Première spécialité/Exponentielle

ChingEval : 5 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

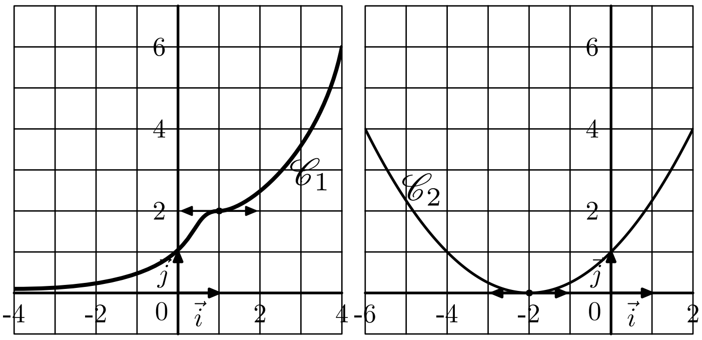
1. Introduction (champs des tangentes) :

Exercice 1

On considère une fonction f vérifiant les deux conditions ci-dessous :

$f(0) = 1$; $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Justifier que les courbes ci-dessous ne sont pas la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



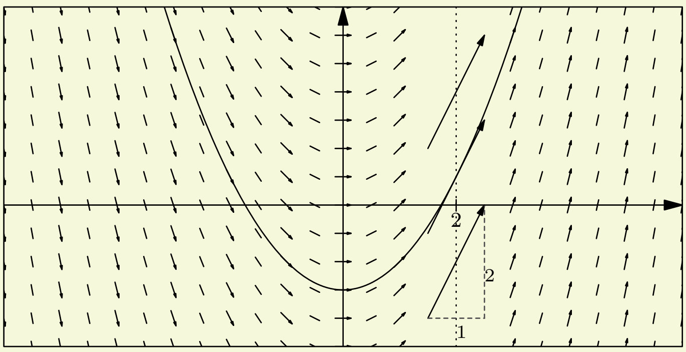
Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère, un "**champs de tangentes**" est un ensemble de vecteurs associé à chaque point du plan.

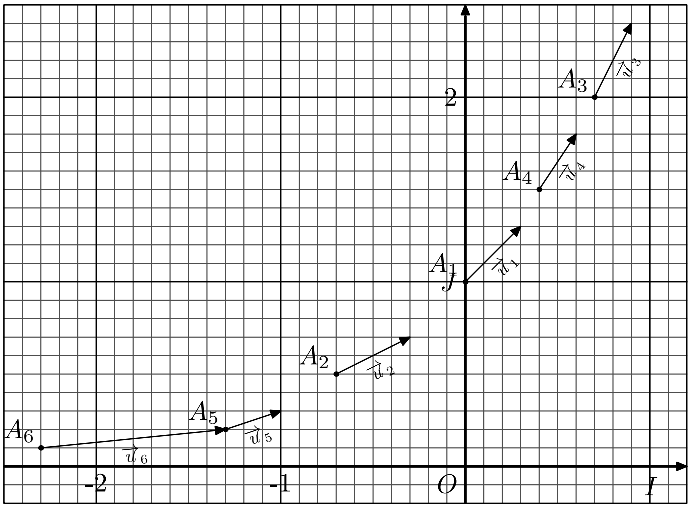
r105-0

Une **courbe dans un champs de tangente** est une courbe qui, en chaque point, le vecteur associé au champs de tangente est un vecteur directeur de sa tangente.

Le champs de tangentes ci-dessous est construit sur la relation $f'(x) = x$: au point d'abscisse 2 la courbe admet une tangente de coefficient directeur 2 :



1. Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, on considère les quatre vecteurs représentés ci-dessous :



On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et notons $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative

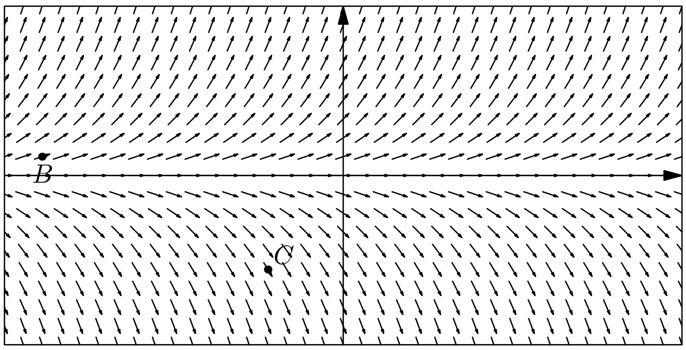
a.
- La fonction f passe par le point A_1 et la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A_1 admet le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ pour vecteur directeur.
  Donner le coefficient directeur de la tangente (T).
- La fonction f passe par le point A_2 et la tangente (T') à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A_2 admet le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ pour vecteur directeur.
  Donner le coefficient directeur de la tangente (T).
- La fonction f passe par le point A_3 et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en A_3 dont $\overrightarrow{u_3}$ est un vecteur directeur.
  Donner le nombre dérivé de la fonction f en 1,7.

b. Quelles relations, parmi celles proposées, peut-on conjecturer pour la fonction f?

- $f'(x) = x$
- $f'(x) = 2 \cdot x$
- $f'(x) = f(x)$
- $f'(x) = 2 \cdot f(x)$

c. Tracer une représentation possible de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Ci-dessous est donnée un champs de tangente dans le plan muni d'un repère :



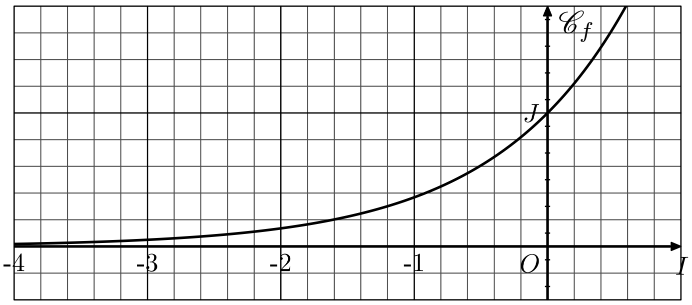
a. Tracer la représentation de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'une fonction g vérifiant ce champs de tangentes et passant par le point B.

b. Tracer la représentation de la courbe $\mathscr{C}_h$ d'une fonction h vérifiant ce champs de tangentes et passant par le point C.

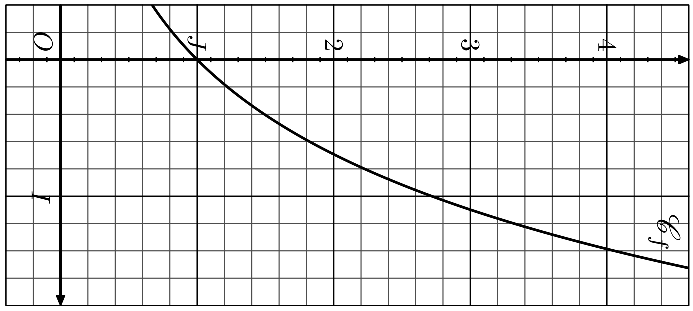
Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ représentée ci-dessous :

- Sur l'intervalle $[-4\,;1]$:



- Sur l'intervalle $\left[-\frac{2}{5}\,;\frac{9}{5}\right]$:



1. - Tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 et donner le coefficient directeur de cette tangente.
   - Comparer les nombres $f(0)$ et $f'(0)$.

   Comparer les nombres $f(-1)$ et $f'(-1)$.

2. Graphiquement, établir les égalité ci-dessous :

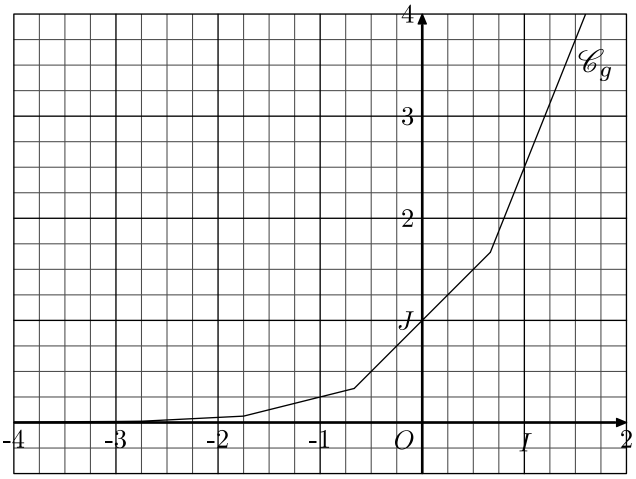
$$f(1)=f'(1) \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right).$$

2. Introduction (méthode d'Euler) :

Exercice 4

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$:

1. On considère la fonction g, affine par morceaux, définie sur $\mathbb{R}$ et dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ est donnée ci-dessous :

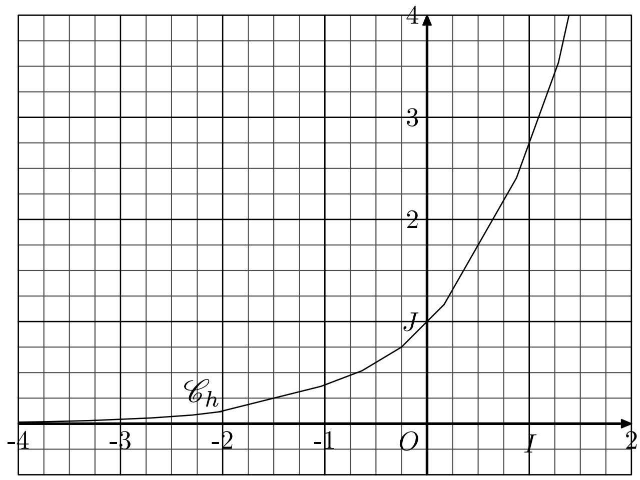


Etablir les égalités ci-dessous :

a. $g'(-1)=g(-1)$ b. $g'(0)=g(0)$ c. $g'(1)=g(1)$

La vidéo suivante montre qu'il existe une infinité de fonctions affine par morceaux vérifiant ces trois propriétés. r173-1

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ et dont la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ est donnée ci-dessous :



Etablir les égalités ci-dessous :

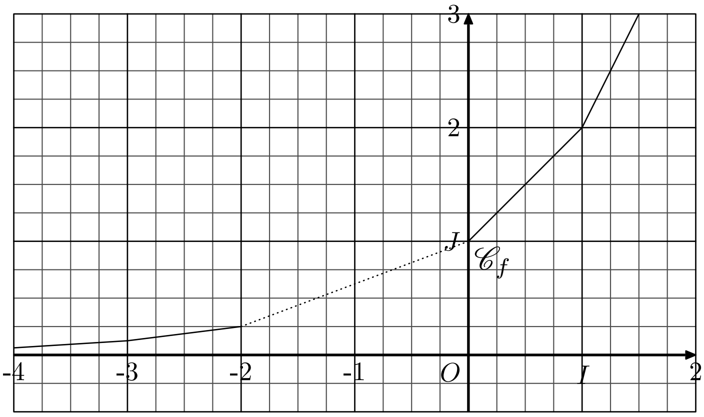
a. $h'(-1)=h(-1)$ b. $h'(0{,}5)=h(0{,}5)$ c. $h'(1)=h(1)$

La fonction h, représentée ci-dessus, vérifie pour tout $n\in\mathbb{Z}$ tel que $-8\leqslant n\leqslant 4$, la relation : $h'\left(\frac{n}{2}\right)=h\left(\frac{n}{2}\right)$

Exercice 5

Partie A - pas de 1

La fonction f, représentée ci-dessous dans une repère, est une fonction continue où sur chacun des intervalles $[i\,;i+1]$ $(i\in\mathbb{Z})$, la fonction f est une fonction affine dont le coefficient directeur est $f(i)$.



1. a. Donner la valeur de $f(0)$ et le coefficient directeur de la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$

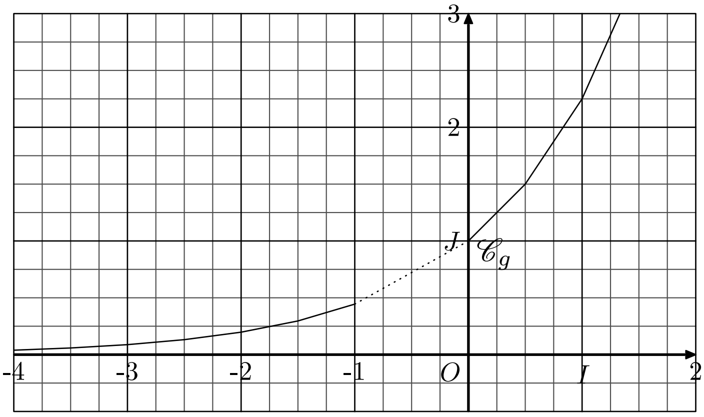
   b. Donner la valeur de $f(1)$ et le coefficient directeur de la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;2]$

2. Déterminer la valeur de $f(-1)$ afin que $f(0)=1$ et que la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;0]$ soit une fonction affine de coefficient directeur $f(-1)$.

3. Compléter correctement le tracer de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie B - pas de ½

La fonction g,représentée ci-dessous dans un repère, est une fonction affine continue où, sur chacun des intervalles $\left[\frac{1}{2}\cdot i\,;\,\frac{1}{2}\cdot(i+1)\right]$ $(i\in\mathbb{Z})$, la fonction g est une fonction affine dont le coefficient directeur est $g\left(\frac{1}{2}\cdot i\right)$.



1. a. Donner la valeur de $g(0)$ et le coefficient directeur de la restriction de la fonction g sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$

   b. Donner la valeur de $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et le coefficient directeur de la restriction de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

2. Déterminer la valeur de $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ afin que $g(0)=1$ et que la restriction de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;0\right]$ soit une fonction affine de coefficient directeur $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

3. Compléter correctement le tracer de la courbe $\mathscr{C}_g$.

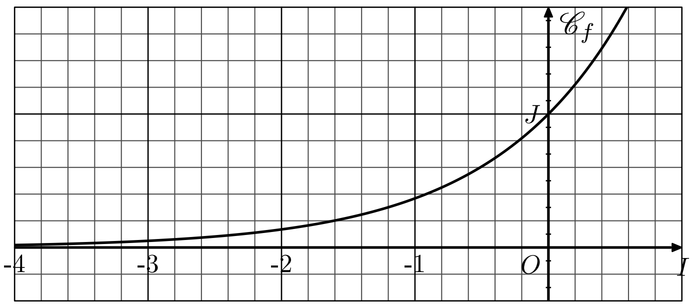
Remarque : les parties **A** et **B** représentent les deux premières étapes de construction de la courbe de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler.

Pour voir les étapes successives de cette construction et leurs "*convergences*" vers une unique courbe, vous pouvez regarder cette animation :

Exercice 6

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

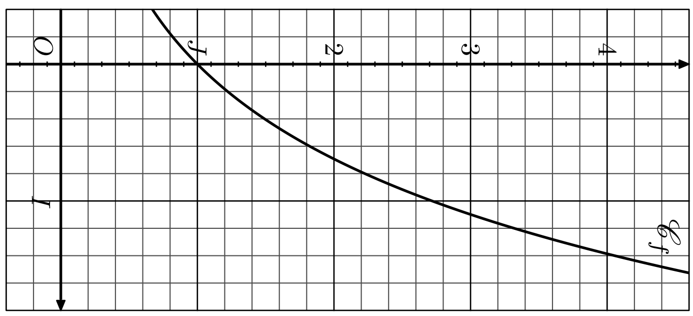
1. Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[-4\,;1]$:



   a. Tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. Comparer les nombres $f(0)$ et $f'(0)$

   b. Comparer les nombres $f(-1)$ et $f'(-1)$.

2. Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $\left[-\frac{2}{5}\,;\frac{9}{5}\right]$:



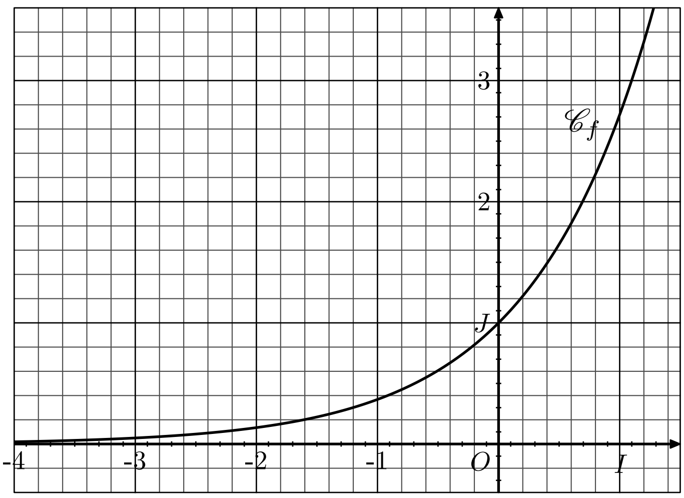
   a. Comparer les nombres $f(1)$ et $f'(1)$.

   b. Comparer les nombres $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. Introduction C :

Exercice 7

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé ci-dessous :



On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie les trois propriétés ci-dessous :

$$f(0)=1 \quad ; \quad \begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

Conjecture :

1. On considère le point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1.
   a. Placer le point A et tracer la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
   b. Donner l'abscisse du point B d'intersection de la tangente (T) avec l'axe des abscisses.
2. Répéter la question 1. avec le point B d'abscisse -1.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant à l'abscisse du point de contact d'une tangente à la courbe et l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses?
4. Vérifier votre conjecture avec un troisième point de la courbe $\mathscr{C}_f$ choisi au hasard.

Preuve :

Soit a un nombre réel quelconque.

5. Etablir que la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a admet pour équation réduite :
   (T) : $y = f(a)\cdot\big(x-a+1\big)$
6. Etablir la conjecture faite à la question 3..

Prolongement :

7. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, vérifier si les courbes représentatives des fonctions carré, inverse et racine carrée vérifient cette propriété.

Exercice 8

Le nombre d'atomes d'une source radioactive a tendance à diminuer dans le temps. On note $N(t)$ le nombre de noyau à l'instant t. En observant ce phénomène sur une variation du temps, noté $\Delta\,t$, le nombre d'atomes a aussi connu une variation, noté $\Delta\,N(t)$. On a établi la formule suivante :

$$\frac{\Delta\,N(t)}{N(t)} = -\lambda\cdot\Delta\,t$$

où λ est une constante dépendant uniquement de la nature de la source radioactive observée.

1. a. La durée de demi-vie du Radon-220 est de $56\,s$. Déterminer une valeur approchée de la constante λ dans le cas du Radon-220.
   b. On part d'un échantillon contenant $240\,g$ contenant environ $6{,}02\times10^{23}$ noyaux de radon.
   Déterminer le temps à attendre pour que la quantité observée pèse :
   $120\,g \quad ; \quad 60\,g$
2. a. Etablir l'égalité suivante : $\dfrac{\Delta\,N(t)}{\Delta\,t} = -\lambda\cdot N(t)$
   b. Que représente la quantité $\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t}$ pour la fonction N?
   En supposant que la fonction N est dérivable en fonction du temps t, en déduire la relation :
   $N'(t) = -\lambda\cdot N(t)$

4. Fonctions exponentielles :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 9

Objectif : le but de cet exercice est d'établir une propriété algébrique de la fonction exponentielle.

Propriétés utilisées :
- La fonction exponentielle est la seule fonction vérifiant : $f' = f' \quad ; \quad f(0)=1$
- La dérivée de la fonction produit $(u\cdot v)$ a pour expression : $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$
- Pour $a,b\in\mathbb{R}$, on a : $\big[\exp(a\cdot x+b)\big]' = a\cdot\exp\big(a\cdot x+b\big)$

1. Pour cela, on considère la fonction g dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \exp\big(x\big)\cdot\exp\big(-x\big)$
   a. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $g'(x)=0$
   b. Justifier que, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $g(x)=1$
2. a. Déduire de la propriété précédente que la fonction exponentielle ne s'annule jamais.C'est-à-dire que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\exp(x)\neq 0$
   b. Nous allons établir que : $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Exercice 10

Objectif : le but de cet exercice est d'établir une propriété algébrique de la fonction exponentielle.

Propriété utilisées :
- La fonction exponentielle est la seule fonction vérifiant : $f' = f \quad ; \quad f(0)=1$
- pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
- La dérivée de la fonction produit $(u\cdot v)$ a pour expression : $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$
- Pour $a,b\in\mathbb{R}$, on a : $\big[\exp(a\cdot x+b)\big]' = a\cdot\exp\big(a\cdot x+b\big)$

1. Le but de cette question est de montrer que pour tous nombres réels x et y, on a :
$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Pour cela, on considère la fonction f définie par :
$f(x) = \exp(x+a) \cdot \exp(-x)$ où $a \in \mathbb{R}$

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 0$

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \exp(a)$

c. En déduire que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :
$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

2. En déduire que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a : $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

5. Avec la calculatrice :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 11

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :
$f(x) = 2^x - x^2$; $g(x) = -x + 2$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g.

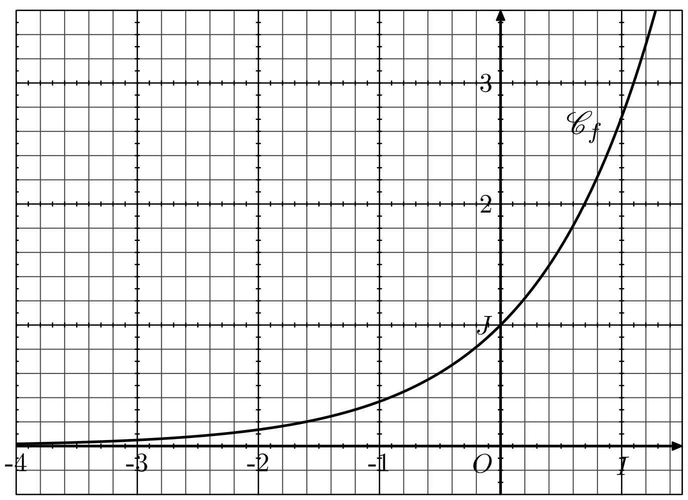
A l'aide de la calculatrice, déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

6. Introduction aux propriétés algébriques :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 12

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f exponentielle :



Conjecture :

1. Avec la précision possible par lecture graphique, compléter le tableau de valeurs de la fonction f :

x	$-1{,}4$	-1	$-0{,}4$	0	$0{,}6$	1
$\exp(x)$						

2. A l'aide des résultats précédents, donner des approximations des produits suivants :
   - $\exp(-1) \times \exp(-0{,}4)$
   - $\exp(-1) \times \exp(0{,}6)$
   - $\exp(0) \times \exp(1)$
   - $\exp(-0{,}4) \times \exp(1)$

3. Quelle conjecture peut-on établir sur le produit $\exp(a) \cdot \exp(b)$ pour tout réel a et b ?

Vers la preuve :

Nous admettons que la fonction exponentielle est non-nulle sur $\mathbb{R}$ et nous n'allons établir qu'un cas particulier de la preuve :

> Pour tout nombre réel x, on a :
> $\exp(1+x) = \exp(1) \cdot \exp(x)$ $(*)$

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = \dfrac{\exp(x+1)}{\exp(x)}$

4. Déterminer l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g.

5. En déduire que la forme simplifiée de la fonction g et établir la propriété $(*)$.

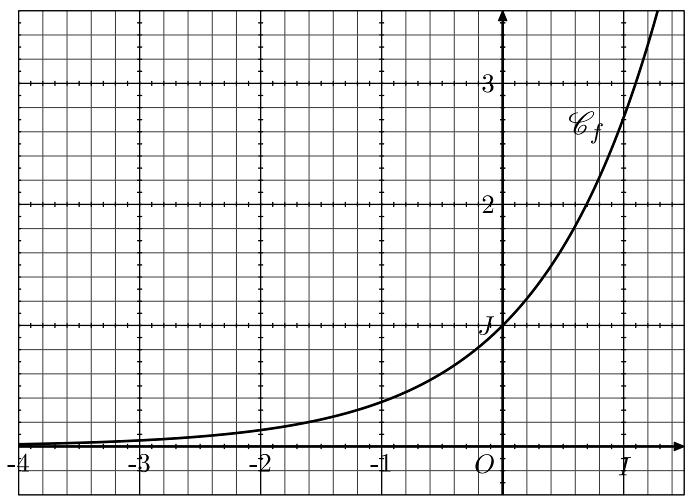
Prolongement :

6. Etablir la propriété ci-dessous pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$\exp(2+x) = \exp(2) \times \exp(x)$

7. Quelle simplification de l'expression $\exp(n) \times \exp(x)$ peut-on conjecturer, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x.

Exercice 13

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f exponentielle :



Conjecture :

1. Avec la précision possible par lecture graphique, compléter le tableau de valeurs de la fonction f :

x	$-1{,}9$	$-1{,}2$	$-0{,}8$	$-0{,}1$	$0{,}4$	$0{,}7$	$1{,}1$
$\exp(x)$							

2. A l'aide des résultats précédents, donner les valeurs des produits suivants :
   - $\exp(-1{,}9)\times\exp(1{,}1)$
   - $\exp(-1{,}2)\times\exp(0{,}4)$
   - $\exp(-0{,}8)\times\exp(0{,}7)$
   - $\exp(0{,}4)\times\exp(0{,}7)$

3. Quelle conjecture peut-on établir sur le produit $\exp(x)\cdot\exp(y)$ pour tout réel x et y ?

Preuve :

On admet que la fonction exponentielle ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. Pour un nombre réel a quelconque, on considère la fonction g_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_a(x) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(x)} \qquad (*)$$

4. Déterminer l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g.

5. Etablir que pour tout réel x, on a $g_a(x) = \exp(a)$, puis établir l'identité suivante pour tous réels x et y :
$$\exp(x)\times\exp(y) = \exp(x+y)$$

Prolongement :

6. Etablir la propriété ci-dessous pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$\exp(3\cdot x) = \left[\exp(x)\right]^3$$

7. Etablir la propriété ci-dessous pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$$

7. Propriétés algébriques :

(+5 exercices pour les enseignants)

Exercice 14

Proposition : pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a :
- $\exp(x+y) = \exp(x)\times\exp(y)$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(n\cdot x) = \left[\exp(x)\right]^n$

a. $\exp(3)\cdot\exp(5)$ b. $\exp(-2)\cdot\exp(4)$

c. $\dfrac{1}{\exp(-5)}$ d. $\left[\exp(5)\right]^3$

Exercice 15

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\left(e^3\right)^{-2}\cdot e^5$ b. $\dfrac{e^6-e^3}{e\cdot e^2}$

Exercice 16

Simplifier les écritures suivantes :

a. $\exp(2x+4)\times\exp(3-x)$ b. $\dfrac{\exp(x)^2}{\exp(3-2x)}$

Exercice 17

Simplifier les écritures suivantes :

a. $e^{3x+1}\cdot e^{2-2x}$ b. $\dfrac{e^{x-2}}{e^{3-x}}$ c. $e^{-x}-\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$

Exercice 18

Simplifier les expressions suivantes :

a. $3\cdot\left(e^{5x}\right)^4-\left(2\cdot e^{10x}\right)^2$ b. $e^{9x}-2\cdot\left(e^{3x}\right)^3$

Exercice 19

Etablir les égalités suivantes :

a. $\dfrac{2+3\cdot e^x+e^{2x}}{e^{2x}} = 2\cdot e^{-2x}+3\cdot e^{-x}+1$

b. $\dfrac{1-e^x}{e^{2x}} = e^{-2x}-e^{-x}$

Exercice 20

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\left(e^5-e^4\right)^2-\left(e^5+e^4\right)^2$ b. $\left(e^2+e^{-2}\right)\cdot\left(e^2-e^{-2}\right)$

Exercice 21

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\left(e^{3x}\right)^2-e^{2x}\cdot\left(e^{2x}+e^{-2}\right)^2$

b. $\left(e^{3x}\right)^2+\left(e^{-3x}\right)^2-\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)^2$

Exercice 22

Etablir les égalités suivantes :

a. $\dfrac{e^{3x}+2}{e^{3x}-1} = \dfrac{1+2\cdot e^{-3x}}{1-e^{-3x}}$ b. $\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{e^{3x}+e^{2x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{\left(e^x+1\right)^2}$

8. Equations :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 23

Proposition : pour tous nombres réels a et b
$$a=b \iff e^a=e^b$$

Résoudre les équations suivantes :

a. $e^{5x+1} = e^{2x}$ b. $e^{3x+1} = 1$ c. $\dfrac{e^{1-3x}}{e} = 1$

Exercice 24

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a. $\exp(x)=\mathrm{e}$ b. $\exp(-x)=1$

c. $\exp(2x-1)=\mathrm{e}$ d. $\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}=0$

Exercice 25

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a. $\mathrm{e}^{x^2+x}=1$. $\mathrm{e}^{x^2+5}=\left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2$

9. Inéquations :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 26

Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a. $\exp(x)<e$ b. $\exp(-x)\geqslant 1$

Exercice 27

Proposition : Pour tout nombre réels a et b :

- $\mathrm{e}^a>\mathrm{e}^b \iff a>b$
- $\mathrm{e}^a<\mathrm{e}^b \iff a<b$

Remarque : cette propriété vient de la stricte croissante de la fonction f.

Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a. $\mathrm{e}^{2x-4}\geqslant 1$ b. $\mathrm{e}^{2x-1}<\mathrm{e}^{x}$

Exercice 28

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}>0$ b. $x\cdot\mathrm{e}^{-x}-3\cdot\mathrm{e}^{-x}<0$

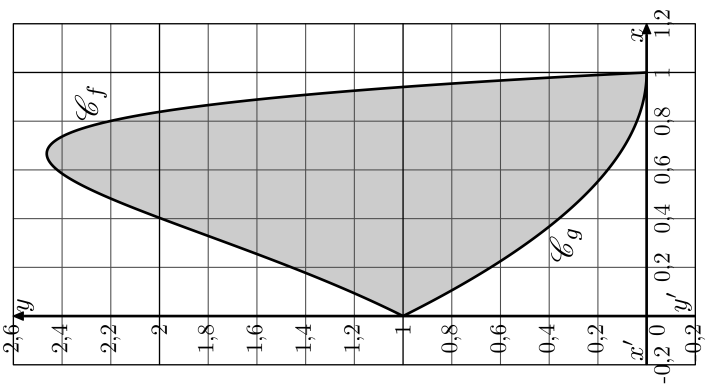
10. Position relative des courbes :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 29

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies pour tout réel x de $[0;1]$ par :

$f(x)=(1-x)\cdot\mathrm{e}^{3x}$; $g(x)=x^2-2\cdot x+1$



1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives $(1;0)$ et $(0;1)$ sont des points communs aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. On admet que :pour tout x dans $[0;1]$:
$f(x)-g(x)=(1-x)\left(\mathrm{e}^{3x}-1+x\right)$

a. Justifier que pour tout x dans $[0;\ 1]$:
$\mathrm{e}^{3\cdot x}-1\geqslant 0$

b. En déduire que pour tout x dans $[0;1]$:
$\mathrm{e}^{3\cdot x}-1+x\geqslant 0$

c. Etudier le signe de $f(x)-g(x)$ pour tout x dans $[0;1]$.

Exercice 30

1. Résoudre le système suivant, où u et v sont des nombres réels :

$$\begin{cases} u+\dfrac{1}{2}\cdot v=0 \\ u-\dfrac{1}{4}\cdot v=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=a\cdot\mathrm{e}^x+\frac{b}{\mathrm{e}^x+1} \quad (a \text{ et } b \text{ réels})$$

Trouver les valeurs des réels a et b, sachant que la courbe représentative de la fonction f dans une repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ passe par O et que la tangente à la courbe en ce point est parallèle à la droite (Δ) déquation $y=\dfrac{3}{2}x-2$.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1}$

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $g(x)=0$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $g(x)\geqslant 1$

11. Dérivées :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 31

Proposition : soit a et b deux nombres réels et la fontion f définie par : $f(x)=\mathrm{e}^{ax+b}$
La fonction f', dérivée de f, admet pour expression :
$f'(x)=a\cdot\mathrm{e}^{ax+b}$

Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

a. $f(x)=\mathrm{e}^{x}$ b. $f(x)=\mathrm{e}^{2\cdot x}$ c. $f(x)=\mathrm{e}^{3-x}$

Exercice 32

On considère la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif par : $f(t)=a\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+b$ où $a,b\in\mathbb{R}$

On admet que $f(0)=1\,000$ et que f vérifie la relation :

$$f'(t)+\frac{1}{5}\cdot f(t)=4 \quad \text{pour tout } t\in\mathbb{R}$$

Déterminer les valeurs de a et de b, et donner l'expression de la fonction f

12. Dérivées et étude de fonctions :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 33

On considère la fonction f définie par : $f(x)=3\cdot\mathrm{e}^{1-2x}$

1. Déterminer l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f. Puis, en déduire le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire le sens de variations de la fontion f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34

Pour chacune des deux fonctions ci-dessous définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de leur fonction dérivée ainsi que leur sens de variation sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x)=3\cdot\mathrm{e}^{5x+1}$ 2. $g(x)=2-3\cdot\mathrm{e}^{-x}$

Exercice 35

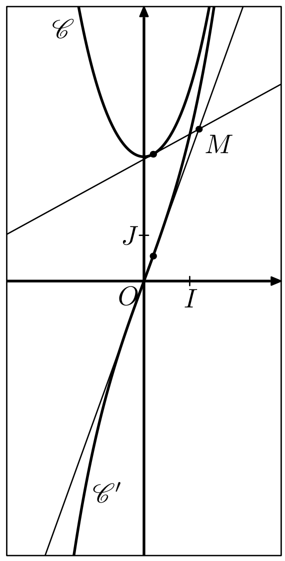
Pour chacune des fonctions ci-dessous définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de leur fonction dérivée, puis étudier leur sens de variations sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x)=x-\mathrm{e}^{x}$ 2. $g(x)=6x+3\cdot\mathrm{e}^{-2x}$
3. $h(x)=\mathrm{e}^{4x-4}-4\cdot\mathrm{e}\cdot x$

Exercice 36

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

- $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{1+x}+\mathrm{e}^{1-x}}{2}$
- $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{1+x}-\mathrm{e}^{1-x}}{2}$



Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on donne les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ respectivement représentative des fonctions f et g :

Partie A : étude de la position relative des deux courbes

1. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ se situe toujours au dessus de la courbe $\mathscr{C}'$.

Partie B : étude d'un lieu géométrique

Soit a un nombre réel quelconque. On considère :

- la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a ;
- la tangente (T') à la courbe $\mathscr{C}'$ au point d'abscisse a ;

On admet que les droites (T) et (T') ne sont jamais parallèles. On note M leur point d'intersections.

2. a. Donner l'expression de l'équation réduite de la tangente (T) en fonction de a.
   b. Donner l'expression de l'équation réduite de la tangente (T') en fonction de a.
3. Déterminer l'abscisse du point du point M.
4. a. Déterminer les coordonnées du M.
   b. Justifier que le point M appartient à la courbe d'une des fonctions de références qu'on précisera.

13. Dérivées d'un produit :

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 37

Proposition : soit f une fonction définie sur un intervalle I par le produit : $f(x)=u(x)\times v(x)$
où les fonctions u et v sont définies et dérivables sur I.

Alors la fonction f est dérivable sur I et sa fonction dérivée est définie par : $f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

a. $f(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^x$ b. $f(x) = \big(1-2{\cdot}x\big){\cdot}\mathrm{e}^x$

Exercice 38

Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

a. $f(x) = \big(3-x\big){\cdot}\mathrm{e}^x$ b. $g(x) = \big(x+1\big)\mathrm{e}^x$

Exercice 39

On considère la fonction f définie par :
$f(x) = (2{\cdot}x-1){\cdot}\mathrm{e}^x$

Donner l'ensemble de définition de la fonction f et l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

Indication : on donnera l'expression de f' sous forme factorisée.

Exercice 40

Déterminer l'expression des fonctions dérivées suivantes :

1. $h(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{x+1}$ 2. $j(x) = \big(x^2+1\big){\cdot}\mathrm{e}^{3x+1}$

14. Dérivées d'un produit et étude de fonctions :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 41

On admet que la fonction f est définie, pour tout réel x de l'intervalle $\big[-2\,;4\big]$ par : $f(x) = \big(x+2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}$

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $\big[-2\,;4\big]$, on a :
$f'(x) = -\big(x+1\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}$

2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $\big[-2\,;4\big]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Exercice 42

On admet que la fonction f est définie par :
$f(x) = \big(x^2-2{\cdot}x+1\big){\cdot}\mathrm{e}^{-2{\cdot}x+6}$

1. Monter que $f'(x) = \big(-2{\cdot}x^2+6{\cdot}x-4\big){\cdot}\mathrm{e}^{-2{\cdot}x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\big[0{,}7\,;6\big]$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\big[0{,}7\,;6\big]$.
On ne demande pas de calculer les ordonnées.

Exercice 43

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \big(-6{\cdot}x^2+5{\cdot}x\big){\cdot}\mathrm{e}^x$

1. Etablir que la fonction f', dérivée de la fonction f, a pour expression : $f'(x) = \big(-6{\cdot}x^2-7{\cdot}x+5\big){\cdot}\mathrm{e}^x$

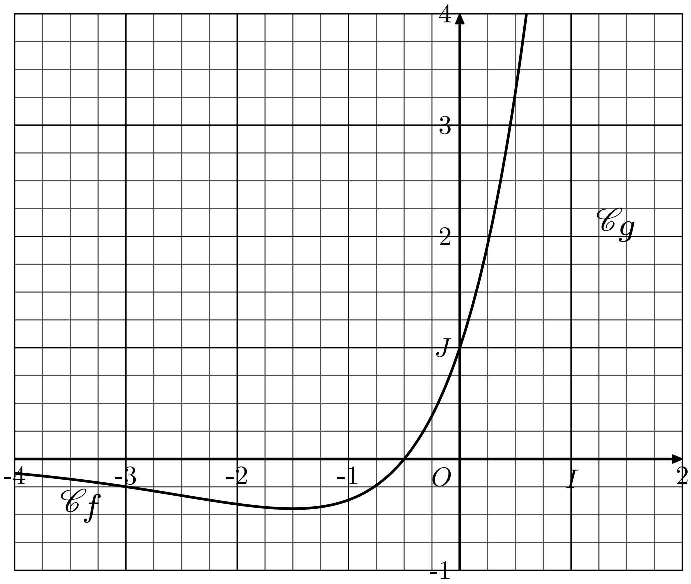
2. Etablir le tableau de signe de la fonction f'.

3. Donner les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Indications : les valeurs des images et limites aux bornes ne sont pas demandées.

Exercice 44

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1){\cdot}\mathrm{e}^x$.
Sur le graphique ci-dessous est tracée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



1. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

2. Montrer que, pour tout x réel, que : $f'(x) = \big(2x+3\big)\mathrm{e}^x$

3. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis préciser les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. On considère la droite (T) tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 :

   a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T).

   b. Tracer dans le repère ci-dessous la tangente (T).

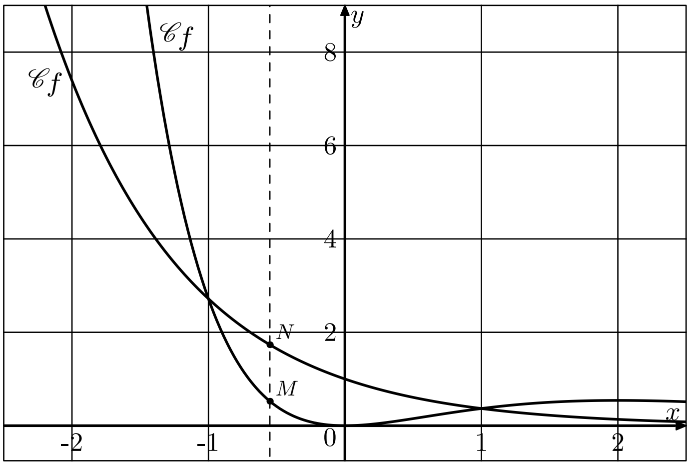
   c. Justifier graphiquement que, pour tout réel x, on a :
   $\big(2x+1\big)\mathrm{e}^x \geqslant 3x+1$

5. On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g définie par : $g(x) = \big(2x+1\big)\mathrm{e}^{1-x}$

   Etudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 45

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2{\cdot}\mathrm{e}^{-x}$; $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$



1. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

b. Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\,;1]$, on considère les points M de coordonnées $(x\,;f(x))$ et N de coordonnées $(x\,;g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN.
On admet que : $d(x)=\mathrm{e}^{-x}-x^2\cdot\mathrm{e}^{-x}$.
On admet que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1\,;1]$ et on note d' sa fonction dérivée.

a. Montrer que : $d'(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(x^2-2x-1\big)$

b. En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

c. Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d(x_0)$ maximale, et donner une valeur approchée à 0,1 près de la distance M_0N_0.

15. *Dérivées d'un quotient :*

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 46

Proposition : soit f une fonction définie sur un intervalle I par le produit : $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$
où les fonctions u et v sont définies et dérivables sur I.

Alors la fonction f est dérivable sur I et sa fonction dérivée est définie par : $f'(x)=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^x}$
2. $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{2\cdot x+1}$

Exercice 47

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

1. $h(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^x}$
2. $j(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$

16. *Dérivées d'un quotient et étude de fonctions :*

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 48

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

1. Montrer que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :
$$f'(x)=\frac{(x-1)\cdot\mathrm{e}^x}{x^2}$$

2. a. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Indication : on admet les deux limites :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} f(x)=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$$

Exercice 49

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x+2-\frac{4\cdot\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\big(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\big)$ d'unité graphique 2 *cm*.

1. a. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :
$$f'(x)=\left(\frac{\mathrm{e}^x-3}{\mathrm{e}^x+3}\right)^2$$

b. Déterminer les sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

17. *Vers les équations différentielles :*

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 50

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = e^{2x+3}$

1. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a la relation :
$2{\cdot}f(x) - f'(x) = 0$

2. a. Parmi les expressions suivantes d'une fonction g, laquelle vérifie la relation $(*)$:
   - $g(x) = e^{2x+3} + 4$
   - $g(x) = e^{8x+12}$
   - $g(x) = 4{\cdot}e^{2x+3}$
   - $g(x) = e^{-2x-3}$

   b. Donner l'expression d'une troisième fonction h vérifiant la relation $(*)$.

Exercice 51

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x{\cdot}e^x$

1. a. Montrer que la fonction f', dérivée de la fonction f, par : $f'(x) = (x+1){\cdot}e^x$

   b. Déterminer l'expression de la fonction f'', dérivée de la fonction f'.

2. On considère la fonction g définie par :
$g = f'' - 2{\cdot}f' + f$
Justifier que la fonction g est la fonction nulle.

18. Variations et différentiations :

(+2 exercices pour les enseignants)

Remarque : Quatre exercices apparemment identiques mais avec des difficultés de résolutions différents

Exercice 52

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2. Etablir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;10]$.

Exercice 53

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$$

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2. Etablir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;10]$.

19. Fonctions exponentielles et suites :

Exercice 54

Soit a un nombre réel quelconque. On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = a \quad ; \quad u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire :
$u_{n+1} = e^{u_n}{\cdot}(e^{u_n} - 1)$.

On considère la fonction g définie pour tout réel x par :
$g(x) = e^{2x} - e^x - x$

1. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x :
$g'(x) = (e^x - 1)(2{\cdot}e^x + 1)$

2. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

3. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

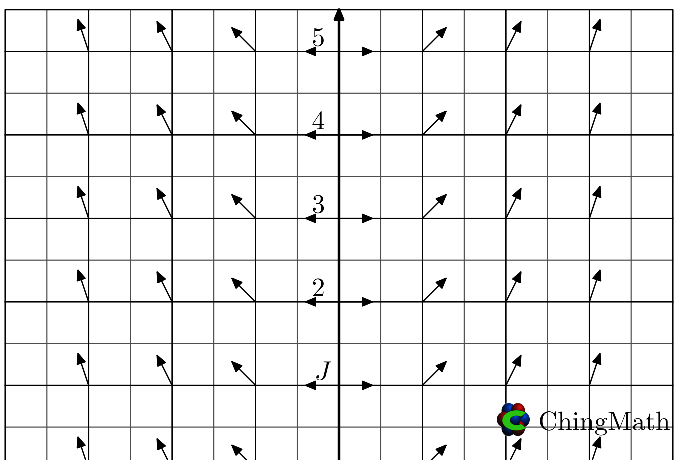
21. Exercices non-classés :

Exercice 55

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :
$f'(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

1. Donner au moins deux fonctions qui vérifie cette relation.

2. On propose le champs de tangentes représenté ci-dessous :



a. Vérifier que chaque tangente représentée sur la droite d'équation $x=2$ a pour coefficient directeur 2.

b. Vérifier que pour chaque tangente ayant pour origine le point de coordonnée $(x\,;y)$, son coefficient directeur est x.

3. On considère maintenant la fonction f qui vérifie les deux conditions suivantes :

$$f(0)=\frac{3}{2} \quad ; \quad f'(x)=x \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}$$

Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.