



1. Calcul dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

E.11326



Définitions :

On classe les nombres suivants leurs natures :

- l'ensemble des **nombres rationnels**, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des nombres s'écrivant sous la forme d'une fraction.
- l'ensemble des **nombres décimaux**, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des nombres s'écrivant sous la forme d'une fraction décimale (dont le dénominateur est une puissance de 10).

- 1 Montrer que chacun des nombres suivants appartiennent à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{D}$:

a $\frac{5}{4}$

b 0,54

c 12

- 2 Montrer que chacun des nombres suivants appartiennent à $\mathbb{Q}$, mais pas à $\mathbb{D}$:

a $\frac{1}{3}$

b $1 + \frac{4}{7}$

E.8270



On considère les deux expressions :

$$A = 5 - 4x \quad ; \quad B = \frac{2x+2}{x-1}$$

- 1 Calculer chacune des deux expressions A et B pour chacun des nombres $x=2$ et $x=-5$.
- 2 Compléter le tableau ci-dessous avec les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ pour indiquer le plus petit ensemble auquel appar-

tient chacun de ces nombres :

	$x=2$	$x=-5$
$A=5-4x$		
$B=\frac{2x+2}{x-1}$		

E.8271



On considère les deux expressions :

$$A = x^2 - 3x + 1 \quad ; \quad B = -6x^2 + x + 3$$

- 1 Évaluer chacune des deux expressions A et B pour chacun des nombres $x=-1$ et $x=\frac{1}{2}$.
- 2 Compléter le tableau ci-dessous avec les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{Q}$ pour indiquer le plus petit ensemble auquel appartient chacun de ces nombres :

	$x=-1$	$x=\frac{1}{2}$
$A=x^2-3x+1$		
$B=-6x^2+x+3$		

E.8505



Soit n un entier naturel ($n \in \mathbb{N}$).

- 1 Établir l'identité pour tout $n \in \mathbb{N}$:
- $$4 - \frac{6}{n+2} = \frac{4n+2}{n+2}$$
- 2 En déduire les trois valeurs de n pour lesquelles l'entier $n+2$ est un diviseur de l'entier $4n+2$

2. Ensemble $\mathbb{D}$ et encadrement

E.8272



Définition : un **nombre décimal** est un nombre qui s'écrit sous la forme d'une fraction décimale (où le dénominateur est une puissance de 10).

L'ensemble de tous les nombres décimaux se note $\mathbb{D}$.

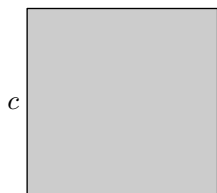
- 1 On considère le nombre π dont une valeur approchée est : $\pi \approx 3,14159265$
- a Donner l'encadrement du nombre π au dixième près.
- b Donner l'encadrement du nombre π au millièmè près
- 2 On considère le nombre $\sqrt{2}$ dont une valeur approchée est : $\sqrt{2} \approx 1,4142136$
- a Donner l'encadrement du nombre $\sqrt{2}$ au dixième près.
- b Donner l'encadrement du nombre $\sqrt{2}$ au millièmè près

E.8506

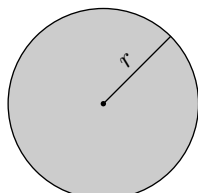


- 1 Donner un nombre d appartenant à l'ensemble $\mathbb{D}$ et vérifiant l'encadrement : $\frac{4}{49} < d < \frac{5}{49}$
- 2 Donner un nombre d' tel que $d' \in \mathbb{D}$ et $\sqrt{2} < d' < \sqrt{3}$.

E.8273    On considère le carré et le disque ci-dessous :



$$A = c^2$$



$$A = \pi \times r^2$$

- ① Sachant que l'aire du carré est de $5m^2$, donner un encadrement, au centième près, de la mesure du côté de ce carré.
- ② Sachant que l'aire du disque est de $4m^2$, donner un encadrement, au centième près, de la mesure du rayon du disque.

E.1735   

Proposition : (admise)

Une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible appartient à l'ensemble $\mathbb{D}$ si, et seulement si, son dénominateur admet une décomposition en produits de facteurs premiers de la forme $2^m \times 5^n$ avec m et n des entiers naturels.

On considère les trois nombres :

$$A = \frac{36\,359}{363\,519} \quad ; \quad B = 0,1000195313 \quad ; \quad C = \frac{5\,121}{51\,200}$$

- ① À l'aide de la calculatrice, Comparer les valeurs approchées de ces trois nombres.
Quelle conjecture peut-on émettre?
- ② **a** Vérifier l'égalité : $363\,519 = 3^2 \times 13^2 \times 239$
Puis, justifier que le nombre A n'appartient pas à $\mathbb{D}$.
b Justifier que les nombres A et B sont distincts.
- ③ **a** Donner le chiffre des unités du produit : $1\,000\,195\,313 \times 512$
b Justifier que les nombres B et C sont distincts.

3. Ensemble $\mathbb{Q}$ et appartenance à $\mathbb{D}$

E.8511   

Définition : l'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des nombres admettant une expression sous forme de quotient $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers relatifs.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Par question, une seule réponse est exacte.

- ① Pour le nombre $\frac{1}{3}$:
☐ $\frac{1}{3} = 0,33$ ☐ $\frac{1}{3} = 0,34$ ☐ $\frac{1}{3} = 0,3333$ ☐ $\frac{1}{3} = 0,3334$
☐ les réponses précédentes sont fausses.
- ② L'écriture décimale du nombre $\frac{1}{3}$ a sa partie décimale qui est composée de :
☐ 10 chiffres ☐ 100 chiffres ☐ 10 000 chiffres
☐ les réponses précédentes sont fausses.

- ③ Pour le nombre $\frac{1}{3}$, on a :

$$\square \frac{1}{3} \in \mathbb{N} \quad \square \frac{1}{3} \in \mathbb{Z} \quad \square \frac{1}{3} \in \mathbb{D} \quad \square \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$$

E.8274   

- ① On considère le nombre $x = 0,333333$.
L'assertion " $3 \times x = 1$ " est-elle vraie ou fausse?
- ② On considère le nombre $y = 0,333334$.
L'assertion " $3 \times y = 1$ " est-elle vraie ou fausse?
- ③ On considère l'équation : (E) : $3 \times z = 1$.
a Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Q}$.
b Que peut-on dire de la résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{D}$.

E.8510    On considère un quotient $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$.

- ① Donner un quotient tel que : $\frac{a}{b} \notin \mathbb{D}$ et $\frac{b}{a} \in \mathbb{D}$.
- ② Donner un quotient tel que : $\frac{a}{b} \in \mathbb{D}$ et $\frac{b}{a} \in \mathbb{D}$.

4. Comparaison de quotients

E.346    Sans s'aider de la calculatrice, comparer les quotients suivants :

- | | |
|--|---|
| a $\frac{6}{5}$ et $\frac{9}{5}$ | b $\frac{5}{8}$ et $\frac{5}{9}$ |
| c $-\frac{7}{3}$ et $-\frac{10}{3}$ | d $\frac{10}{27}$ et $\frac{10}{31}$ |

E.9443    Soit n un entier supérieur ou égal à 2, comparer les deux quotients : $\frac{n}{n+1}$ et $\frac{n}{n-1}$.

E.291    Pour n un entier naturel, $n \in \mathbb{N}$, comparer les rationnels suivants :

$$\frac{n+1}{n+2} \quad ; \quad \frac{n+6}{n+3} \quad ; \quad \frac{n+7}{n+3}$$

E.243   

(1) Effectuer les calculs suivants :

(a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$

(2) (a) Soit m un entier strictement positif, faites une conjecture sur l'écriture de la différence suivante :

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

(b) Démontrer cette conjecture.

E.313    Soit $a > 1$:

(1) Comparer : $\frac{a}{a-1}$ et $\frac{a}{1+a}$.

5. Calculs dans $\mathbb{Q}$

E.8275    Calculer et donner le résultat sous forme de fractions simplifiées.

(a) $\frac{3}{4} + \frac{2}{6}$ (b) $\frac{2}{15} + \frac{3}{20}$ (c) $\frac{5}{12} - \frac{9}{8}$
(d) $\frac{5}{6} - \frac{13}{9}$ (e) $\frac{5}{12} - \frac{2}{15}$ (f) $\frac{15}{66} - \frac{10}{44}$

E.11289    Calculer et donner l'expression réduite des calculs :

(a) $\frac{1}{3} + \frac{35}{3} \times \frac{5}{14}$ (b) $\frac{5}{9} - \frac{2}{3} \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{6} \right)$

E.8276    Calculer les fractions suivantes et écrivez-les sous formes irréductibles :

(a) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{3}{2}$ (b) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \times \frac{5}{6}$ (c) $\frac{5-3 \times 7}{5+9 \times 3}$

E.8313    En laissant les étapes de calculs dans votre rédaction, effectuer les calculs ci-dessous en donnant le résultat sous la forme d'une fraction réduite :

(a) $\frac{2}{7} + \frac{5}{14}$ (b) $\frac{3}{4} - \frac{5}{6}$ (c) $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{2}{4}$ (d) $\frac{3}{7} - \frac{2}{7} \times \frac{21}{8}$

E.8277    Effectuer les calculs suivants :

(a) $\frac{5}{7} + \frac{1}{7} \times \left(5 + \frac{1}{2} \right)$ (b) $\frac{\frac{1}{3} + \frac{4}{3}}{\frac{10}{9}}$
(c) $\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{17}{9} - \frac{1}{3}}$ (d) $\frac{2}{13} - \frac{5}{13} \div \frac{10}{16}$

(2) Classer ces nombres dans l'ordre croissant :

0 ; $\frac{a}{1+a}$; $\frac{a}{a-1}$; 1 ; $\frac{a}{1-a}$; $\frac{-a}{1+a}$

E.314    Comparer les nombres :

$\frac{x}{x+1}$; $\frac{x+1}{x+2}$

E.10220    Comparer les quotients suivants :

(a) $\frac{3}{\pi}$ et $\frac{5}{-\pi}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{7}$ et $\frac{\sqrt{2}}{5}$

E.4418    Effectuer les calculs suivants :

(a) $\frac{1 + \frac{3}{7}}{2 - \frac{8}{3}}$ (b) $\frac{\frac{5}{11} + \frac{7}{5}}{\frac{3}{2} - \frac{5}{2}}$ (c) $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$

E.1717    Effectuer les calculs ci-dessous ; attention, on ne peut simplifier une fraction que lorsque son numérateur et son dénominateur sont entièrement déterminés :

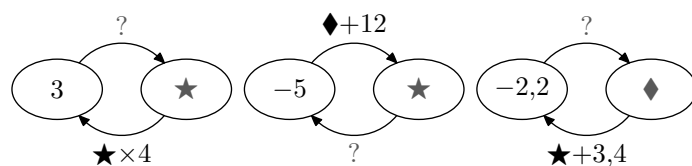
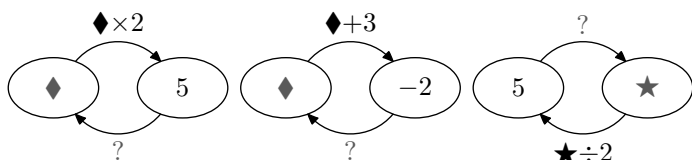
(a) $\frac{1 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{23}{7}}$ (b) $\frac{5 - \frac{2-3}{5-9}}{\frac{3+1}{4} + \frac{9-4}{3}}$ (c) $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$

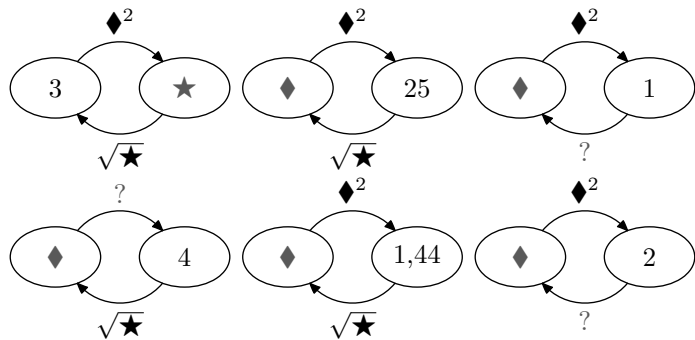
E.241    Effectuer les calculs :

(a) $\frac{2}{\frac{2}{\frac{1}{4} + 2} - 1}$ (b) $\frac{\left(1 - \frac{3}{2} \right)^3}{5^3 - 101}$ (c) $\frac{52}{\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{5}{6}}} - 3}$

6. Nombres irrationnels

E.776    Ci-dessous sont indiqués des “diagrammes commutant”. Retrouver les valeurs manquantes ainsi que les opérations inverses.





E.265 Dans cet exercice, nous allons montrer que, pour tout entier naturel a , $\sqrt{a}$ est soit un nombre entier, soit un nombre non-décimal.

Un nombre décimal X (en base 10) est un nombre admettant l'écriture :

$$X = x_0, x_1 x_2 x_3 \dots x_n$$

où $\begin{cases} x_0 \text{ est sa partie entière,} \\ n \text{ est le nombre de décimales de } X \\ x_1, x_2, \dots, x_n \text{ des entiers compris entre 0 et 9} \end{cases}$

La première remarque est que puisque X est un nombre ayant n décimales, alors x_n est non-nul.

Exemple : pour $X = 25,153$. On a :

$$\bullet x_0 = 25 \quad \bullet n = 3 \quad \bullet x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 3$$

Soit a un entier naturel, supposons que $\sqrt{a}$ est un nombre décimal non entier : $a \in \mathbb{D}$; $a \notin \mathbb{N}$

Ainsi, $\sqrt{a}$ admet la décomposition décimale suivante :

$$\sqrt{a} = x_0, x_1 x_2 x_3 \dots x_n$$

où n est non-nul.

- 1 a Effectuer, en les posant, les opérations suivantes :
 $1,1 \times 1,1$; $1,2 \times 1,2$; $1,3 \times 1,3$; ... ; $1,9 \times 1,9$
- b Justifier que le carré d'un nombre décimal possédant un seul chiffre dans la partie décimale ne peut être un entier.

- 2 En déduire que $\sqrt{a}$ ne peut être un nombre décimal.

E.779 On souhaite montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

C'est-à-dire que le nombre $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ irréductible où a et b seraient deux entiers.

On notera alors $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Nous allons faire un raisonnement par l'absurde.

On suppose l'existence de deux entiers a et b vérifiant l'égalité $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et tels que cette fraction soit irréductible.

Et nous allons développer notre raisonnement jusqu'à aboutir une contradiction mettant ainsi en échec notre hypothèse de départ.

- 1 Montrer que a et b vérifie l'égalité : $a^2 = 2b^2$

- 2 En déduire que a est un entier pair.

Ainsi, il existe un entier c tel que : $a = 2 \times c$.

- 3 En utilisant la question 1, en déduire la parité de b .

- 4 Est-ce que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible?

Nous venons d'aboutir à une contradiction. Notre raisonnement étant correct, nous devons remettre en cause notre hypothèse de départ : le nombre $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.

7. Ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

E.8023

Définitions :

On classe les nombres suivants leurs natures :

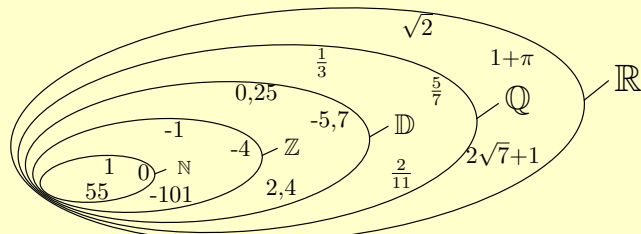
- Tous les nombres entiers positifs ou nul forment l'ensemble des **nombres naturels** noté $\mathbb{N}$.
- Tous les nombres entiers (*positifs, nul, négatifs*) forment l'ensemble des **nombres relatifs** noté $\mathbb{Z}$.
- Tous les nombres s'écrivant comme une fraction décimale (*dénominateur est une puissance de 10*) forment l'ensemble des **nombres décimaux** noté $\mathbb{D}$.
- Tous les nombres admettant une écriture sous la forme d'un quotient de deux entiers forment l'ensemble des **nombres rationnels** noté $\mathbb{Q}$.
- Tous les nombres existants forment l'ensemble des **nombres réels** noté $\mathbb{R}$.

Relier chacun des nombres au plus petit ensemble auquel il appartient :

$\frac{4}{3}$	$\sqrt{2}$	-3	5	$0,6$
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$

E.8028   

Vocabulaire : ci-dessous, sont représentés les cinq ensembles de nombres les plus connus : l'ensemble des nombres naturels ($\mathbb{N}$), l'ensemble des nombres relatifs ($\mathbb{Z}$), l'ensemble des nombres décimaux ($\mathbb{D}$), l'ensemble des nombres rationnels ($\mathbb{Q}$), l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$),



Relier chacun des nombres ci-dessous au plus petit des ensembles auquel il appartient :

$\frac{-3}{2}$ $\frac{-4}{3}$ $\frac{-6}{-2}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{28}{-7}$

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{D}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

E.8315    Pour chacun des nombres ci-dessous, donner le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient :

a $\frac{-4+2 \times 5}{2}$ b $\frac{-9+8}{4}$ c $\frac{1}{\pi}$ d $\frac{8 \times 2 - 2}{3}$

E.11407    Parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, indiquer pour chaque nombre le plus petit ensemble auquel il appartient :

a $\frac{-56}{8}$ b $\sqrt{64}$ c $\frac{12}{9}$ d $\sqrt{2}$ e $\sqrt{6,25}$

E.11429    Parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, indiquer pour chaque nombre le plus petit ensemble auquel il appartient :

a $\frac{24}{6}$ b $\frac{-72}{8}$ c $\sqrt{3}$ d $\sqrt{64}$ e $\sqrt{0,49}$

E.269    Pour chacun des nombres ci-dessous, déterminer le plus petit ensemble de nombre auquel il appartient :

a $\frac{3}{4}$ b $\frac{5}{3}$ c $\frac{0,3}{2,4}$ d $\frac{5,1}{1,7}$
e $\sqrt{18}$ f $\sqrt{121}$ g $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ h $\sqrt{1,44}$

E.1726   

Nombre	Nature	On écrit
1	Entier naturel	$1 \in \mathbb{N}$
-5		$-5 \in$
-3,12		$-3,12 \in$
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3} \in$
$\frac{4}{5}$		$\frac{4}{5} \in$
$\sqrt{2}$		$\sqrt{2} \in$
$\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{2}$		$\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{2} \in$
$\frac{3^6 \times 4^4 \times 15^2}{3^7 \times 2^3}$		$\frac{3^6 \times 4^4 \times 15^2}{3^7 \times 2^3} \in$

E.9528    Donner la nature de chacun des nombres suivants :

a $\sqrt{2}$ b 4×10^{10} c $\sqrt{6^2 - 3^2}$
d $\frac{-5}{2}$ e $\frac{3 \times 10^5 \times 14 \times 10^{12}}{21 \times 10^4}$ f $(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})$

E.278    Pour chacun des nombres ci-dessous, indiquer le plus petit ensemble auquel il appartient (*indiquer vos calculs si nécessaire*) :

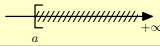
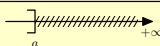
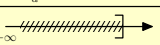
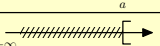
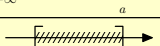
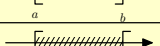
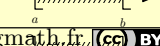
a $1 + \frac{1}{3}$ b $-\frac{3}{2} - \frac{5}{9}$ c $\sqrt{2}$ d $\sqrt{7^{500}}$
e $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ f $1+\pi$ g $(1+\sqrt{2})^2$ h $[\cos(60^\circ)]^2$

8. Intervalle

E.8314   

Définition : On appelle **intervalle** tout sous-ensemble de nombres qui peut être définie par la délimitation d'un ou de deux nombres appelés ses **bornes**.

Voici les différents types d'intervalles et leurs notations :

$[a; +\infty[$	$x \geq a$	l'ensemble des nombres supérieur ou égal à a	
$]a; +\infty[$	$x > a$	l'ensemble des nombres strictement supérieur à a	
$] -\infty; a]$	$x \leq a$	l'ensemble des nombres inférieur ou égal à a	
$] -\infty; a[$	$x < a$	l'ensemble des nombres strictement inférieure à a	
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	l'ensemble des nombres supérieurs ou égal à a et inférieur ou égal à b	
$[a; b[$	$a \leq x < b$	l'ensemble des nombres supérieurs ou égal à a et strictement inférieur à b	
$]a; b]$	$a < x \leq b$	l'ensemble des nombres strictement supérieurs à a et inférieur ou égal à b	
$]a; b[$	$a < x < b$	l'ensemble des nombres strictement supérieurs à a et strictement inférieurs à b	

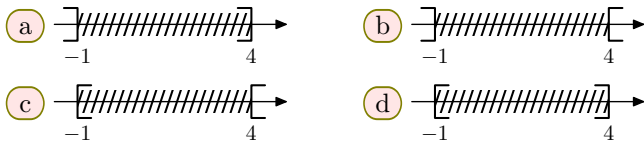
1 Parmi les intervalles ci-dessous, lequel représente l'ensemble des nombres x vérifiant l'encadrement : $-1 \leq x < 4$:

- (a) $[-1; 4]$ (b) $] -1; 4]$ (c) $[-1; 4[$ (d) $] -1; 4[$

2 Parmi les intervalles donnés ci-dessous, lequel représente l'ensemble des nombres x réalisant l'inégalité $x > 4$:

- (a) $] -\infty; 4[$ (b) $] -\infty; 4]$ (c) $[4; +\infty[$ (d) $]4; +\infty[$

E.4202 Quatre ensembles de nombres sont représentés ci-dessous sur une droite graduée :



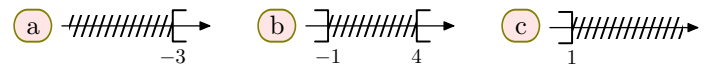
Associer à chacun de ces ensembles de nombres, l'encadrement qui est vérifié par tous les nombres de cet ensemble :

(1) $-1 \leq x \leq 4$ (2) $-1 < x < 4$

(3) $-1 \leq x < 4$ (4) $-1 < x \leq 4$

E.4201 Sur chaque droite ci-dessous, est

représenté un ensemble de nombres :



Utiliser un intervalle pour décrire chacun de ces ensembles.

E.6512 Recopier les informations manquantes sur votre copie :

(a)		$-4 \leq x < 1$
(b)		
(c)		
(d)		$x < 2$
		$-3 < x \leq 1$

9. Intervalle et appartenance

E.316 Compléter à l'aide des symboles $\in$ et $\notin$:

(a) $3 \dots \left[0; \frac{5}{2}\right[$ (b) $0,33 \dots \left[\frac{1}{3}; 1\right]$

(c) $-3 \dots [2; 4]$ (d) $1 \dots]-0,2; 3]$

E.11430 Compléter les pointillés avec les symboles $\in$ et $\notin$:

(a) $-2 \dots]-5; -3]$ (b) $1,41 \dots]1,5; 4[$

(c) $\frac{8}{9} \dots [1,1; 5]$ (d) $-\sqrt{3} \dots]-6; -1,7[$

E.11408 Compléter les pointillés avec les symboles $\in$ et $\notin$:

(a) $3 \dots]2; 4]$ (b) $-3,2 \dots]-7; -4[$

(c) $\frac{5}{3} \dots [2,6; 5]$ (d) $-\sqrt{2} \dots]-3; -1,2]$

E.8571 À l'aide des symboles d'appartenance

($\in$) et de non-appartenance ($\notin$), indiquer les nombres appartenant à l'intervalle $[-2; 1]$:

0 ; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{\pi}{4}$

E.9328 Compléter les pointillés avec les symboles $\in$ ou $\notin$:

(a) $\pi \dots]3,14; 5]$ (c) $\sqrt{2} \dots [2; 3]$

(b) $\pi \dots]0,5; 3,1]$ (d) $\pi \dots]3,1; 4]$

(e) $\frac{1}{3} \dots]0; 0,33[$

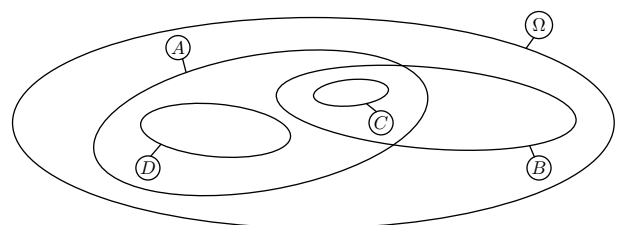
E.311 Recopier et compléter à l'aide du symbole d'appartenance ($\in$) et de non-appartenance les lignes suivantes :

(a) $\sqrt{2} \dots]1; 3[$ (b) $\frac{2}{\sqrt{2}} \dots [\sqrt{2}; 5]$

(c) $\frac{1-\sqrt{11}}{\sqrt{11}} \dots]-\infty; 0[$ (d) $\frac{\sqrt{16}}{4} \dots]-4; 4[$

10. Inclusion d'intervalles

E.9475 Ci-dessous est représenté l'univers des issues Ω d'une expérience aléatoire et quatre de ces événements A , B , C et D :



À l'aide du symbole $\subset$, écrire la relation d'inclusion induite par le diagramme ci-dessus.

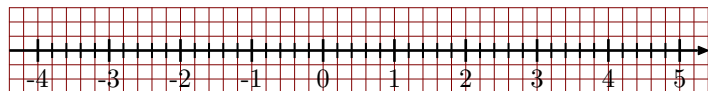
E.601    Dire si les inclusions suivantes sont vraies ou fausses :

(a) $]3; \sqrt{17} \subset]-\infty; 4]$ (b) $[-\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2} \subset]-1; \frac{1}{\sqrt{2}}]$

11. Réunion et intersection d'intervalles

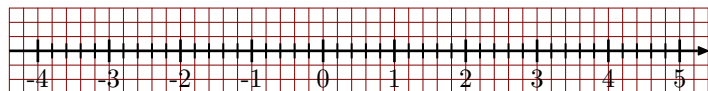
E.5243   

(1) (a) Représenter, sur la droite graduée ci-dessous, les deux intervalles $[-1; 3]$ et $[0; 4]$:



(b) Donner l'intervalle obtenu par la réunion des intervalles $[-1; 3]$ et $[0; 4]$.

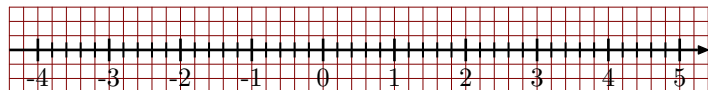
(2) (a) Représenter, sur la droite graduée ci-dessous, les deux intervalles $[-3; 1]$ et $[-1; 2]$:



(b) Donner l'intervalle obtenu par l'intersection des intervalles $[-3; 1]$ et $[-1; 2]$.

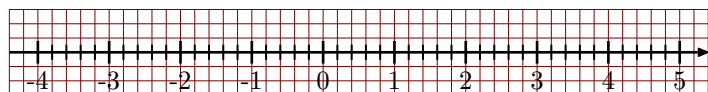
E.8394   

(1) (a) Représenter, sur la droite graduée ci-dessous, les deux intervalles $]0; 4]$ et $[-2; 5[$:



(b) Donner l'intervalle obtenu par la réunion des intervalles $]0; 4]$ et $[-2; 5[$.

(2) (a) Représenter, sur la droite graduée ci-dessous, les deux intervalles $] -2; 0[$ et $[-1; 2]$:



(b) Donner l'intervalle obtenu par l'intersection des intervalles $] -2; 0[$ et $[-1; 2]$.

E.8425    Donner l'expression simplifiée de chacun des ensembles ci-dessous :

(a) $[2; 5] \cup [0; 4]$ (b) $] -1; 2] \cap [3; 5]$ (c) $[2; 4[\cap] -1; 3[$

E.298    Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée les deux intervalles. Puis, déterminer leurs intersections et leurs réunions :

(a) $[0; 2]$; $[1; 3]$ (b) $[0; 2]$; $]2; 3]$
(c) $[0,33; 2]$; $[0,5; 1[$

E.337    Donner deux nombres réels a et b vérifiant les deux conditions suivantes :

$$b - a = 1 \quad \text{et} \quad [a; b] \subset \left[\frac{3}{4}; \frac{5}{2}\right].$$

E.8168   

(1) Donner, si possible, une expression simplifiée des unions d'intervalles suivants :

(a) $[3; 5] \cup [0; 4]$ (b) $[-3; 3] \cup [-2; 2]$ (c) $[-1; 2] \cup [4; 7]$

(2) Donner l'expression des intersections d'intervalles :

(a) $[3; 5] \cap [0; 4]$ (b) $[-3; 3] \cap [-2; 2]$ (c) $[-1; 2] \cap [4; 7]$

E.1935    Avant d'effectuer l'opération sur les intervalles demandés, représenter chacun des deux intervalles sur une droite graduée, puis donner l'ensemble résultant.

(a) $[2; 5] \cup] -1; 7]$ (b) $]3; +\infty[\cup [0; 3[\cup \{3\}$
(c) $[2; 5] \cap] -1; 7]$ (d) $] -\infty; 3] \cap]3; +\infty[$

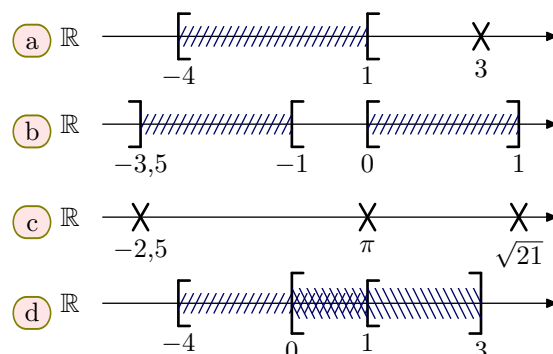
E.9347    Pour chaque question, représenter l'ensemble obtenu sur une droite graduée, puis donner, si possible, une écriture simplifiée de cet ensemble.

(a) $[-1; 1] \cup [1; 4]$ (b) $[1; 4] \cup [-4; -1]$
(c) $[4; 5] \cap [-1; 4]$ (d) $[-1; 1] \cap [2; 3]$

E.1794    Ci-dessous sont représentés des sous-ensembles de $\mathbb{R}$:

- en hachurant les intervalles constituant ce sous-ensemble ;
- en marquant d'une croix les points isolés lui appartenant.

À l'aide des notations ensemblistes, décrire chacun de ces sous-ensembles :



E.1905    Représenter sur une droite graduée chacun des ensembles ci-dessous et donner leur écriture algébrique :

(a) $[-1; \pi] \cup]\sqrt{2}; 5[$ (b) $] -\infty; 2] \cup] -1,5; +\infty[$
(c) $] -2; 8] \cap] -\infty; 3[$ (d) $] -\infty; -\sqrt{3}] \cap [-\sqrt{3}; +\infty[$

E.8632 Pour chaque question, représenter l'ensemble obtenu sur une droite graduée, puis donner, si possible, une écriture simplifiée de cet ensemble.

a $[1; 2] \cup \left[\frac{3}{2}; \frac{14}{8}\right]$ b $\left[-2; \frac{5}{4}\right] \cap [1; 100]$

E.2711 Simplifier l'écriture des ensembles suivants :

a $] -\infty; 3] \cap [-2; 5[$ b $\left[\frac{5}{2}; \sqrt{10}\right] \cap [3; \pi[$
c $\left]-\frac{12}{5}; \sqrt{3}\right[\cup \left[-\sqrt{3}; \frac{9}{4}\right[$

E.8546 Pour chaque couple d'intervalle, donner l'ensemble résultat de leur intersection et de leur réunion :

a $[1; 6[$ et $[3; 8]$ b $\left[-\sqrt{2}; \frac{1}{3}\right[$ et $\left]\frac{1}{3}; 5\right]$
c $] -\infty; \pi]$ et $] 1; +\infty[$

E.859 Déterminer l'ensemble des nombres réalisant simultanément les deux inéquations ci-dessous et représenter cet ensemble sur une droite graduée :

$$\begin{cases} 2x + 4 < 3x - 2 \\ 3x - 5 < 2x + 2 \end{cases}$$

12. Valeurs absolues et distance

E.354

Définition : on notera $d(x; y)$ la distance, sur une droite graduée, entre les points d'abscisses respectives x et y .

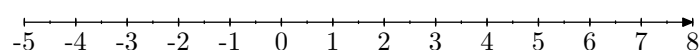
Remarque : comme conséquence directe, on a la propriété : pour tout nombre x et y :

$$d(x; y) = d(y; x)$$

1 Calculer les distances indiquées ci-dessous :

a $d(5; 2) = \dots\dots$ b $d(1; 7) = \dots\dots$
c $d(0; 5) = \dots\dots$ e $d(-2, 5; 0) = \dots\dots$
f $d(-1; 5) = \dots\dots$ g $d(-3; -4) = \dots\dots$
h $d(-1; -5) = \dots\dots$ i $d(4; -2) = \dots\dots$
j $d(-2, 5; -1, 5) = \dots\dots$

On pourra utiliser de la droite graduée ci-dessous :



2 a Compléter le tableau suivant :

x	y	$x - y$	$d(x; y)$
5	2		
3	7		
-2	5		
1	-3		
-1	-6		

b Comparer $x - y$ et $d(x; y)$?

13. Valeurs absolues

E.321 De manière algébrique, calculer les expressions suivantes :

a $|2 - 3|$ b $|5 + 3|$ c $|2 \times (4 - 5)|$
d $|4 \times 2 - 5 \times 7|$ e $|7 + 2| \times |4 - 6|$ f $|2 - 3| \times 2$
g $|5, 5| + |-5, 5|$ h $|-5, 5| - |4, 5|$ i $|2 \times 3 - 7|$

E.11409 Effectuer les calculs suivants :

a $|-5| - |7| - 6$ b $|2 \times 3 - 4 \times 5| - |3 - 3 \times 2|$

E.11431 Effectuer les calculs suivants :

a $|-3| - 10 - |3|$ b $|5 - 5 \times 4| - |3 \times 2 - 6 \times 4|$

E.1595 Effectuer les calculs suivants :

a $2 \times |3 \times 2 - 7| - |5 - 3|$ b $|3 \times 2 - 4| \times |3 - 5|$
c $\frac{|8 - 11 \times 2|}{|+5| + |-5|}$ d $\frac{|2 \times 4 - 7|}{|3 \times 3 - 12|}$

E.1936 Effectuer les calculs suivants :

a $2 \times \left| 3 \times \frac{1}{4} - 2 \right| + 1$ b $\frac{|3| + |-3|}{\left| 2 - \frac{1}{3} \right|}$ c $|2 \times |2 \times 5 - 12| - 7|$

E.11290 Effectuer les calculs suivants :

a $|2 - 3 \times 2| - |2 - 5^2|$ b $\frac{|5 \times 2 - 2 \times 9|}{|5 \times 2 - 2|}$

E.4376 Effectuer les calculs suivants :

a $||5 - 4| + |4 - 5||$ b $|2 \times |3 - 5| + 2| - 5$

E.9329 Simplifier les expressions suivantes :

a $|\sqrt{2} - \sqrt{3}|$ b $|3 - \pi|$ c $|\pi - 4|$

14. Centre d'un intervalle et équation

E.9332   

- Quels sont les points qui sont à une distance de 5 du nombre 3?
- Résoudre l'équation : $|x - 3| = 5$

E.332    Résoudre les équations suivantes :

- (a) $|x| = 3$ (b) $|x - 2| = 3$ (c) $|x - 4| = 7$
 (d) $|x + 2| = 3$ (e) $|x - 4| = 0$ (f) $|x - 2| = -1$

E.330    En traduisant les équations suivantes en un problème sur les distances, donner l'ensemble des solu-

tions des équations.

Exemple :

$|x + 2| = 3$ se traduit en $d(x; -2) = 3$.

- (a) $|x - 4| = 3$ (b) $|x + 2| = 1,5$
 (c) $|x - 5| = \pi$ (d) $|x + \sqrt{5}| = \sqrt{2}$
 (e) $|x - 5| = |x - 1|$ (f) $|x + 2| = |x - 2|$

E.11292    Donner les deux nombres solutions de l'équation :
 $|3 \times x - 5| = 4$

15. Centre d'un intervalle et inéquation

E.9331   

- Résoudre l'équation : $|x - 3| = 5$
- (a) Exprimer, sous forme d'intervalle, l'ensemble des nombres x vérifiant la relation : $|x - 3| \leq 5$
 (b) Quelle relation peut-on établir entre le nombre 3 et les extrémités de l'intervalle solution obtenu à la question (a)?

E.8287   

- Donner le centre de chacun des intervalles :
 (a) $[5; 9]$ (b) $[-2; 6]$ (c) $[0; 4]$
- Compléter les pointillées :
 (a) $x \in [5; 9] \Rightarrow d(x, 7) \leq \dots$
 (b) $x \in [-2; 6] \Rightarrow d(x, \dots) \leq 4$
 (c) $x \in [0; 4] \Rightarrow d(x, \dots) \leq \dots$

E.349    Compléter les pointillés :

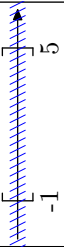
- $|2 - x| \leq 1$ équivaut à $x \in \dots$
- $|x + \dots| \dots 1$ équivaut à $x \in [2; 4]$
- $3 \times |x + 2| \leq 1$ équivaut à $x \in \dots$
- $|x + 5| \geq 2$ équivaut à $x \in \dots \cup \dots$

E.9330    Compléter les pointillés ci-dessous :

- (a) $|x - 3| \leq 2 \Rightarrow x \in [1; \dots]$
 (b) $|x - 5| \leq 1 \Rightarrow x \in [\dots; \dots]$
 (c) $|x + 1| \leq 2 \Rightarrow x \in [\dots; \dots]$

E.352    Compléter le tableau suivant ligne

par ligne.

Droite graduée				
Intervalle	$x \in [-1; 5]$		$x \in [-4; 1]$	
Valeur absolue	$ x - 2 \leq 3$			$ x + 1 < 1$
Encadrement	$-1 \leq x \leq 5$	$3 < x < 7$		
En terme de distance	La distance de x à 2 est inférieure ou égale à 3			

16. Développement illimité

E.68    Déterminer les écritures fractionnaires associées aux développements décimaux illimités suivants :

- (a) $x = 0,7\overline{1}$ (b) $y = 1,2\overline{17}$

E.67   

- ① Donner les écritures fractionnaires des développements décimaux suivants :

$$A = 0,1\overline{7} \quad ; \quad B = 0,784\overline{84}$$

- ② En justifiant votre démarche, donner le développement illimité du nombre fractionnaire $B = \frac{5}{6}$.

17. Partage

E.9531   Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous forme simplifiée :

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{3}$ b) $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{10}\right) \times \frac{5}{2}$ c) $\frac{\frac{1}{9} + \frac{2}{6}}{\frac{16}{3}}$

Indication : le détail des étapes de calculs sera pris en compte lors de l'évaluation.

18. Exercices non-classés

E.312   

- ① Traduire les équations suivantes en termes de distance et donner leurs solutions :

a) $|x+2|=5$ b) $|x-\pi|=\sqrt{2}$ c) $|x-\sqrt{2}|=|x+2\sqrt{2}|$

- ② Résoudre les équations suivantes de manière algébrique :

a) $|x-3|=1$ b) $|x-3|=\sqrt{3}$ c) $|2x+1|=|3x-4|$

- ③ Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée les solutions des inéquations suivantes :

a) $|x+2|>2$ b) $|x-3|\leq 5$ c) $|2x+1|>-1$

E.322   

- ① En termes de distance, que doit vérifier x dans l'équation $|x-10|=5$? Donner alors les valeurs possibles de x .

- ② En termes de distance, que doit vérifier x dans l'équation $|x-10|\geq 5$? Donner alors les valeurs possibles de x .

E.308      On cherche à comparer les nombres suivants :

$$A = \frac{513}{6103515625} \quad ; \quad B = 0,000\,000\,084\,049\,9 \quad ; \quad C = \frac{1}{11897691}$$

- ① Comparer ces trois nombres à l'aide de votre calculatrice. Faites une conjecture.

- ② a) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur de 5^{14} .

b) Montrer que : $A = \frac{8\,404\,992}{10^{14}}$

c) Quelle est la nature du nombre A ?

- ③ On admet la proposition suivante :

Proposition : une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible est un nombre décimal si, et seulement si, son dénominateur admet une décomposition en produits de facteurs premiers de la forme $2^m \times 5^n$ avec m et n des entiers naturels.

Justifier que le nombre C n'est pas un nombre décimal.

- ④ Reprendre votre conjecture de la question ①.

E.9476   Soit a, b, c, d et e cinq nombres distincts deux à deux. On considère les ensembles suivants :

$$A = \{a; c; d\} \quad ; \quad B = \{c; e\} \quad ; \quad C = \{a; d\}$$

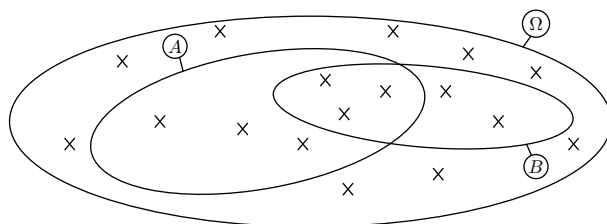
Déterminer l'expression des ensembles suivants :

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $B \cap C$ d) $A \cap (B \cap C)$

E.9477  

Définition : on appelle cardinal d'un ensemble A le nombre d'éléments composant cet ensemble. On note ce nombre $\text{card}(A)$

On considère Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire et A et B deux événements de cet univers.



- ① Donner le nombre d'événements élémentaires composant cette expérience aléatoire.

- ② a) Déterminer la valeur des nombres suivants : $\text{card}(A)$; $\text{card}(B)$; $\text{card}(A \cup B)$; $\text{card}(A \cap B)$

b) Quelle formule retrouve-t-on?

- ③ Déterminer la valeur des nombres suivants : $\text{card}(A \cap \overline{B})$; $\text{card}(A \cup \overline{B})$; $\text{card}(\overline{A} \cap \overline{B})$