1 .

 b En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \frac{n}{2^n}$$

E.6102   Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot u_n + 3 \times 0,5^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1  a Déterminer la valeur du terme u_1 .
-  b Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel non-nul n , on a :

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n$$
- 2 En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$
- 3 Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

E.3442   On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1 Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
- 2  a Établir, par un raisonnement par récurrence, l'inégalité suivante pour tout entier naturel n :

$$u_n > n^2$$
-  b En déduire la limite de la suite (u_n) .

7. Suites et variations de fonctions

E.4234    On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right)$$

On admet que la fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

- À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :
 $u_n \geq \sqrt{2}$
- Montrer que pour tout $x \geq \sqrt{2}$: $f(x) \leq x$.
- En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
- Prouver que la suite (u_n) converge.

E.4224    On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2} \cdot x^2$$

- Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n \geq 1$.

E.3645    Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. On note α l'unique nombre réel positif vérifiant :

$$f(\alpha) = \alpha \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 ; \quad u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0; \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0; \alpha]$.
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$
- Établir que la suite (u_n) est convergente.

E.10388   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \ln(x) + 2$$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

- Établir que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
 $u_n \leq u_{n+1}$
- Établir que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
 $u_n \leq 5$
 - Établir que la suite (u_n) est convergente.

8. Théorème des gendarmes

E.3446   On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n \in \mathbb{N}$$

- À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n , on a :
 $u_n > 0$
- À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier naturel n , on a :
 $u_n - \sqrt{5} \geq 0$
- À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n non-nul l'inégalité suivante :
 $u_n - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2^n}$
- Déduire des questions précédentes la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

E.5034   On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$$u_0 = 2 ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :
 $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2 \cdot u_n}$
 - En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :
 $u_n \geq \sqrt{2}$
- Déduire des questions précédentes l'encadrement :
 $0 \leq u_{n+1} - \sqrt{2} \leq (u_n - \sqrt{2})^2$
 - À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'encadrement ci-dessous pour tout entier naturel n :
 $0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq (u_0 - \sqrt{2})^{(2^n)}$
- Donner la valeur de $|u_0 - \sqrt{2}|$, arrondie au millièmè près.

b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

E.5569    On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < v_n < 3$$

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$$

b) En déduire que la suite (v_n) est croissante.

3) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

9. Récurrence forte

E.5814    On considère la suite définie par les relations :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_1 = 8 \quad ; \quad u_{n+1} = 5 \cdot u_n - 6 \cdot u_{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

1) Déterminer les valeurs des termes u_2 et u_3 .

2) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$u_n = 2^n + 2 \times 3^n$$

3) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

10. Un peu plus loin dans la récurrence

E.3650   

1) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

C'est-à-dire que :

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

2) La suite (v_n) est définie par : $v_n = 1,2777\dots 7$ avec n décimales consécutives égales à 7.

$$\text{Ainsi : } v_0 = 1,2 \quad ; \quad v_1 = 1,27 \quad ; \quad v_2 = 1,277.$$

En utilisant le a), démontrer que la limite de la suite (v_n) est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

E.5815    On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} =$

$$\frac{3 \cdot u_n}{1 + 2 \cdot u_n}$$

1) a) Calculer u_1 et u_2 .

b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $0 < u_n$.

2) On admet que pour tout entier naturel n : $u_n < 1$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b) Démontrer que la suite (u_n) converge. (on ne demande pas la valeur de la limite).

E.10610   On définit la suite (u_n) par : $u_0 =$; $u_{n+1} = u_n + 2^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'identité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n\}$:

$$u_{n+1} = u_{n-k} + 2^{n-k} \cdot (2^{k+1} - 1)$$

11. Cours

E.5498  

1) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{P}_n : \text{ "pour tout nombre réel } x \text{ tel que } x > 0 : \\ (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \text{ "}$$

Cette relation s'appelle l'inégalité de Bernoulli

2) Montrer que pour tout nombre réel q tel que $q \in]1; +\infty[$, on a la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

12. Exercices non-classés

E.3431    On considère les trois suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \quad ; \quad b_0 = c_0 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot b_n & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot a_n & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ a_n + b_n + c_n = 1 & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- ① Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+2} = \frac{1}{6} \cdot a_n.$$

- ② En déduire que, pour tout entier naturel p :

$$\begin{cases} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p & \text{et} & a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et} & b_{2p+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^p \end{cases}$$

- ③ Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

E.10611   On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 2^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence :

$$u_n = 2^n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

E.5524     On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 0,1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{3}{5} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

- ① Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$
- ② Déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.
- ③ Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\frac{3}{4} - u_n < 10^{-7}$

E.5306    Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à

termes réels sont définies par :

$$\bullet u_0 = 5 \quad ; \quad u_1 = 31 \quad ; \quad u_{n+2} = 12 \cdot u_{n+1} - 35 \cdot u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet v_0 = -1 \quad ; \quad v_1 = -11 \quad ; \quad v_{n+2} = 12 \cdot v_{n+1} - 35 \cdot v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On définit les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$x_n = u_n + v_n \quad ; \quad y_n = u_n - v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- ① Calculer x_0 et x_1 . En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (x_n) est une suite géométrique de raison 5.
- ② Montrer de même que la suite (y_n) est une suite géométrique.
- ③ Calculer x_n et y_n en fonction de n ; en déduire le calcul de u_n et v_n en fonction de n .

E.10543    On souhaite étudier la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- ① Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$
- ② En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite.
- ③ Déterminer à partir de quelle valeur de n , les termes de la suite (u_n) vérifient : $u_n \geq 5,9$

E.10616   Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'identité :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$