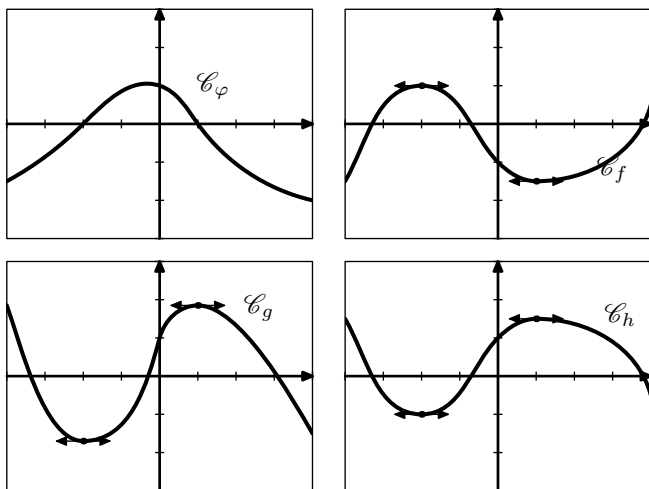


1. Introduction aux primitives

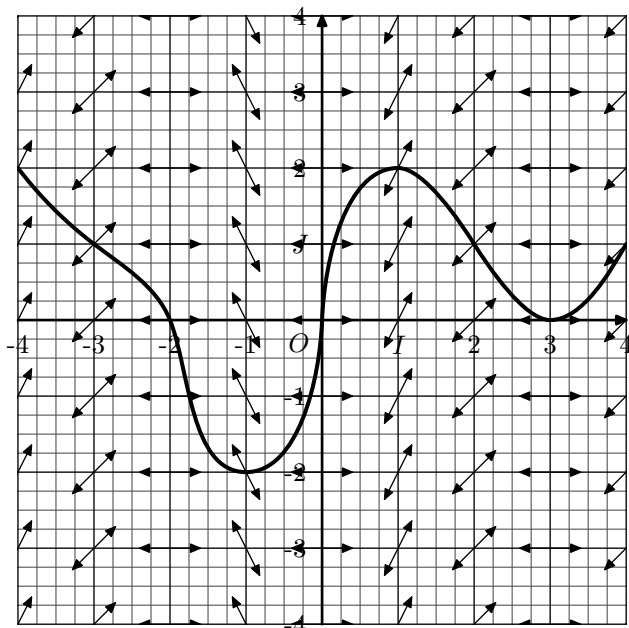
E.3575  On considère quatre fonctions φ, f, g, h définies sur l'intervalle $[-4; 4]$. Leurs courbes représentatives sont données, ci-dessous, dans un même repère orthonormé :



Quelle fonction, parmi f, g et h , peut admettre la fonction φ comme fonction dérivée?

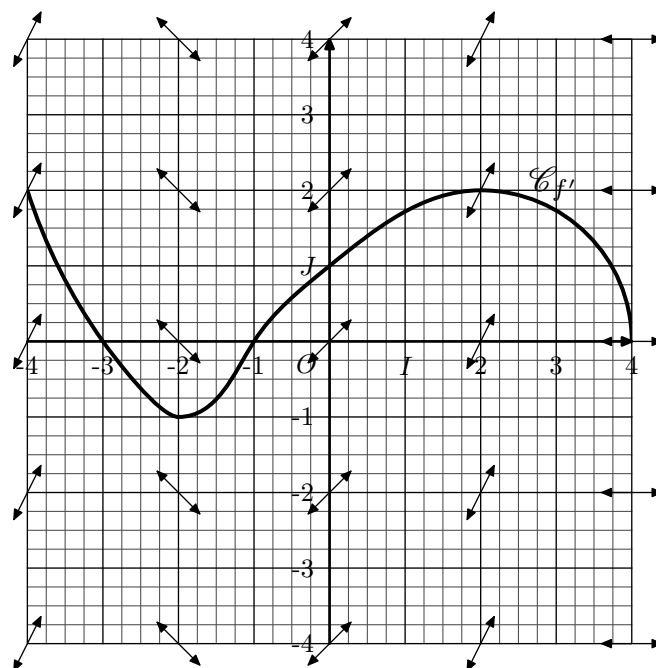
E.3560  Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$ et admettant la fonction f' comme dérivée.

Dans le repère ci-dessous, est tracée la courbe représentative de la fonction f' .



- 1 a) Quelle est la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 1?
- b) Donner le coefficient directeur de toutes les tangentes représentées sur la droite d'équation $x=1$.
- 2 Tracer une représentation "possible" de la fonction f dans ce repère.

E.3561  On considère une fonction f dérivable sur $[-4; 4]$. Dans le repère orthonormé $(O; I; J)$ ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathcal{C}_{f'}$ de la fonction f' dérivée de la fonction f .



- 1 a) Quelle est le nombre dérivé de la fonction f en -2 ?
- b) Tout au long de la droite d'équation $x=-2$ sont représentés des tangentes; quel est le coefficient de ces tangentes.
- 2 Tracer une courbe représentative $\mathcal{C}_f$ acceptable de la fonction f dont les tangentes aux points d'abscisses $-4, -2, 0, 2, 4$ sont, dans chaque cas, une des tangentes proposées sur le graphique.

2. Equation différentielle: $y' = f$

E.6911  Compléter les pointillés :

- 1 On note f une fonction vérifiant: $f'(x) = 2 \cdot x$.
Une expression possible de f est :

$f(x) = \dots\dots\dots$

- 2 On note g une fonction vérifiant: $g'(x) = x^2$.
Une expression possible de g est :

$g(x) = \dots\dots\dots$

- 3 On note h une fonction vérifiant: $h'(x) = -2$.
Une expression possible de h est :

$h(x) = \dots\dots\dots$

- 4 On note j une fonction vérifiant: $j'(x) = \frac{1}{x^2}$.
Une expression possible de j est :

$$j(x) = \dots\dots\dots$$

- 5 On note k une fonction vérifiant : $k'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Une expression possible de k est :

$$k(x) = \dots\dots\dots$$

- 6 On note ℓ une fonction vérifiant : $\ell'(x) = e^x$.

Une expression possible de ℓ est :

$$\ell(x) = \dots\dots\dots$$

- 7 On note m une fonction vérifiant : $m'(x) = \frac{1}{x}$.

Une expression possible de m est :

$$m(x) = \dots\dots\dots$$

E.5206   Pour chaque question, déterminer l'expression d'une fonction f admettant pour dérivée l'expression proposée :

- a $f'(x) = 3$ b $f'(x) = 2x + 1$ c $f'(x) = x^3$
d $f'(x) = -\frac{2}{x}$ e $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ f $f'(x) = e^{2x}$

E.6912   Donner une primitive de chacune des fonctions ci-dessous :

- a $f(x) = 2 \cdot x + 1$ b $g(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}}$
c $h(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ d $j(x) = e^{2 \cdot x}$

E.4292   On considère la fonction f définie sur

$]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}$$

- 1 Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2 Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3 Déterminer l'image de 1 par la fonction f . En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0; +\infty[$.
4 Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$F(x) = x \cdot \ln x - \ln x$$
est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.
5 Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
6 Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1; +\infty[$ qu'on notera α .
7 Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

E.4301    Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{4}{1 + 7 \cdot e^{-x}}$$

- 1 Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \frac{4 \cdot e^x}{e^x + 7}$
2 Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3 Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; \ln 7]$.

3. Détermination d'une primitive d'une fonction de référence

E.5207   Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- a $f(x) = 2x + 1$ b $g(x) = 1 - 3x$ c $h(x) = 2x^2$
d $i(x) = x^2 + x + 1$ e $j(x) = 4x^3$ f $k(x) = 1 - 2x^2$

E.3992   Déterminer une primitive de chacune

des fonctions suivantes :

- a $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ b $g(x) = \frac{2}{x^2}$ c $h(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
d $j(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ e $k(x) = \frac{1}{x}$ f $\ell(x) = -\frac{1}{2x}$
g $m(x) = e^x$ h $n(x) = 3e^x$ i $p(x) = -e^x$

4. Détermination d'une primitive de la composée de fonctions

E.5209   Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- a $f(x) = (x + 3)^4$ b $g(x) = (2 - x)^3$
c $h(x) = (2x - 3)^2$ d $j(x) = x \cdot (x^2 + 1)^6$
e $k(x) = 3x^2 \cdot (x^3 - 2)^3$ f $\ell(x) = x^4 \cdot (1 - x^5)^2$

E.3930   Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

- a $f(x) = -3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1$ b $g(x) = 3 \cdot x^5 + 1$
c $h(x) = (3 + x)^2$ d $j(x) = (2 - x)^3$
e $k(x) = (5x + 1)^3$ f $\ell(x) = x^3 \cdot (x^4 + 1)^4$

E.5214   Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x^2 \cdot (x^3 - 5)^5$ (b) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 (c) $h(x) = \frac{6x + 2}{(3x^2 + 2x - 5)^2}$ (d) $j(x) = \frac{6x + 2}{3x^2 + 2x - 5}$

E.5211   Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = e^{3x+1}$ (b) $g(x) = x \cdot e^{x^2}$ (c) $h(x) = \frac{e^x}{x^2}$
 (d) $j(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ (e) $k(x) = \frac{e^{\frac{x+1}{x}}}{x^2}$ (f) $\ell(x) = \frac{e^{\ln(x)+1}}{x}$

E.5221   Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = 3x - 5x^5$ (b) $g(x) = \frac{1}{x} - x$
 (c) $h(x) = x \cdot (2x^2 - 3)^4$ (d) $j(x) = \frac{2 - x}{\sqrt{x^2 - 4x}}$
 (e) $k(x) = \frac{6x + 2}{3x^2 + 2x - 3}$ (f) $\ell(x) = x \cdot e^{x^2}$

E.3931   Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ (b) $g(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$
 (c) $h(x) = \frac{1}{x+1}$ (d) $j(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$
 (e) $\ell(x) = \frac{x}{x+1}$ (f) $m(x) = \frac{6x+1}{(3 \cdot x^2 + x - 5)^2}$
 (g) $n(x) = \frac{-3}{(3x+2)^2}$ (h) $p(x) = \frac{6x+1}{6 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2}$

E.5210   Déterminer une primitive des fonctions ci-dessous :

(1) $f(x) = \frac{2}{2x+3}$ (2) $g(x) = \frac{1}{1-3x}$
 (3) $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$ (4) $j(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$
 (5) $k(x) = \frac{2}{(3x+1)^2}$ (6) $\ell(x) = \frac{x}{x^4+2x^2+1}$

E.10393   Soit f une fonction continue sur un intervalle I . On définit la fonction g sur l'intervalle I par :
 $g(x) = f(3 \cdot x)$ pour $x \in I$.

On note F et G les primitives respectivement des fonctions f et g sur l'intervalle I .

Parmi les relations ci-dessous, laquelle est vérifiée par les fonctions F et G :

(a) $G(x) = F(x) + 3$ (b) $G(x) = \frac{1}{3} \cdot F(x)$
 (c) $G(x) = F(x) - 3$ (d) $G(x) = 3 \cdot F(x)$

5. Quelques primitives particulières

E.6006  

(1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
 $f(x) = (x-1) \cdot e^x$

Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .

(2) En déduire l'expression d'une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $g(x) = x \cdot e^x$

E.6005  

(1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

l'expression : $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x}$

Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f .

(2) En déduire l'expression d'une primitive de la fonction racine carrée.

E.5212   On considère la fonction f définie par :
 $f(x) = x \cdot \ln x - x$

(1) Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' .
 (2) En déduire l'expression des primitives de la fonction logarithme népérien.

6. Recherche d'une primitive

E.5222   Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$$

(1) Déterminer les nombres réels a , b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

(2) Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

E.6004   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{4 \cdot e^{2x+2} - e^{x+1}}{e^{2x+2} - 1}$$

- 1 Montrer que la fonction f admet pour expression :

$$f(x) = \frac{3 \cdot e^{2x+2}}{e^{2x+2} - 1} + \frac{e^{x+1}}{e^{x+1} + 1}$$

(Indication : on pensera à factoriser $e^{2x+2} - 1$)

- 2 En déduire l'expression d'une primitive de la fonction f .

7. Détermination d'une primitive avec condition initiale

E.5223   Pour chaque question, déterminer la primitive de la fonction vérifiant la condition proposée :

a $f(x) = x^2 \cdot (x^3 + 2)^4$; $F(-1) = 1$

b $g(x) = \frac{x}{3x^2 - 2}$; $G(3) = \ln 5$

c $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$; $H(4) = 3$

d $j(x) = (x + 1)e^{x^2+2x}$; $J(1) = e^3$

E.3950   Pour chaque question, déterminer la primitive de la fonction vérifiant la condition proposée :

a $f(x) = \frac{x^2 - 2 \cdot x + 4}{x}$; $F(1) = 2$

b $g(x) = x \cdot e^{x^2}$; $G(1) = 3 \cdot e$

c $h(x) = \frac{5}{(4 \cdot x - 3)^2}$; $H(1) = 1$

d $j(x) = \frac{2 \cdot x - 3}{x^2 - 2x + 1}$; $J(0) = -2$

E.6917   On considère les deux fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad ; \quad g(x) = \ln(2 \cdot x^2 + 2)$$

- 1 Déterminer l'image de 0 par chacune de ces deux fonctions.
- 2 Établir que ces deux fonctions sont des primitives d'une même fonction qu'on précisera.

8. Equations différentielles : exemples de solutions

E.3647    On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = e^{-x}$$

Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x \cdot e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle.

E.3663  

- 1 Déterminer l'expression de la fonction f vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

Justifier votre réponse.

- 2 Déterminer l'expression de la fonction g vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} g' = 2 \cdot g \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Justifier votre réponse.

- 3 Déterminer l'expression de la fonction h vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} h' = 2 \cdot h \\ h(0) = 2 \end{cases}$$

Justifier votre réponse.

E.3664  

- 1 On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = e^{-x}$$

Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = x \cdot e^{-x}$$

est une solution de l'équation différentielle (E).

- 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2} \cdot e^{-2x} - 3 \cdot e^{-3x}$$

Montrer que la fonction f vérifie l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 3 \cdot e^{-3x}$$

E.3673    On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f , définies et dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$ vérifiant la condition (E) :

pour tout nombre réel x strictement positif :

$$x \cdot f'(x) - f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$$

- 1 Montrer que si une fonction f , définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

vérifie :

$$(E) : \begin{cases} \text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif :} \\ g'(x) = e^{2x} \end{cases}$$

- 2 Conjecturer l'expression des fonctions g vérifiant :
 $g'(x) = e^{2x}$
- 3 Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\frac{1}{2}$?

E.3690    Pour tout réel k positif ou nul,

on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = x + \frac{1 - k \cdot e^x}{1 + k \cdot e^x}$

- 1 Justifier que, pour tout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle :
 $(E) : 2 \cdot y' = (y - x)^2 + 1.$
- 2 En déduire le sens de variations de f_k sur $\mathbb{R}$.

E.8474    On considère l'équation différentielle :

$$y' + \frac{3 \cdot y}{x} = 1$$

et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{x}{4}$

Montrer que la fonction f est une solution de cette équation différentielle.

E.8475   On considère l'équation différentielle :

$$2 \cdot y' + x \cdot y = 0$$

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ci-dessous est solution de cette équation différentielle :

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$$

9. Equations différentielles : $y' = ay$

E.3679   Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a $y' = -3y$ b $y' - y = 0$

c $5y' - 2y = 0$ d $y = -3y'$

E.3680   Pour chaque question, déterminer la valeur de $a \in \mathbb{R}$ afin que la fonction f soit une solution de l'équation différentielle :

$$y' = a \cdot y$$

a $f(x) = -3 \cdot e^{4x}$ b $f(x) = 4 \cdot e^{0,2x}$

E.3681   Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

a $y' - 3y = 0$; $f(0) = 2$

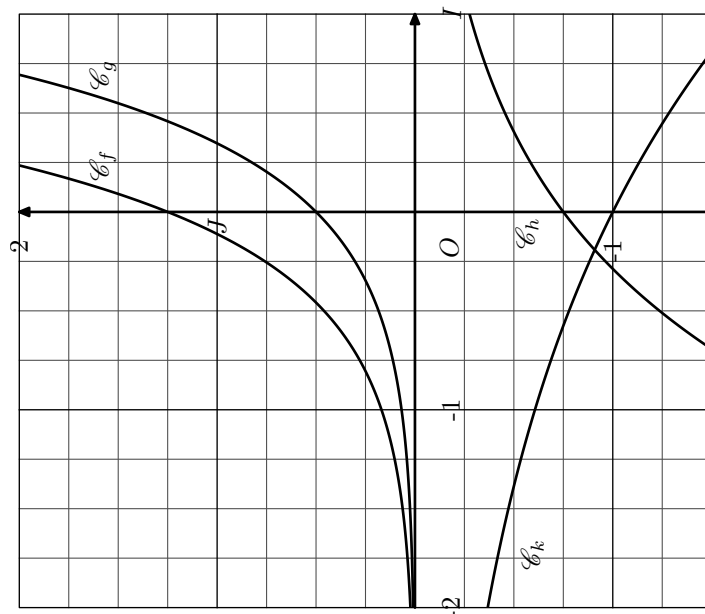
b $2y' + 3y = 0$; $f(0) = -1$

c $3y' - 2y = 0$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$

d $y - 3y' = 0$; $f(6) = e^3$

E.3683   Dans le repère ci-dessous est représentée quatre courbes représentatives de fonctions vérifiant l'équation différentielle :

$$y' = a \cdot y \quad \text{pour } a \in \mathbb{R}.$$



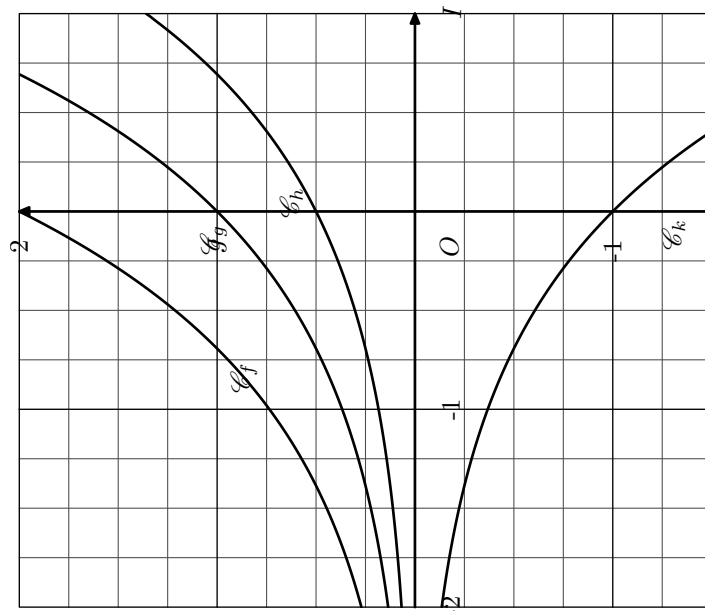
En observant les tangentes à ces courbes au point d'abscisse 0, déterminer l'équation différentielle vérifiée par chacune de ces fonctions.

E.3682



Dans le repère ci-dessous est représentée quatre courbes représentatives de fonctions vérifiant l'équation différentielle :

$$y' = y$$



Déterminer les conditions initiales définissant chacune de ces fonctions.

10. Equations différentielles : $y' = ay + b$

E.3692



Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' + y = 2$

b) $y' - 3y = -3$

c) $6y = 3y' + 2$

d) $5y = \frac{3}{2}y' + \frac{1}{3}$

E.3693



Résoudre les équations

différentielles suivantes :

a) $4y' - y = 4$; $y(1) = e$

b) $15y' + 24y = 12$; $y\left(\frac{5}{4}\right) = 2$

c) $-\frac{3}{2}y' + \frac{1}{4}y = -1$; $y(3) = 6 + 2e$

11. Equations différentielles : $y' = ay + f$

E.3685



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

Vérifier que f est solution de l'équation différentielle :

$$y' + y = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$$

E.3686



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-2x} \cdot \ln(1 + 2 \cdot e^x)$$

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 2y = 2 \cdot \frac{e^{-x}}{1 + 2 \cdot e^x}$$

- 1) Vérifier que la fonction f est solution de (E) .
- 2) Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle : $(E') : y' + 2y = 0$.
- 3) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E) .

E.4304



On considère les deux équations différentielles :

$$(E) : y' + y = e^{-x}$$

$$(E') : y' + y = 0$$

- 1) Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x \cdot e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E) .
- 2) Résoudre l'équation différentielle (E') .
- 3) Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E') .
- 4) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) .
- 5) Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

E.3655    Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2} \cdot e^{-2x} - 3 \cdot e^{-3x}$$

Soit l'équation différentielle: $(E): y' + 2y = 3e^{-3x}$.

- 1 Résoudre l'équation différentielle: $(E'): y' + 2y = 0$.
- 2 En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $h(x) = \frac{9}{2} \cdot e^{-2x}$ est solution de (E') .
- 3 Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E) .
- 4 En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E) .

E.3678    La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (20x + 10) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

On note $y(t)$ la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$, est $y(0)=10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$(E): y' + \frac{1}{2}y = 20 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

- 1 Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- 2 On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E) , définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
 - a On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E) , définie sur $[0; +\infty[$ vérifiant $g(0)=10$. Démontrer que la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle:

$$(E'): y' + \frac{1}{2}y = 0$$

b Résoudre l'équation différentielle (E') .

c Conclure.

E.3684    **Partie A - Résolution d'une équation différentielle.**

On considère l'équation différentielle: $y' - 2y = e^{2x}$, (E)

- 1 Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $u(x) = x \cdot e^{2x}$
 est une solution de (E) .
- 2 Résoudre l'équation différentielle:
 $y' - 2y = 0$ (E_0)
- 3 Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E_0) .
- 4 En déduire toutes les solutions de l'équation (E) .
- 5 Déterminer la fonction, solution de (E) , qui prend la valeur 1 en 0.

Partie B - Étude d'une fonction.

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = (x+1) \cdot e^{2x}$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1 Étudier la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
- 2 Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.
 Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
 Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x .

Partie C - Résolution d'une équation.

- 1 Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[0,2; 0,3]$.
- 2 Recopier, puis compléter le tableau suivant :

x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$f(x)$						

Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies avec une précision de 10^{-2} près par défaut.

- 3 Sur le papier millimétré ci-dessous, où les unités sont de 10 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées, tracer l'arc de la courbe $\mathcal{C}$ pour x appartenant à $[0; 0,3]$.
 Faire apparaître x_0 sur le graphique.

E.3687    On cherche à résoudre l'équation différentielle:

$$(1): y' - 2y = x \cdot e^x$$

- 1 Résoudre l'équation différentielle:
 $(2): y' - 2y = 0$,
 où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
- 2 Soit a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $u(x) = (a \cdot x + b) \cdot e^x$
 - a Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
 - b Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u+v$ est solution de (1).
 - c En déduire l'ensemble des solutions de (1).
- 3 Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

E.3966    On considère l'équation différentielle: $(E): y' = 2 \cdot y + \cos x$

- 1 Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par: $f_0(x) = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$ soit une solution f_0 de (E) .
- 2 Résoudre l'équation différentielle: $(E_0): y' = 2 \cdot y$.
- 3 Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f-f_0$ est solution de (E_0) .
- 4 En déduire les solutions de (E) .
- 5 Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

E.3689    On considère l'équation différentielle:
 $(E): y' - 3y = \frac{-3e}{(1 + e^{-3x})^2}$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = e^{-3x} \cdot \varphi(x)$.

- 1 Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , exprimer $\varphi'(x) - 3 \cdot \varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.
- 2 Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifie: $\varphi(0) = \frac{e}{2}$.

12. Autres équations différentielles

E.3676    On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x .

On pose $x=0$ en 2005, $g(0)=1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E) : y' = \frac{1}{20} \cdot y \cdot (10 - y)$$

- ① On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$

- Ⓐ Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) : z' = -\frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{20}$$

- Ⓑ Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E) .

- ② Montrer que g est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$$

- ③ Étudier les variations de g sur $]0; +\infty[$.
 ④ Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
 ⑤ En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions?

E.3691    En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u , ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) \begin{cases} u'(x) = \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12} & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u .

- ① On suppose que, pour tout réel positif t , on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement, si la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3) \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4} \cdot h(t) + \frac{1}{12} & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+^* \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h .

- ② Donner les solutions de l'équation différentielle :

$$y' = -\frac{1}{4} \cdot y + \frac{1}{12}$$

et en déduire l'expression de la fonction h , puis celle de la fonction u .

- ③ Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

E.3773    On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle : $(E) : x \cdot f'(x) - (2x + 1) \cdot f(x) = 8 \cdot x^2$

- ① Ⓐ Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

est solution de l'équation différentielle :

$$(E') : y' = 2 \cdot y + 8$$

- Ⓑ Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = x \cdot h(x)$ est solution de (E) .

- ② Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E) .

E.3646    Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ vérifiant pour tout nombre réel x strictement positif :

$$x f'(x) - f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$$

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$$g'(x) = e^{2x}$$

- ② On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{e}{2} x$$

Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x , le signe de $h(x)$.

E.3688    On appelle (E) l'équation différentielle : $y'' - y = 0$,

où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

- ① Déterminer les réels r tels que la fonction h , définie par $h(x) = e^{r \cdot x}$, soit solution de (E) .

- ② Vérifier que les fonctions φ définies par $\varphi(x) = \alpha \cdot e^x + \beta \cdot e^{-x}$, où α et β sont deux nombres réels, sont des solutions de (E) . On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E) .

- ③ Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $\left(\ln 2; \frac{3}{4}\right)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est $\frac{5}{4}$.

13. Cours - ancien programme : Equations différentielles

E.3283

**Pré-requis :**

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions :

$$x \mapsto C e^{-\lambda x}$$

où C est une constante réelle.

- 1 Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle $(E'_\lambda) : z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$.
- 2 Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0 .

14. Exercices non-classés

E.10394



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = 2 \cdot x \cdot \ln(x)$$

La primitive F de la fonction f telle que $F(1) = -\frac{1}{2}$ admet pour expression :

- | | |
|---|---|
| a $F(x) = x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot x$ | b $F(x) = x \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot x^2$ |
| c $F(x) = x \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot x$ | d $F(x) = x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot x^2$ |

E.3284



On considère l'équation différentielle $(E) :$

$$y' = \frac{1}{16} \cdot y$$

- 1 On sait que la fonction $x \mapsto e^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E) . Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \mapsto K \cdot e^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.
- 2 Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0 .

E.10395



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = (x^2 - 2) \cdot e^x$$

La primitive F de la fonction f telle que $F(1) = -\frac{1}{2}$ admet pour expression :

- | | |
|--------------------------------|--|
| a $F(x) = (x^2 - 2) \cdot e^x$ | b $F(x) = (x^2 - 2 \cdot x) \cdot e^x$ |
| c $F(x) = (x^3 - 2) \cdot e^x$ | d $F(x) = (x^3 - 2 \cdot x) \cdot e^x$ |