Première spécialité/Second degré: fonctions, variations, inéquations

ChingEval : 8 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. Rappels :

Exercice 1

Compléter les tableaux de signe ci-dessous :

1.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$1-x$	
$2x+1$	
$(1-x)(2x+1)$	

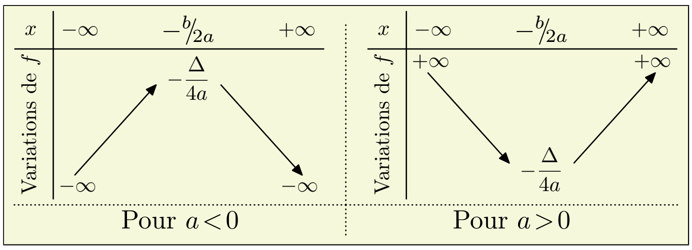
2.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$x-3$	
$-2x+4$	
$(x-3)(-2x+4)$	

2. Tableau de variations :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 2



Dresser le tableau de variations des fonctions polynômiales du second degré ci-dessous :

a. $f(x) = 3{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 2$ b. $g(x) = -x^2 - 2{\cdot}x + 3$

Exercice 3

Pour chacune des fonctions, dresser le tableau de variations et donner les caractéristiques de leur extréma :

1. $f(x) = -3x^2 + 9x - 2$ 2. $g(x) = 3x^2 + 2x + 2$

Exercice 4

Pour chacune des fonctions, dresser le tableau de variations et donner les caractéristiques de leur extréma :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{6}{\cdot}x^2 + \dfrac{1}{4}x + 1$ 2. $g : x \longmapsto -x^2 + 2\sqrt{3}x - 1$

3. Tableau de variations et racines :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5

Soit h la fonction définie par la relation :
$h(x) = 4x^2 + 2x + 1$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction h.
2. Justifier que la fonction h ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par la relation :
$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Justifier que la fonction f s'annule en deux valeurs.

Exercice 7

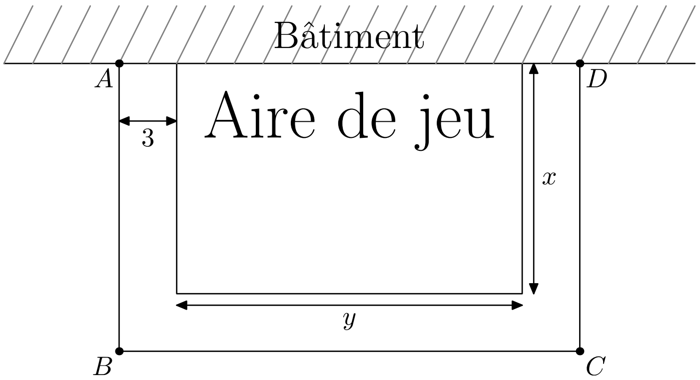
Soit g la fonction définie par la relation :
$g(x) = -4x^2 + 4x - 1$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
2. Justifier que la fonction g s'annule en une unique valeur qu'on précisera.

4. Problèmes et extrémums : *(+2 exercices pour les enseignants)*

Exercice 8

On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire. De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à $10\,m$. Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allé de $3\,m$ de large comme l'indique le croquis ci-dessous.



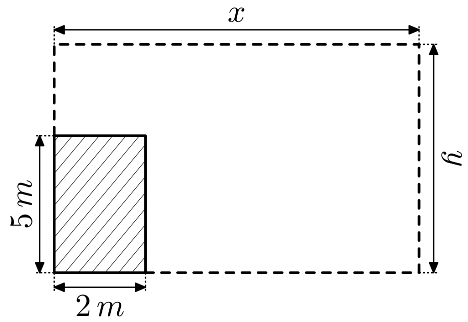
L'ensemble est clôturé sur les trois côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.
On s'intéresse à la longueur $\mathscr{L}$ de la clôture :
$\mathscr{L} = AB + BC + CD$.
On note x et y les dimensions en mètres de l'aire de jeu *(la valeur de x et de y sont nécessairement positifs)*.

On dispose de 100 mètres de clôture qu'on souhaite entièrement utilisé :

1. a. Exprimer, dans ces conditions, la valeur de y en fonction de x.
   b. Justifier que la valeur de x doit être inférieure à 44.
2. Déterminer les dimensions afin que les 100 mètres de clôtures soient utilisés et que l'aire de jeu soit maximale.

Exercice 9

Dans son champ, un agriculteur possède un poulailler de forme rectangulaire et de dimensions $5\,m$ et $2\,m$. Il souhaite construire un enclos comme l'indique la figure ci-dessous avec $17\,m$ de clôture :



Les nombres x et y représentent les dimensions de ce champs.

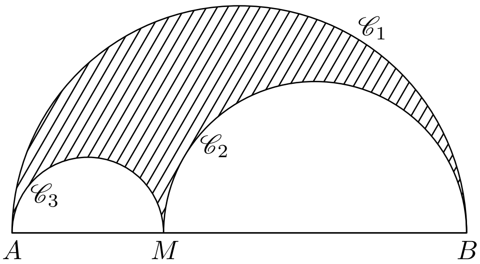
Le poulailler est représenté par la partie hachurée, la clôture est représentée en pointillés et la partie extérieure dédiée aux poules est représentée par la partie blanche.

On note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie extérieure.

1. Etablir la relation suivante entre x et y :
   $x + y = 12$
2. Démontrer que l'aire de l'espace extérieur a pour expression : $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 12 \cdot x - 10$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les valeurs de x et de y pour que l'aire de l'espace extérieur réservé aux poules soient maximale.

Exercice 10

La figure ci-dessous est composé du segment $[AB]$ mesurant $6\,cm$ et d'un point M appartement au segment $[AB]$.
Le demi-cercle $\mathscr{C}_1$ *(resp.* $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$*)* admet le segment $[AB]$ *(resp.* $[MB]$, $[AM]$*)* pour diamètre.



On note x la longueur du segment $[AM]$. Déterminer pour quelle*(s)* valeur*(s)* de x l'aire du domaine hachurée est maximale.

5. Forme canonique et factorisation : *(+1 exercice pour les enseignants)*

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = 2 \cdot x^2 - 16 \cdot x + 30$

1. Etablir que la fonction f admet pour forme canonique :
   $f(x) = 2 \cdot \left[(x-4)^2 - 1\right]$
2. En déduire factoriser l'expression de la fonction f sous la forme de deux facteurs de degré 1.

   Indication : la fonction f admet une factorisaiton de la forme : $f(x) = 2 \cdot (a \cdot x + b)(c \cdot x + d)$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
3. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$f(x) = 6x^2 - 9x - 6$

1. Montrer que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = 6\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right]$$

2. En remarquant que $\dfrac{25}{16} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^2$, factoriser l'expression de

la fonction f sous la forme de deux facteurs de degré 1.

3. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

6. Introduction : racines, factorisation et signes :

Exercice 13

On considère le polynôme : $P = 3\cdot x^2 + 3\cdot x - 18$

1. Déterminer les racines du polynôme P.

On note x_1 et x_2 les deux racines du polynôme P.

2. a. Développer l'expression $(x-x_1)(x-x_2)$.
   b. En déduire une factorisation du polynôme P.
   c. Dresser le tableau de signe de l'expression P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

On considère le polynôme : $P = -9\cdot x^2 + 6\cdot x + 15$

1. Déterminer les racines du polynôme P.

On note x_1 et x_2 les deux racines du polynôme P.

2. a. Développer l'expression $(x-x_1)(x-x_2)$.
   b. En déduire une factorisation du polynôme P.
   c. Dresser le tableau de signe de l'expression P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15

On considère le polynôme : $P = -2\cdot x^2 - 8\cdot x + 16$

1. Déterminer les racines du polynôme P.

Indication : on donnera ces racines sous la forme "$a+b\cdot\sqrt{c}$" où $a,b,c \in \mathbb{Z}$

On note x_1 et x_2 les deux racines du polynôme P.

2. a. Développer l'expression $(x-x_1)(x-x_2)$.
   b. En déduire une factorisation du polynôme P.
   c. Dresser le tableau de signe de l'expression P sur $\mathbb{R}$.

7. Factorisations :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 16

Donner la forme factorisée des expressions suivantes :

a. $3\cdot x^2 - 3\cdot x - 6$ b. $2\cdot x^2 + 12\cdot x + 18$

Exercice 17

Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

a. $x^2 + 2x + 1$ b. $3x^2 - 4x + 2$ c. $-3x^2 + 4x - 1$

Indication : présenter les résultats sous la forme :
$(a\cdot x + b)(c\cdot x + d)$ ou $(a\cdot x + b)^2$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$

Exercice 18

Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

a. $8x^2 - 24x + 18$ b. $3x^2 + x + 1$ c. $-4x^2 + x + 3$

Indication : présenter les résultats sous la forme :
$(a\cdot x + b)(c\cdot x + d)$ ou $(a\cdot x + b)^2$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$

Exercice 19

1. Factoriser l'expression : $-2\cdot x^2 - 3\cdot x + 5$.
2. Pour chaque proposition, une seule réponse est correcte. Cochez la case correspondant.

Indication : on utilisera le résultat de la question 1.

a. La forme de factorisée de $-x^2 - \frac{3}{2}\cdot x + \frac{5}{2}$ est :

☐ $(x+5)(1-x)$ ☐ $\left(x+\frac{5}{2}\right)(1-x)$

☐ $(x+5)\left(1-\frac{1}{2}\cdot x\right)$ ☐ $\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)$

b. La forme de factorisée de $-2\cdot x^2 - 3\cdot x + 5 + (1-x)$ est :

☐ $(2\cdot x+5)(1-x)$ ☐ $(2\cdot x+5)\cdot x$

☐ $(2\cdot x+6)(1-x)$ ☐ $(2\cdot x+6)(2-x)$

c. La forme de factorisée de $-2\cdot(x+1)^2 - 3\cdot(x+1) + 5$ est :

☐ $(2\cdot x+6)(1-x)$ ☐ $(2\cdot x+6)(2-x)$

☐ $-(2\cdot x+7)\cdot x$ ☐ $(2\cdot x+7)(2-x)$

8. Factorisations (degré 3) :

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = x^3 - 7\cdot x - 6$

1. Vérifier que le nombre 3 est un zéro de la fonction f.

Le polynôme $x^3-7{\cdot}x-6$ admet le nombre 3 pour racine. Il admet donc une factorisation de la forme :
$x^3-7{\cdot}x-6=(x-3)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$ où $a,b,c\in\mathbb{R}$

2. a. Pour a, b, c des nombres réels, vérifier l'identité suivante :
$(x-3)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c) = a{\cdot}x^3+(b-3a){\cdot}x^2+(c-3b){\cdot}x-3c$

b. Déterminer les valeurs de a et b vérifiant :
$a=1$; $b-3a=0$; $c-3b=-7$; $-3c=-6$

c. En déduire la forme factorisée de la fonction f en facteurs de degré 1.

Exercice 21

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression est : $f(x)=2{\cdot}x^3-7{\cdot}x^2+4{\cdot}x+3$

1. Déterminer les nombres réels a, b, c réalisant l'égalité :
$f(x) = (2{\cdot}x-3)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$

2. En déduire la forme factorisée de la fonction f en produit de facteurs de degré 1.

9. Tableau de signes :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 22

Etablir le tableau de signes des expressions suivantes :

a. $3x^2+4x-4$ b. $-4x^2+2x+6$ f. $2x^2+11x+5$

Exercice 23

Dresser le tableau de signes de chacune des expressions ci-dessous :

a. $2{\cdot}x^2+9{\cdot}x+10$ b. $12x^2-31x+20$ c. $-5x^2-3x-1$

10. Tableau de signes et inéquation :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 24

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^2-3x+2>0$ b. $x^2-x-2<0$ c. $-9x^2+12x-4\leqslant 0$

Exercice 25

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $5x^2+4x-1<0$ b. $-4x^2+2x+2\geqslant 0$ c. $-x^2+x-3>0$

Exercice 26

Résoudre les inéquations :

a. $6{\cdot}x^2+x-1\geqslant 0$ b. $3{\cdot}x^2+x+1<0$

Exercice 27

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $-10x^2-13x+3\geqslant 0$ b. $(3x+1)(x^2+x+1)<0$

11. Tableau de signe et inéquation (degré 3) :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 28

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = x^3-4{\cdot}x^2-4{\cdot}x+16$

1. Vérifier que le nombre 2 est un zéro de la fonction f.

Le polynôme $x^3-4{\cdot}x^2-4{\cdot}x+16$ admet le nombre 2 pour racine. Il admet donc une factorisation de la forme :
$x^3-4{\cdot}x^2-4{\cdot}x+16=(x-2)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$ où $a,b,c\in\mathbb{R}$

2. a. Pour a, b, c des nombres réels, vérifier l'identité suivante :
$(x-2)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c) = a{\cdot}x^3+(b-2a){\cdot}x^2+(c-2b){\cdot}x-2c$

b. Déterminer les valeurs de a et b vérifiant :
$a=1$; $b-2a=-4$; $c-2b=-4$; $-2c=16$
Proposer une forme factorisée de la fonction f.

c. Etablir le tableau de signes de la fonction f.

Exercice 29

On considère le polynome $\mathcal{P}$ admettant pour expression :
$\mathcal{P} = 2{\cdot}x^3+7{\cdot}x^2-7{\cdot}x-12$

1. Etablir la factorisation suivante où b est un nombre réel à déterminer :
$\mathcal{P} = (x+1){\cdot}(2{\cdot}x^2+b{\cdot}x-12)$

2. En déduire le tableau de signes du polynôme $\mathcal{P}$.

Exercice 30

On considère le polynôme du troisième degré :

$\mathcal{P} = 3x^3+5x^2-5x+1$

On sait que le polynôme P admet une factorisation de la forme :
$\mathcal{P} = (3x-1)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$

1. Déterminer les valeurs de a, b, c vérifiant cette factorisa-

tion.

2. En déduire l'ensemble des racines du polynôme $\mathcal{P}$.

3. Dresser le tableau de signes de $\mathcal{P}$.

12. *Positions relatives de courbes :*

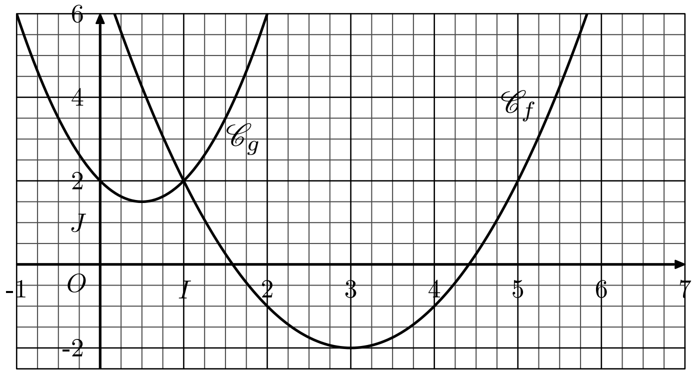
(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 31

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 - 6{\cdot}x + 7 \quad ; \quad g(x) = 2{\cdot}x^2 - 2{\cdot}x + 2$

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$, on donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g.

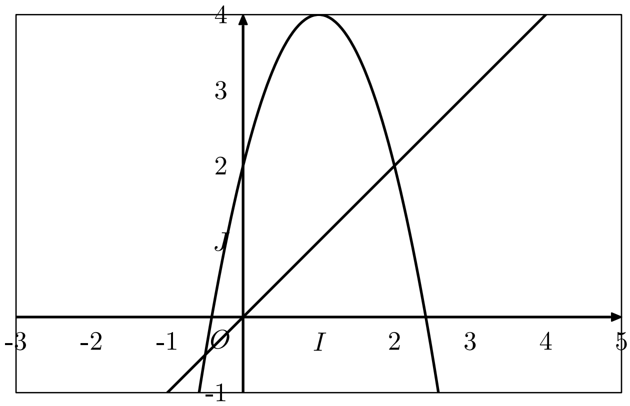


Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 32

On considère la fonction f dont l'image de tout nombre réel x est définie par la relation : $f(x) = -2x^2 + 4x + 2$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite (Δ) première bissectrice du plan admettant pour équation $y = x$.

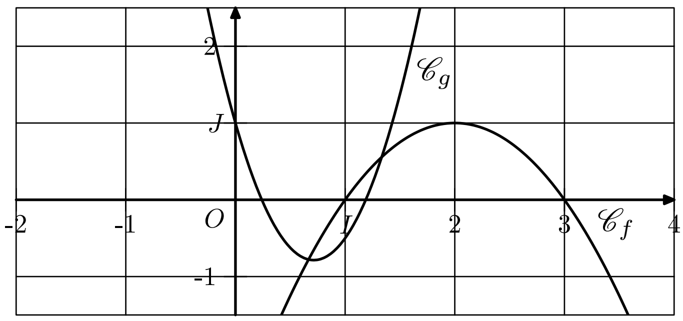


Algébriquement, étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (Δ).

Exercice 33

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = -x^2 + 4{\cdot}x - 3 \quad ; \quad g(x) = \frac{7}{2}{\cdot}x^2 - 5x + 1$$



Déterminer la position relative de ces deux courbes.

13. *Positions relatives de courbes (degré 3) :*

Exercice 34

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ par les relations :

$$f(x) = \frac{5}{4x^2 + 1} \quad ; \quad g(x) = -x + 2$$

Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g.

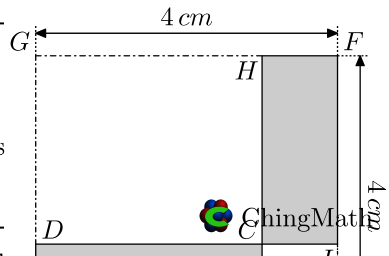
14. *Problèmes et inéquations :*

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 35

On considère la figure ci-dessous composée :

- du carré $AEFG$,
- de deux rectangles $ABCD$ et $CIFH$.



Les points B, D, I, H appartiennent aux côtés du

(les mesures sont exprimées en centimètre)

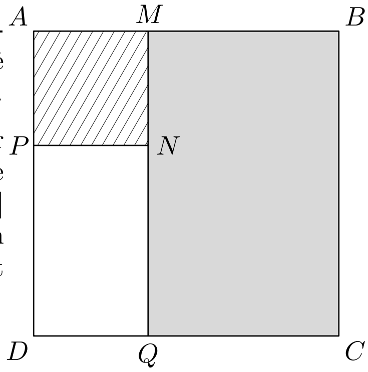
Déterminer l'ensemble des valeurs de x réalisant l'inéquation :

$\mathcal{A} \geqslant \dfrac{37}{4}$

Toute trace de recherche ou de prise d'initiative sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 36

On considère la figure ci-contre où $ABCD$ est un carré dont les côtés mesurent $5\,cm$.

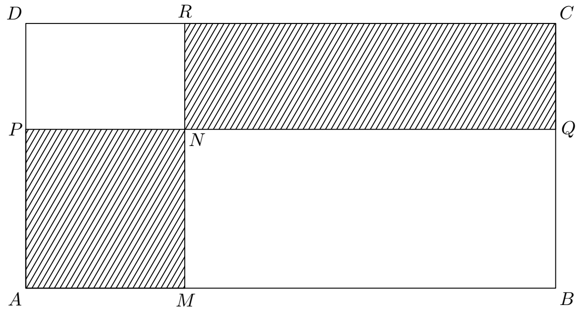


On considère un point M sur le segment $[AB]$ et on place le point P sur le segment $[AD]$ et les points N et Q afin que $AMNP$ soit un carré et $BCQM$ est un rectangle.

On note x la mesure du segment $[AM]$. Déterminer l'ensemble des valeurs de x afin que l'aire du carré $AMNP$ soit strictement supérieure à l'aire du rectangle $BCQM$.

Exercice 37

On considère la configuration ci-dessous où :



où :

- les quadrilatères $ABCD$ et $CRNQ$ sont des rectangles et $AMNP$ est un carré
- les points M, Q, R, P appartiennent respectivement aux segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$
- $AB = 10\,cm$ et $AD = 5\,cm$

On note x la longueur du segment $[AM]$ et on note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie non-hachurée de cette figure :

1. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ s'exprime en fonction de x par :
   $\mathcal{A} = -2{\cdot}x^2 + 15{\cdot}x$
2. a. Résoudre l'équation $\mathcal{A} = 27$

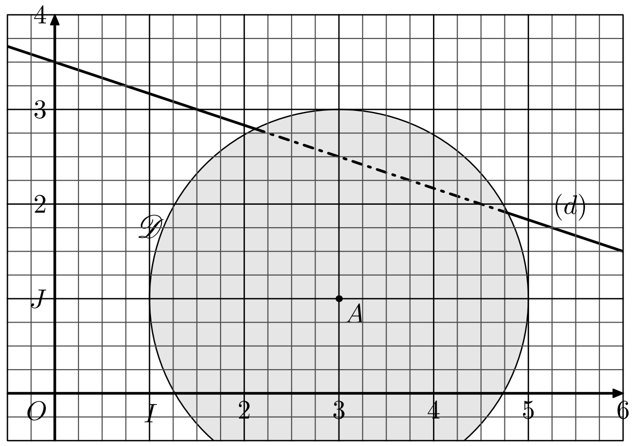
   b. Déterminer les positions du point M pour que la surface non-hachurée ait une aire supérieure ou égale à $27\,cm^2$
3. De même, on déterminera les positions du point M pour que la surface non-hachurée ait une aire supérieure our égale à $18\,cm^2$

15. Problèmes, inéquations et racines carrées :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 38

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère le disque $\mathscr{D}$ de centre $A(3\,;1)$ et de rayon 2 et la droite (d) passant par les points $B(0\,;3{,}5)$ et $C(1{,}5\,;3)$



Déterminer l'ensemble des abscisses des points de la droite (d) inclus dans le disque $\mathscr{D}$.

Indication : on s'intéressera à l'ensemble des points M de la droite (d) tels que $AM^2 \leqslant 4$

16. Fractions rationnelles et simplifications :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 39

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 6{\cdot}x - 7$

1. Déterminer la forme factorisée de la fonction f.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\,;7\}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 - 6 \cdot x - 7}{(x-3)(x-7)}.$$

a. Simplifier l'expression de la fonction g.

b. Dresser le tableau de signes de la fonction g.

Exercice 40

Simplifier la fraction rationnelle suivante : $\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$

Exercice 41

Simplifier l'expression des fractions rationnelles ci-dessous :

a. $\dfrac{3x-1}{3x^2+2x-1}$ b. $\dfrac{6x^2-5x+1}{1-4x^2}$

18. Tableau de variations et tableau de signes :

Exercice 42

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ définies par les relations :

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad ; \quad g(x) = -2x^2 - 3x + 5$$

1. Dresser le tableau de variations de chacune de ces fonctions.
2. Etablir le tableau de signes de chacune de ces fonctions.

Exercice 43

Déterminer le tableau de signes des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$:

a. $2x^2 - 3x - 2$ b. $(2x+1)(3x^2 - 2x - 1)$

19. Partage :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 44

On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - x - 10$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 1$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.
2. Donner les valeurs de x pour lesquelles le point $\mathcal{P}$ ayant pour abscisse x se trouve au dessus du point de $\mathcal{D}$ ayant même abscisse.

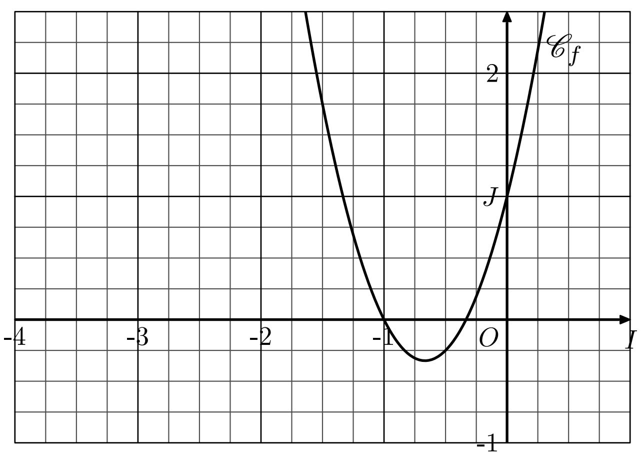
20. Exercices non-classés :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 45

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1$

Ci-dessous, est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



1. On considère la droite (d) passant par les points $A(-3\,;2)$ et $B(-2\,;1)$.
   a. Tracer la droite (d) dans le repère ci-dessous.
   b. Déterminer l'équation réduite de la droite (d).
2. Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (d).