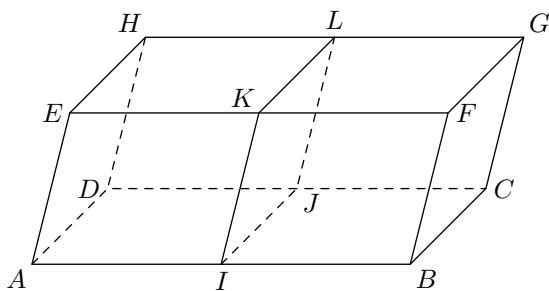


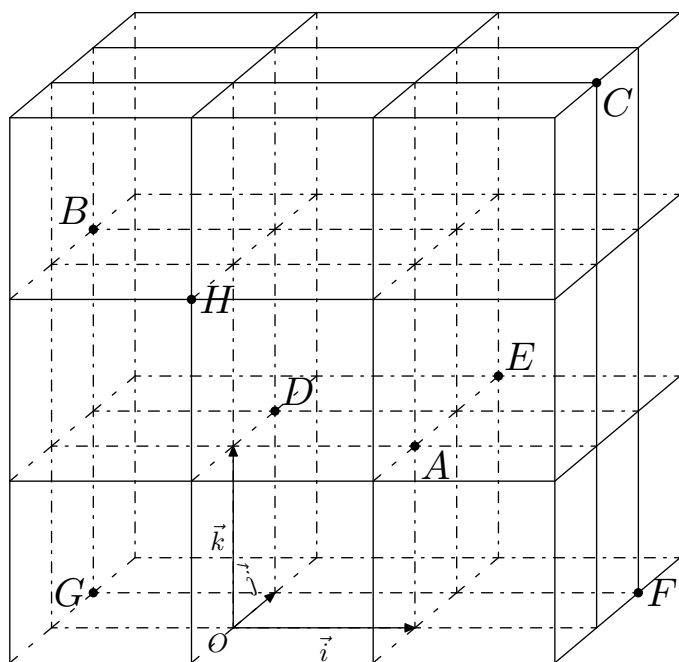
1. Vecteurs de l'espace

E.2759 Dans l'espace, on considère le parallélépipède $ABCDEFGH$. On note I, J, K, L les milieux respectifs des arêtes $[AB], [CD], [EF], [GH]$.



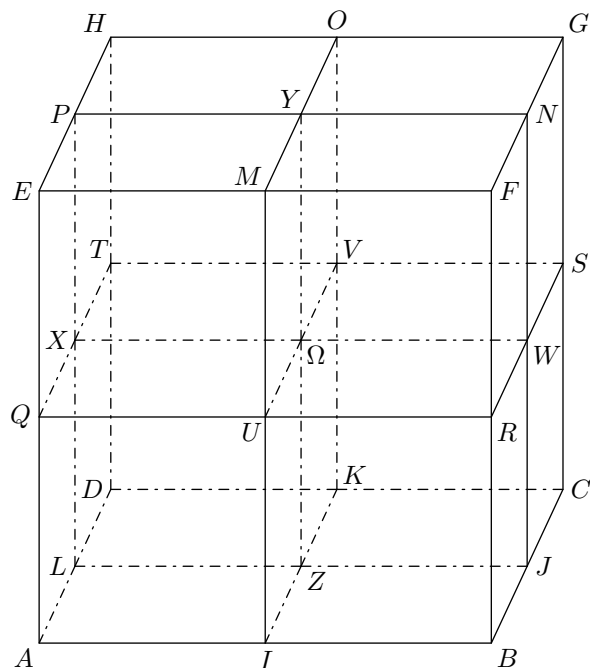
- 1 a Donner tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AJ}$.
- b Donner tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{ED}$.
- c Donner tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{DK}$.
- 2 Donner un représentant de chaque somme suivante:
 - a $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{LF} = \dots$
 - b $\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{HI} = 2 \cdot \dots$
 - c $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{CD} = \dots \overrightarrow{B}$

E.2771 L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$; ce repère et le quadrillage associé est représenté ci-dessous:



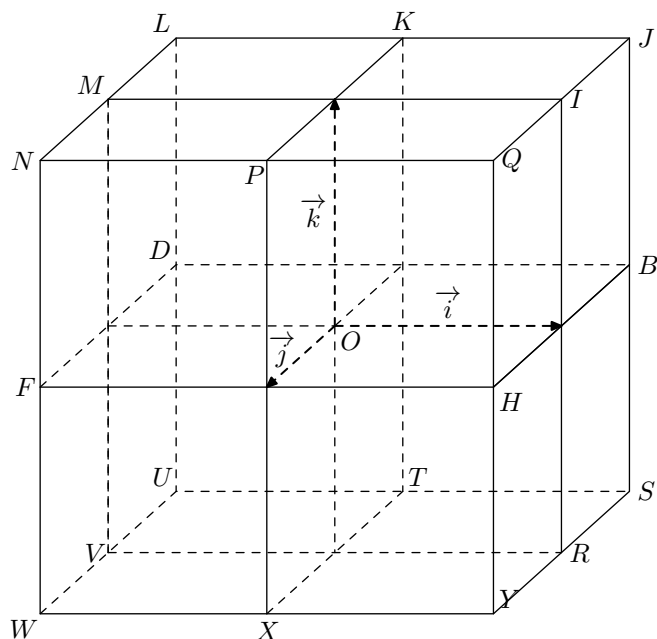
Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H .

E.2760 Le cube représenté ci-dessous est composé de 8 petits cubes identiques et juxtaposés:



- 1 Dans chaque question, déterminer le vecteur, ayant pour origine A représentant la somme:
 - a $\overrightarrow{MY} + \overrightarrow{KW}$
 - b $\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{VS} + \overrightarrow{CX}$
 - c $\overrightarrow{\Omega H} + \overrightarrow{ZE} + \overrightarrow{QC}$
 - d $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{OI}$
- 2 Dans chaque question, déterminer le vecteur, ayant pour extrémité A , représentant la somme:
 - a $\overrightarrow{U\Omega} + \overrightarrow{VL}$
 - b $\overrightarrow{LZ} + \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{SX}$
 - c $\overrightarrow{YQ} + \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{SA}$
 - d $\overrightarrow{X\Omega} + \overrightarrow{XH} + \overrightarrow{GZ}$

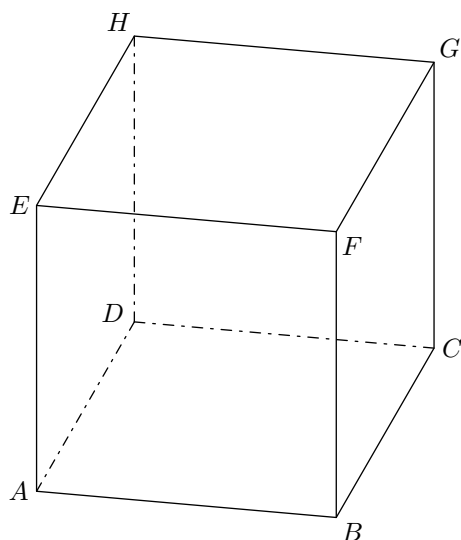
E.4180 Dans l'espace $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les cubes ci-dessous :



- 1 Quels points de la figure vérifient $y \geq 0$?
- 2
 - a Le pavé droit $PQJKXYST$ est-il inclus dans le demi-espace défini par l'inéquation : $x \geq 0$
 - b Le pavé droit $FDBHWUSY$ est-il inclus dans le demi-espace défini par l'inéquation : $z \geq 0$
- 3 Décrire les demi-espaces suivants :
 - a $x \leq 0$
 - b $z \geq 0$
 - c $y - z \leq 0$

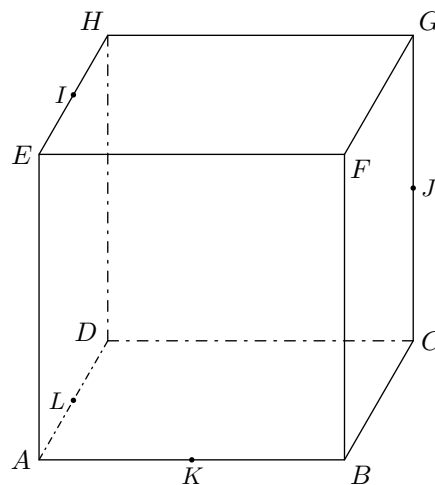
2. Position relative

E.6816 On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



- 1 Donner la position relative des couples de droites suivants :
 - a (EH) et (BC)
 - b (EB) et (FA)
 - c (BA) et (EG)
 - d (EC) et (AG)
- 2 Donner la position relative des couples de droite et plan suivants :
 - a (EH) et (AFG)
 - b (HD) et (FAG)
 - c (FA) et (DHG)
 - d (BC) et (HFA)
- 3 Donner la position relative des plans suivants :
 - a (HED) et (BCF)
 - b (HGA) et (DCB)

E.6817 Dans l'espace considérons le cube $ABCDEFGH$ et les points I, J, K, L milieux respectifs des segments $[EH], [CG], [AB], [AD]$.



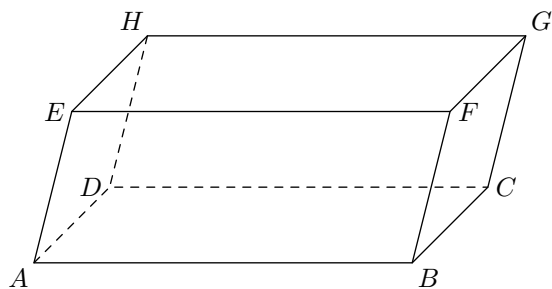
Donner les positions relatives des couples de droites suivantes :

- a (IL) et (FB)
- b (AG) et (KJ)
- c (KL) et (HF)
- d (EL) et (HD)

E.2885



On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



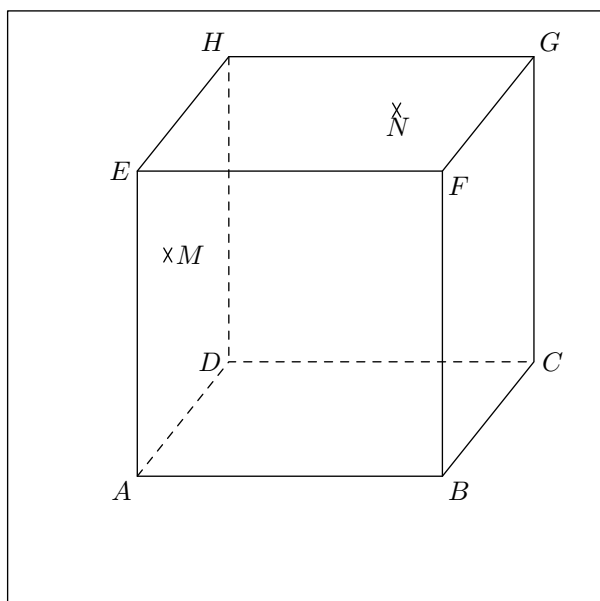
Notons O le milieu du segment $[AG]$:

- ① Démontrer que le point O est milieu du segment $[EC]$.
- ② Démontrer que le point O est milieu du segment $[HB]$.

E.2775



On considère le cube $ABCDEFGH$ et les points M et N de l'espace.

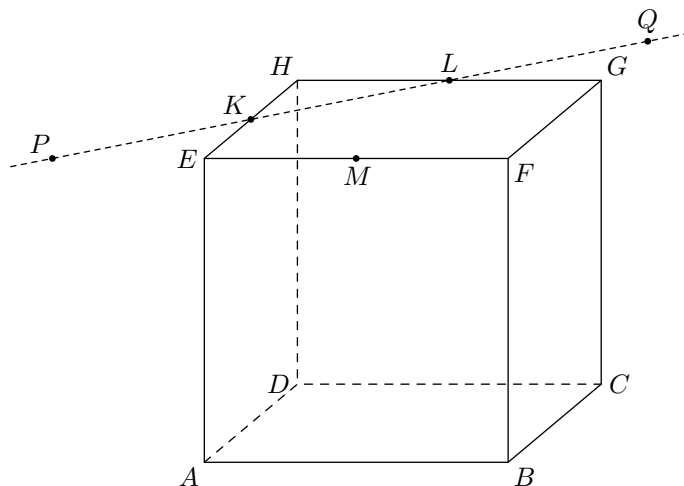


- ① Supposons le point M appartenant au plan (EFB) ; justifier que les droites (AD) et (HM) sont non coplanaires.
- ② Supposons le point M appartenant au plan (EHD) :
 - a Justifier que les droites (AD) et (HM) sont coplanaires.
 - b Placer le point L intersection des droites (AD) et (HM) .
- ③ Suivant la position du point N dans l'espace, préciser si les droites (GF) et (HN) sont coplanaires ; si oui, placer leur point d'intersection :
 - a $N \in (HEF)$
 - b $N \in (HDC)$

E.2795



On considère le cube $ABCDEFGH$. Les points K , L , M sont les milieux respectifs des arêtes $[EH]$, $[HG]$, $[EF]$.



Les points P et Q représentent l'intersection de la droite (KL) respectivement avec les plans (ABF) et (CBF) .

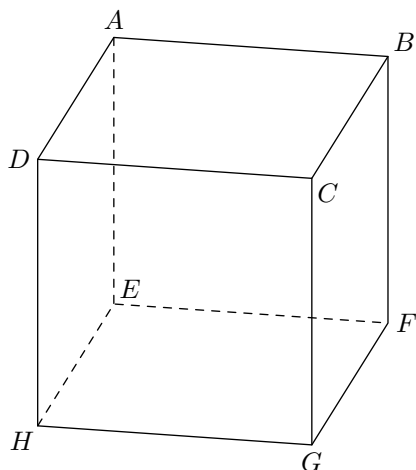
- ① a Justifier que le point P est l'intersection des droites (EF) et (KL) .
- b En déduire que le point K est le milieu du segment $[PL]$.

On admet que par un raisonnement similaire, le point L est le milieu du segment $[KQ]$:

- ② Justifier l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$



Définition : deux droites sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan.



Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre :

- 1 Parmi les couples de droites ci-dessous, lesquelles sont coplanaires entre elles :

- a (EA) et (FB) b (HE) et (CB)
 c (HC) et (AD) d (GA) et (CA)
 e (HB) et (DA)

Dans la question suivante, nous allons utiliser les trois définitions suivantes :

Définitions :

- Deux droites sont parallèles dans l'espace si elles sont **coplanaires** et si elles sont parallèles dans ce plan.
- Deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point en commun ou alors lorsqu'ils sont confondus.
- Une droite et un plan sont parallèles lorsque :
 - ou bien $\mathcal{P}$ et Δ n'ont aucun point en commun.
 - ou alors la droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$

- 2 Parmi les couples ci-dessous, lesquels définissent un couple d'objets parallèles :

- a (GD) et (AB) b (EB) et (HGC)
 c (EF) et (DC) d (BAH) et (GFH)

Vocabulaire : On parle de droites perpendiculaires uniquement dans le cas de droites coplanaires.

Définition :

- Deux droites sont orthogonales si elles sont respectivement parallèles à deux droites perpendiculaires d'un même plan
- Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toutes droites de ce plan.

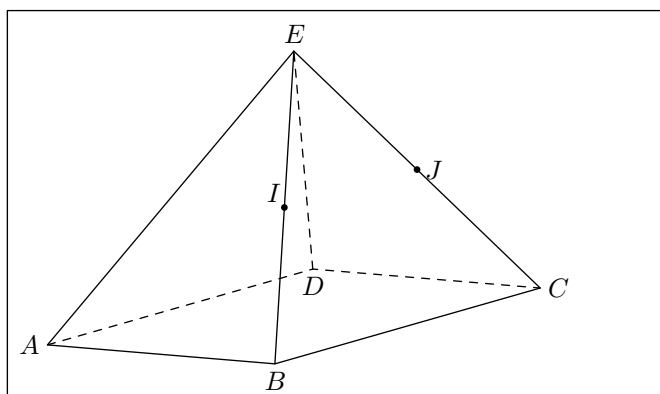
- 3 Donner les couples ci-dessous qui sont orthogonaux :

- a (EF) et (HE) b (DB) et (AB)
 c (HD) et (ABC) d (HB) et (BFG)
 e (AC) et (HDF) f (HF) et (GCF)

3. Parallélisme



La figure ci-dessous représente la pyramide $ABCDE$ à base carrée; les points I et J représentent les milieux respectifs des arêtes $[BE]$ et $[CE]$.



4. Repérage dans l'espace

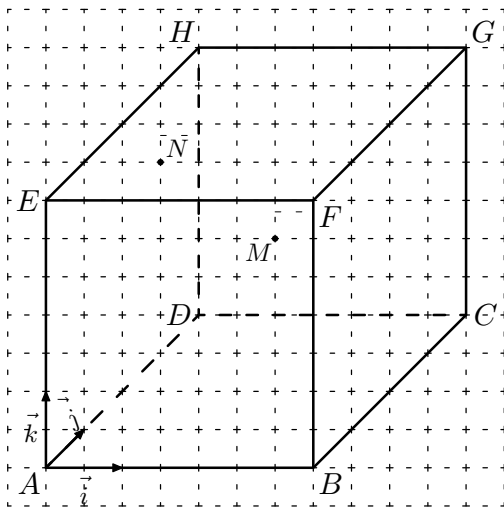


Dans l'espace munit du repère $(A; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ et les deux points M et N .

- 1 Justifier que les points A, D, I, J sont coplanaires.

- 2 a Justifier que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes.
 b On note M leur point d'intersection. Placer le point M dans la figure ci-dessus.

- 3 En déduire la droite d'intersection des plans (ABE) et (CDE) .



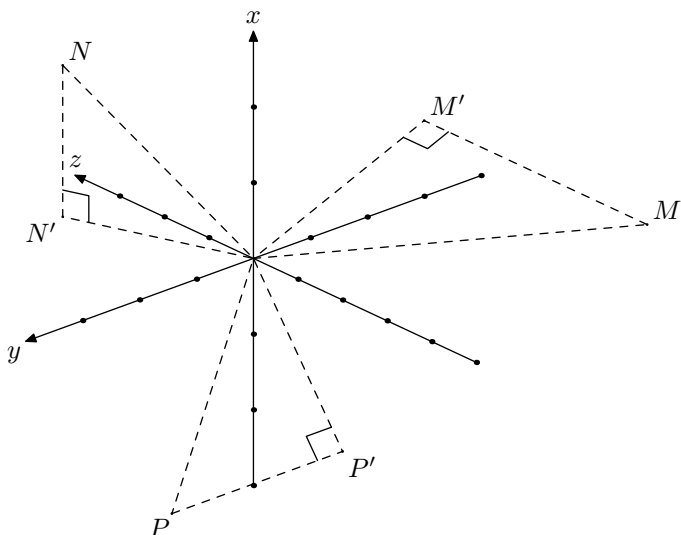
1 Déterminer les coordonnées du point M quand :

- a M est un point du plan (EFB) .
- b M est un point du plan (HGD) .

2 Déterminer les coordonnées du point N quand :

- a N est un point du plan (EFH) .
- b N est un point du plan (EAD) .

E.2793 On considère le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé représenté ci-dessous :



On considère les trois points M, N, P :

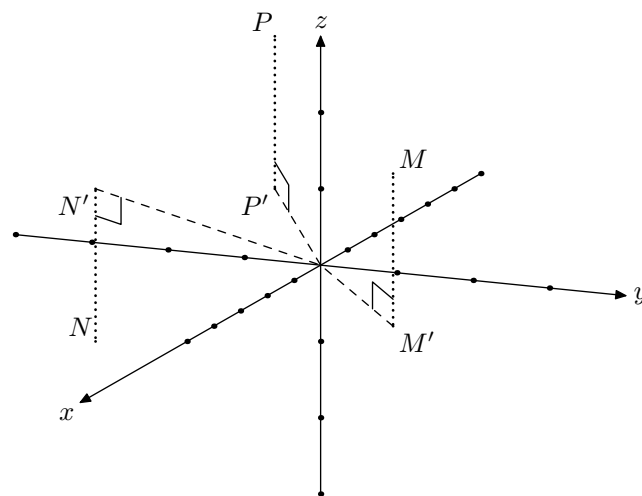
- 1 a Le point M' est le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) .
Déterminer les coordonnées du point M' dans ce plan.
- b Le point N' est le projeté orthogonal de N sur le plan (Oyz) .
Déterminer les coordonnées du point N' dans ce plan.
- c Le point P' est le projeté orthogonal de P sur le plan

(Oxz) .

Déterminer les coordonnées du point P' dans ce plan.

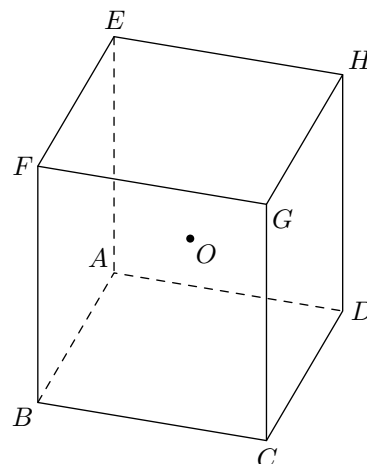
2 Déterminer les coordonnées des trois points M, N, P dans ce repère.

E.2776 On munit d'un repère orthonormé dont les graduations sur les axes sont représentées ; on considère les trois points M, N, P et leurs projections respectives M', N', P' sur le plan (OIJ) dont voici les représentations :



- 1 a Déterminer les coordonnées du point M' appartenant au plan (OIJ) .
- b Donner les coordonnées du point M .
- 2 Déterminer les coordonnées du point N et du point P .

E.4024 On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous de centre O .



Déterminer les coordonnées des points de chacun des sommets du cube ainsi que du point O dans chacun des repères suivants :

- a $(B; \vec{BC}; \vec{BA}; \vec{BF})$
- b $(A; \vec{AE}; \vec{AB}; \vec{AD})$
- c $(O; \vec{OF}; \vec{OG}; \vec{OE})$

5. Colinéarité

E.2779

- 1 Montrer que les couples suivants de vecteurs sont colinéaires :

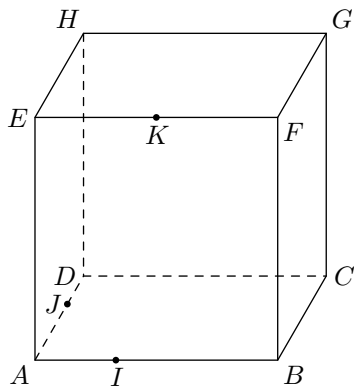
- a $\vec{u} (6; 21; 9) ; \vec{v} (4; 14; 6)$
- b $\vec{u} (3; 5; \frac{4}{3}) ; \vec{v} (\frac{6}{5}; 2; \frac{8}{15})$

- 2 Justifier que les deux vecteurs suivants ne sont pas colinéaires : $\vec{u}(5; 8; 3)$; $\vec{v}\left(3; \frac{24}{5}; \frac{8}{5}\right)$

E.2792  

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre et les trois points définis par :

- Le point K est le milieu de $[EF]$;
- le point I vérifie la relation $\vec{AI} = \frac{1}{3} \cdot \vec{AB}$;
- le point J vérifie la relation $\vec{AJ} = \frac{2}{3} \cdot \vec{AD}$.



En utilisant le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$, montrer que les droites (IJ) et (KH) sont parallèles.

E.6880    Un catadioptré est un dispositif optique formé de trois miroirs en forme de “coin de cube”, les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.

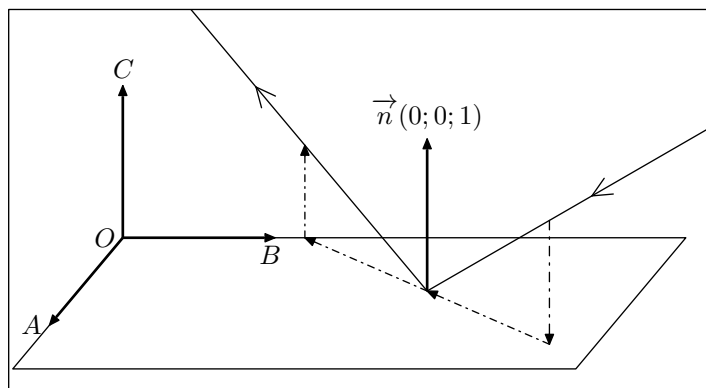
Les points O , A , B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $(O; \vec{OA}; \vec{OB}; \vec{OC})$ soit un repère orthonormé.

On utilisera ce repère dans tout l'exercice.

Les trois miroirs du catadioptré sont représentés par les plans (OAB) , (OBC) et (OAC) . Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux admises :

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}(a; b; c)$ est réfléchi par le plan (OAB) , un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}(a; b; -c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}(a; b; c)$ est réfléchi par le plan (OBC) , un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}(-a; b; c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}(a; b; c)$ est réfléchi par le plan (OAC) , un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}(a; -b; c)$;

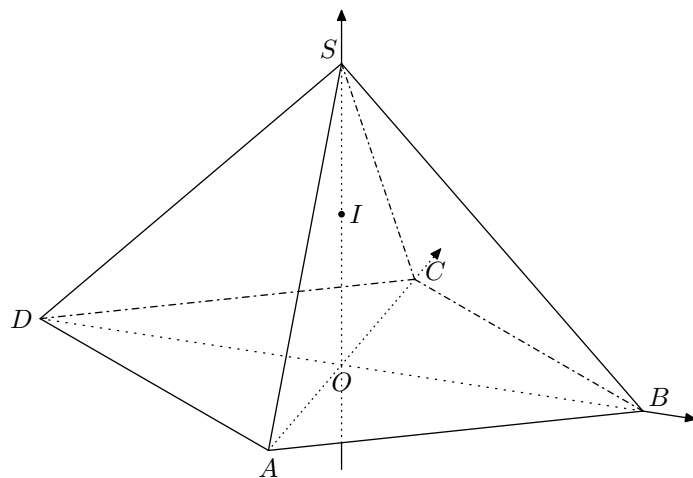


Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)

Propriété des catadioptrés

En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}(a; b; c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB) , (OBC) et (OAC) , le rayon final est parallèle au rayon initial.

E.6886    On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB=1$.

On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

- 1 Justifier que le repère $(O; \vec{OB}; \vec{OC}; \vec{OS})$ est orthonormé.

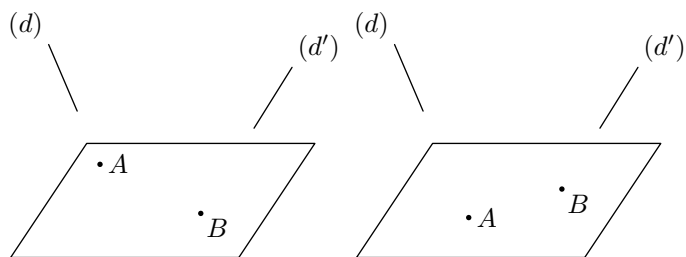
Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $(O; \vec{OB}; \vec{OC}; \vec{OS})$.

- 2 On définit le point K par la relation $\vec{SK} = \frac{1}{3} \cdot \vec{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.

- Déterminer les coordonnées du point K .
- En déduire que les points B , I et K sont alignés.
- On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI) . Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.
- Déterminer les coordonnées du point L .

6. Les objets des l'espace

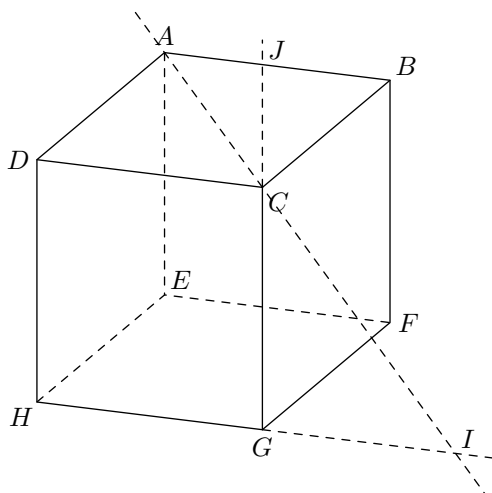
E.579   Vérifier que sur les deux dessins ci-dessous, A et B sont les points d'intersection respectivement des droites (d) et (d') avec le plan (P)



E.588   Répondre par oui ou non aux questions suivantes :

- ① Deux points définissent toujours une unique droite?
- ② Trois points définissent toujours un unique plan?
- ③ L'intersection de deux plans est un point?

E.581   Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ dont la représentation est donnée ci-dessous :



Dans la représentation suivante, I est un point appartenant à la droite (GH) et J appartient à la droite (AB) .

Quatre affirmations sont proposées ci-dessous. Dire si chacune de ces propositions est vraie ou fautive en justifiant votre réponse.

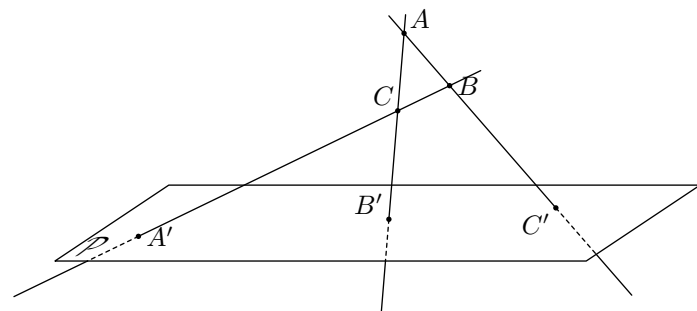
- ① Le triangle EHD rectangle en H .
- ② Les droites (AC) et (GH) sont sécantes en I .

③ Le quadrilatère $BCHE$ est un rectangle.

④ J est le point d'intersection de (CG) et (AB) .

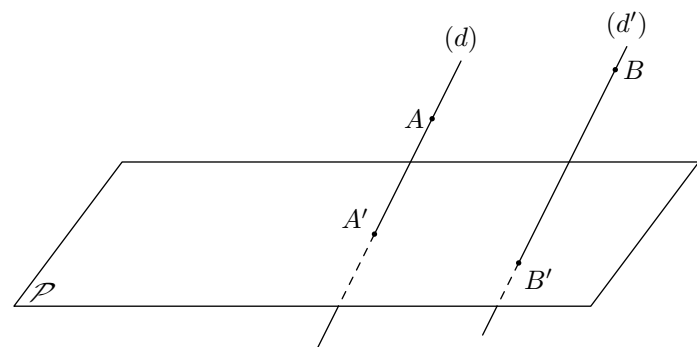
E.587   On considère dans l'espace un plan (P) et A, B, C n'appartenant pas à ce plan et non-alignés. On note :

- A' le point d'intersection de la droite (BC) avec (P) ;
- B' le point d'intersection de la droite (AC) avec (P) ;
- C' est le point d'intersection de la droite (AB) avec (P) ;



Démontrer que les points A', B' et C' sont alignés.

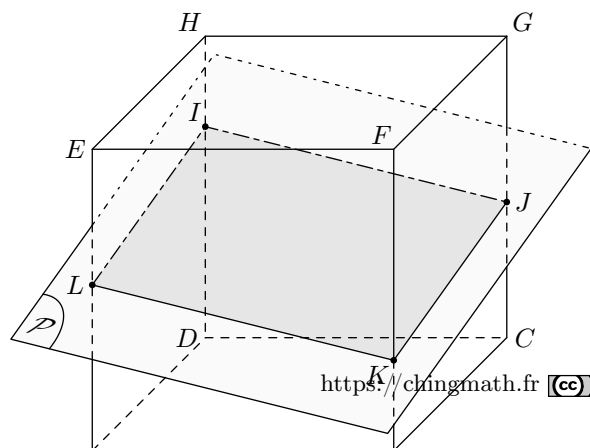
E.584   Dans l'espace, on considère un plan (P) et deux droites (d) et (d') parallèles. A et B sont respectivement des points des droites (d) et (d') . On nomme A' et B' les points d'intersections respectifs des droites (d) et (d') avec le plan (P) .



- ① Justifier que les points A, B, A' et B' sont coplanaires.
- ② Justifier que, sur le graphique, les droites (AB) et $(A'B')$ ne sont pas parallèles.
- ③ Placer, dans la figure, le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$.

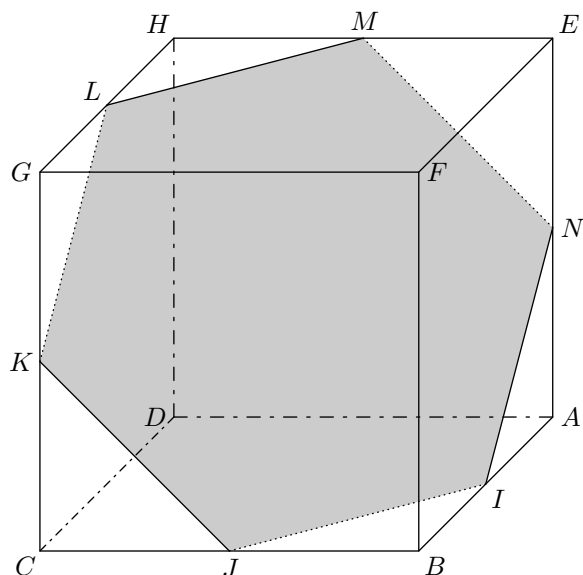
7. Règles d'incidence

E.2768   $ABCDEFGH$ est un cube ; on considère le plan (P) dont la section avec le cube est le quadrilatère $IJKL$



Justifier que $IJKL$ est un parallélogramme.

E.6885    $ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.



Soit I le milieu de $[AB]$.

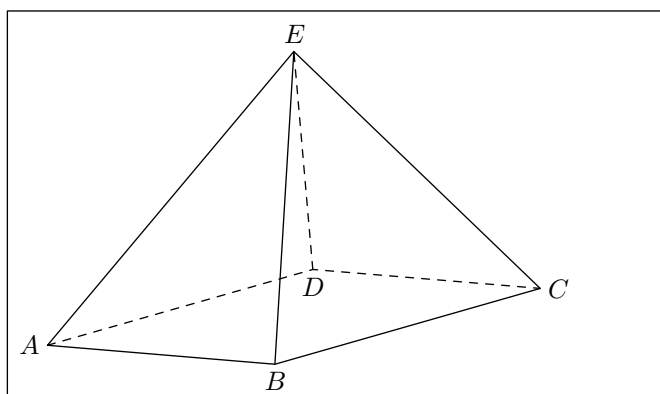
Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I .

On admet que la section du cube par le plan $\mathcal{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB], [BC], [CG], [GH], [HE]$ et $[AE]$.

Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

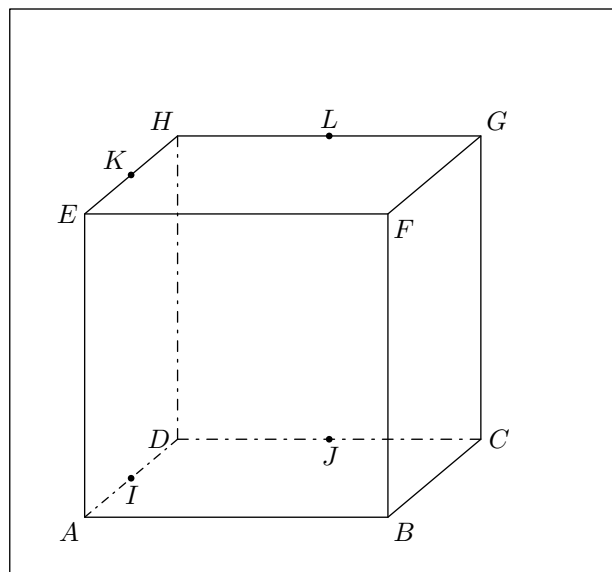
8. Théorème du toit

E.5404   On considère la pyramide $ABCDE$, représentée ci-dessous, à base carrée :



- 1 Déterminer la position de la droite (d) intersection des plans (ABE) et (CDE) .
- 2 Représenter la droite (d) .

E.2796   On considère le cube $ABCDEFGH$. Les points I, J, K, L sont les milieux respectifs des arêtes $[AD], [DC], [EH], [HG]$.



Le point Q est le point d'intersection de la droite (KL) et du plan (CBF) .

Le point S est le point d'intersection de la droite (IJ) et du plan (CBF) .

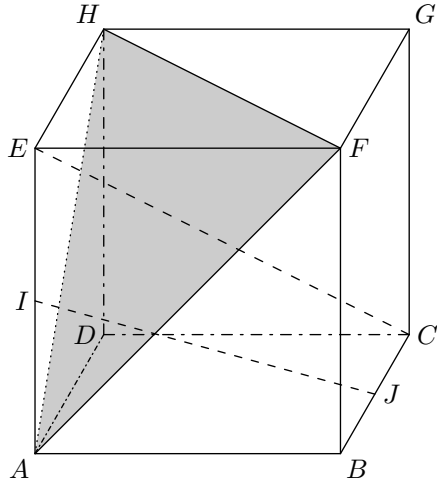
- 1 Placer les points Q et S sur la figure.
- 2 Justifier que les droites (QB) et (FS) sont coplanaires et sécantes. On note M leur point d'intersection.
- 3 En déduire le tracé de la droite (d) intersection des plans (KLB) et (FIJ) .

9. Exercices non-classés

E.6818



On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous :



On note I et J les milieux respectifs des segments $[AE]$ et $[BC]$.

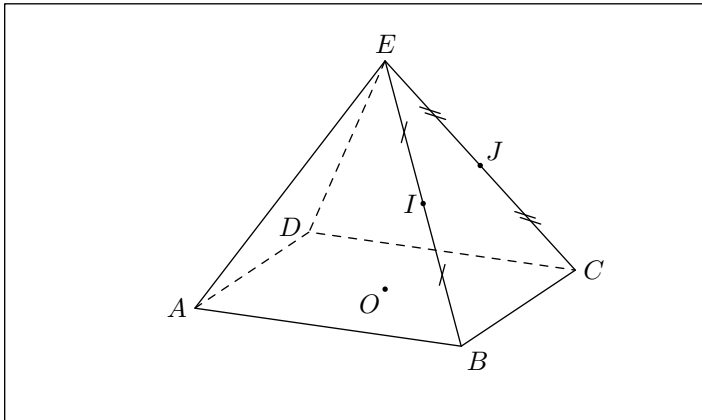
Parmi les quatre affirmations ci-dessous, une seule est exacte. Indiquer laquelle et justifier votre choix.

- ☐ a Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
- ☐ b Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
- ☐ c Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
- ☐ d Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.

E.4913



On considère la pyramide $ABCDE$ à base rectangulaire $ABCD$ représentée ci-dessous :



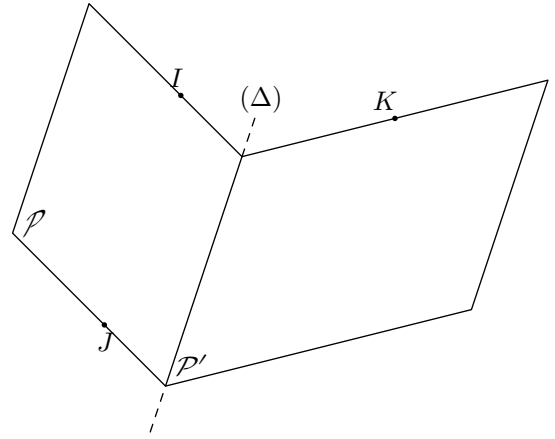
On note I et J les milieux respectifs des segments $[EB]$ et $[EC]$, et O le centre du rectangle $ABCD$.

- 1 ☐ a Justifier que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
- ☐ b Justifier que les droites (IJ) et (AD) sont parallèles.
- 2 Justifier que la droite (AD) est parallèle au plan (OIJ) .

E.4948



Soit (P) et (P') deux plans sécants. Soient I, J deux points du plan (P) et K un point du plan (P') .

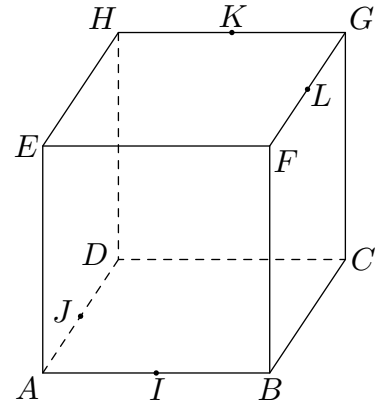


Tracer la droite d'intersection des plans (P') et (IJK) . Justifier votre démarche.

E.4942

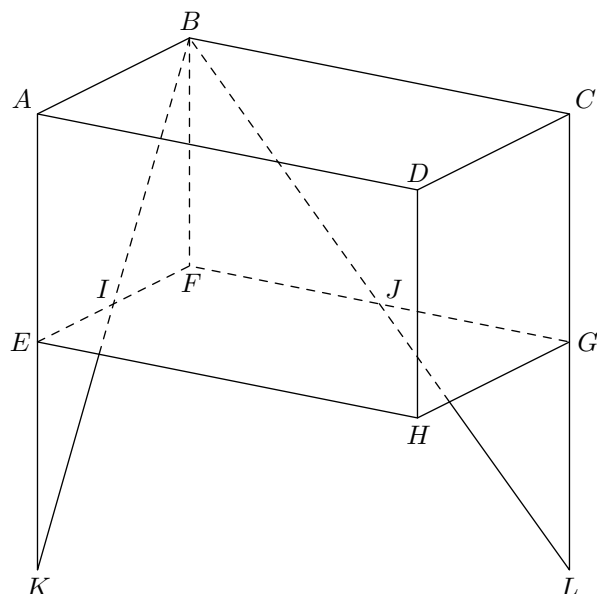


On considère le cube ci-dessous où les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AD]$, $[HG]$ et $[GF]$.



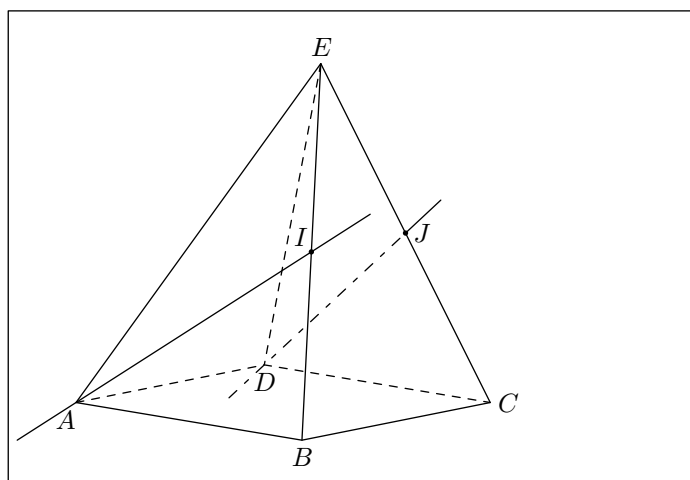
- 1 Justifier que les droites (IJ) et (BD) sont parallèles.
- 2 ☐ a Justifier que les points H, D, B et F sont coplanaires.
- ☐ b Justifier que les droites (HF) et (DB) sont parallèles.
- ☐ c Démontrer que les points I, J, K, L sont coplanaires.
- 3 Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$?

E.580 Dans l'espace, on considère le parallélépipède $ABCDEFGH$. On note I et J les milieux respectifs des arêtes $[EF]$ et $[FG]$. On note K l'intersection des droites (AE) et (BI) ; on note L le point d'intersection des droites (BJ) et (CG) .



- 1 Justifier que les points I , J , K et L appartiennent à un même plan.
- 2 Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.

E.583 Dans l'espace, on considère la pyramide $ABCDE$ à base carrée; on note I et J les milieux respectifs des arêtes $[EB]$ et $[EC]$:



- 1 a Démontrer que les points A , D , I et J sont coplanaires.
b Démontrer, sans utiliser aucun argument graphique, que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes.
c On note M le point d'intersection des droites (AI) et (DJ) . Placer le point M sur le graphique.
- 2 a Démontrer que le point M appartient au plan (AEB) et (DEC) .
b En déduire que la droite (EM) est la droite d'intersection des plans (AEB) et (DEC) .
- 3 En déduire que (EM) est parallèle à la base $ABCD$ de la pyramide.

E.5503 Dans l'espace, on considère deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ contenant respectivement les droites (d_1) et (d_2) parallèles entre elles.

Si les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants entre eux alors les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans.

