Première STMG/Nombre dérivée et fonction du second degré

1. Rappels : fonctions affines :

(+2 exercices pour les enseignants)

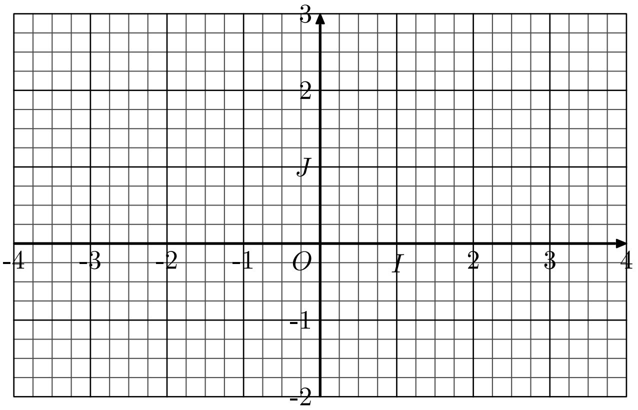
Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = 0{,}75x + 1{,}25$

1. Compléter le tableau de valeur ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$						

2. Représenter la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans le repère ci-dessous :



Exercice 2

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = 3{\cdot}x + 4{,}5$

    a. Résoudre l'équation : $f(x)=0$

    b. Compléter le tableau de signes de la fonction f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$g(x) = -2{\cdot}x + 0{,}5$

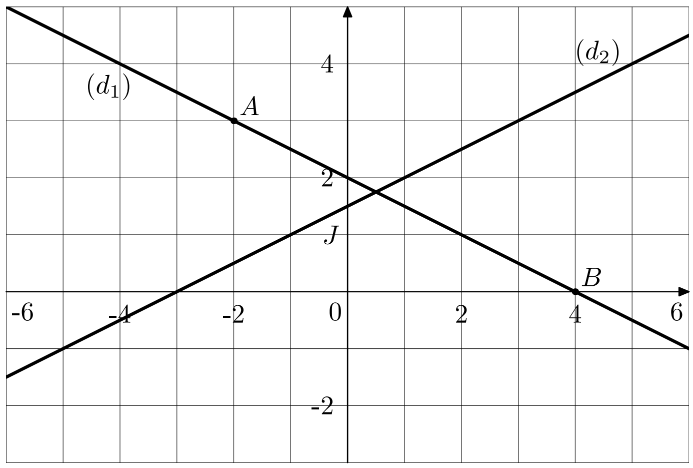
    a. Résoudre l'équation : $g(x)=0$

    b. Compléter le tableau de signes de la fonction g :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	

Exercice 3

Le graphique suivant présente trois droites représentées dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



On considère les deux points $A(-2\,;3)$ et $B(4\,;0)$ appartenant à la droite (d_1) :

1. a. Montrer que le coefficient directeur de la droite (d_1) a pour valeur $-\dfrac{1}{2}$.

    b. Déterminer l'équation réduire de la droite (d_1).

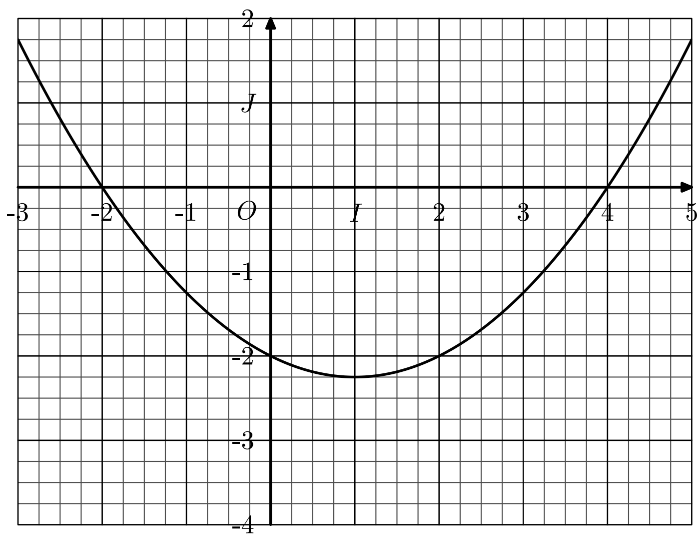
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (d_2).

Exercice 4

On considère la fonction f définie par la relation est :

$f(x) = 0{,}25{\cdot}x^2 - 0{,}5{\cdot}x - 2$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :



1. a. Effectuer le tracé de la droite (d) dont l'équation est :
$y = 0{,}5{\cdot}x - 3$

    b. Quelle particularité a la droite (d) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

2. (a.) Effectuer le tracé de la droite (Δ) dont l'équation est :

$y = -1{,}5{\cdot}x - 3$

(b.) Quelle particularité a la droite (Δ) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

Exercise 5

On considère l'expression algébrique suivante :

$$\frac{2x+7}{x+3} - \frac{4x+4}{2x+1}$$

1. Réduire l'expression précédente au même dénominateur.

2. Dresser le tableau de signes de cette expression.

3. En déduire les solutions de l'inéquation :
$$\frac{2x+7}{x+3} \leqslant \frac{4x+4}{2x+1}$$

2. Rappels : second degré :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 6

Les racines d'un polynôme sont les valeurs annulant ce polynôme.
Pour un polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré, le nombre de racines existantes dépend du discriminant :

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
Aucune solution	1 solution $-\dfrac{b}{2{\cdot}a}$	2 solutions $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$; $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$

Résoudre les équations suivantes :

a. $2{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x + 4 = 0$ **b.** $4{\cdot}x^2 - 9{\cdot}x + 5 = 0$

c. $x^2 + 4{\cdot}x + 5 = 0$ **d.** $3{\cdot}x^2 + 6{\cdot}x + 3 = 0$

e. $-x^2 + x - 1 = 0$ **f.** $-4{\cdot}x^2 - 9{\cdot}x - 5 = 0$

Exercice 7

Le tableau de signes d'un polynôme du second degré dépend du signe du coefficient du terme du second degré et du signe du discriminant.
Les six possibilités sont représentées ci-dessous :

	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$ (α et β sont les deux racines)
$a>0$	x : $-\infty$; $+\infty$ — Signe : $+$	x : $-\infty$; $-b/2a$; $+\infty$ — Signe : $+$ 0 $+$	x : $-\infty$; α ; β ; $+\infty$ — Signe : $+$ 0 $-$ 0 $+$
$a<0$	x : $-\infty$; $+\infty$ — Signe : $-$	x : $-\infty$; $-b/2a$; $+\infty$ — Signe : $-$ 0 $-$	x : $-\infty$; α ; β ; $+\infty$ — Signe : $-$ 0 $+$ 0 $-$

Dresser le tableau de signes de chacune des expressions suivantes :

a. $-x^2 + 4{\cdot}x + 5$ **b.** $x^2 - 4{\cdot}x + 5$

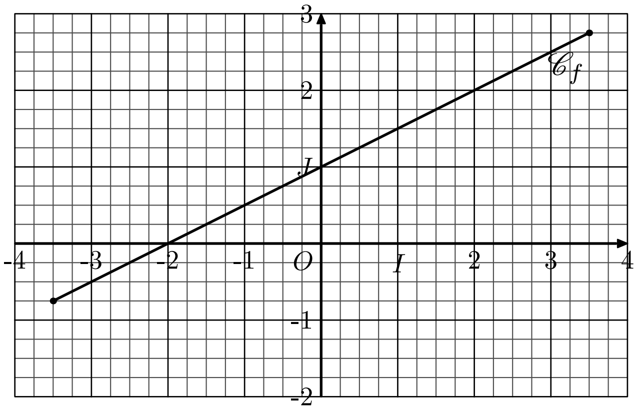
c. $x^2 + x - 6$ **d.** $-4{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x + 8$

e. $2{\cdot}x^2 + 12{\cdot}x + 18$ **f.** $-4{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x - 2$

3. Rappels : lecture graphique :

Exercice 8

On considère dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-3{,}5\,;3{,}5\right]$:



1. Par lecture graphique, compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-3	0	1	2	4
$f(x)$					

2. Résoudre graphique les équations suivantes :

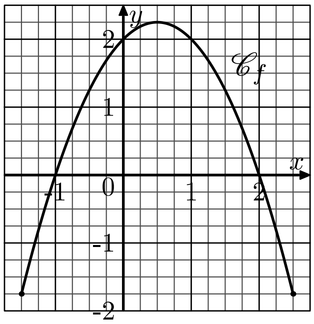
(a.) $f(x) = 0$ (b.) $f(x) = 2$

3. Graphiquement, résoudre les inéquations :

(a.) $f(x) \leqslant 0$ (b.) $f(x) \geqslant 2$

Exercice 9

On muni le plan d'un repère et on considère la fonction f définie sur l'intervalle $\big[-1{,}5\,;2{,}5\big]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-contre.



1. Compléter,graphiquement, le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-1	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
$f(x)$					

2. Graphiquement, résoudre les équations :

   a. $f(x)=0$ b. $f(x)=2$

3. Graphiquement résoudre les inéquations :

   a. $f(x)\geqslant 0$ b. $f(x)\leqslant 2$

4. Rappels : tableau de variations :

Exercice 10

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\big[-2\,;0\big]$ par l'expression :
   $f(x)=0{,}5{\cdot}x^2-x+2$

   Ci-dessous est donné le tableau de variations de la fonction f où certaines informations n'ont pas été donnés :

x	-2		0		3
Variation de f	$\dots$	↘	$\dots$	↗	$\dots$

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\big[-1\,;4\big]$ par l'expression :
   $g(x)=-x^2+2{\cdot}x-1$

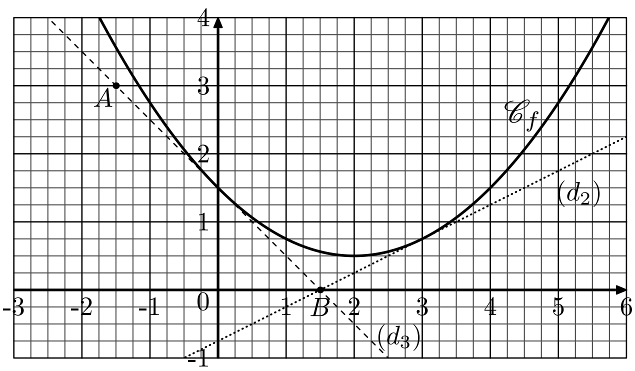
   Ci-dessous est donné le tableau de variations de la fonction g où certaines informations n'ont pas été donnés :

x	-1		1		4
Variation de g	$\dots$	↗	$\dots$	↘	$\dots$

5. Introduction :

Exercice 11

On considère la fonction f du second degré définie pour tout nombre réel x par la relation :
$f(x)=0{,}25{\cdot}x^2-x+1{,}5$



1. La droite (d_1) est une fonction affine ayant pour équation réduite :
   (d_1) : $y=a{\cdot}x+b$
   où a et b sont deux nombres dérivés.

   a. Donner les coordonnées des points A et B.

   b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (d_1).

   c. En déduire l'expression de l'équation réduite de la droite (d_1).

2. a. Choisir un point C de la droite (d_2) et donner ses coordonnées.

   b. Déterminer l'équation réduite de la droite (d_2).

6. Fonction dérivée :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 12

Soit f une fonction du second degré définie par l'expression :
$f(x)=a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$
où a, b et c sont trois nombres réels avec $a\neq 0$.

On appelle la **fonction dérivée de la fonction** f, la fonction f' définie par :

Recopier et compléter le tableau ci-dessous afin d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$f(x)=a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$	a	b	c	$f'(x)=2a{\cdot}x+b$
$-2{\cdot}x^2-x+1$				
$0{,}25{\cdot}x^2+x-1$				
x^2-x				
$-4{\cdot}x^2-2$				

Exercice 13

Donner l'expression des fonctions f' des fonctions f du second degré définies ci-dessous :

a. $f(x)=2{\cdot}x^2+x-1$ b. $f(x)=4{\cdot}x^2+8{\cdot}x+4$

c. $f(x)=x^2-3{\cdot}x+3$ d. $f(x)=-2{\cdot}x^2+2$

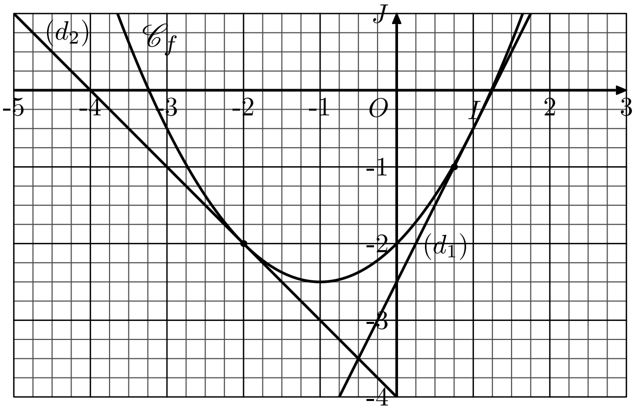
e. $f(x)=-x^2-3{\cdot}x+4$ f. $f(x)=0{,}4x^2+x-4$

Exercice 14

1. On considère la fonction f du second degré définie par : $f(x)=3{\cdot}x^2-x+1$
   a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Calculer les images suivantes par la fonction f' :
      - $f'(2)$ - $f'(1)$ - $f'(0{,}5)$ - $f'(0)$
2. On considère la fonction f du second degré définie par : $f(x)=-x^2+2{\cdot}x-4$
   a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Calculer les images suivantes par la fonction f' :
      - $f'(1)$ - $f'(0)$ - $f'(-2)$ - $f'(-0{,}5)$

Exercice 15

On considère la fonction f du second degré dont la courbe représentative est donnée dans le repère ci-dessous :



1. a. La droite (d_1) est la tangente a la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(1\,;-0{,}5)$.
   Déterminer le coefficient directeur de la droite (d_1).
   b. La droite (d_2) est la tangente a la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(-2\,;-2)$.
   Déterminer le coefficient directeur de la droite (d_2).
2. L'expression de la fonction est définie par : $f(x)=0{,}5{\cdot}x^2+x-2$
   a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Calculer les images suivantes par la fonction f' :
      - $f'(1)$ - $f'(-2)$

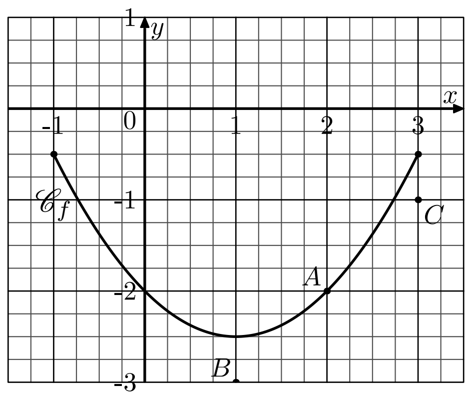
7. Tangente : recherche de l'équation :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $[-1\,;3]$ par la relation : $f(x)=0{,}5{\cdot}x^2-x-2$

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère :

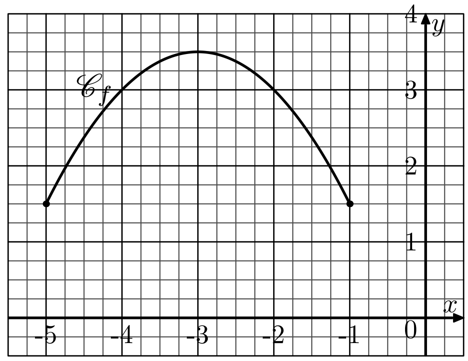


1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. On note (T) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
   a. Déterminer les coordonnées du point A d'abscisse 2 de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   b. Déterminer le coefficient directeur de la tangente (T).
   c. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T).
3. a. Donner les coordonnées de deux points appartenant à la tangente (T).
   b. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

Exercice 17

On considère la fonction f définie sur $[-5\,;-1]$ par la relation : $f(x)=-0{,}5{\cdot}x^2-3{\cdot}x-1$

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère :



1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. On note (T) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.
   a. Déterminer le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{C}_f$.
   b. Détermine l'équation réduite de la tangente (T).
3. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

8. Tangente : utilisation de la formule :

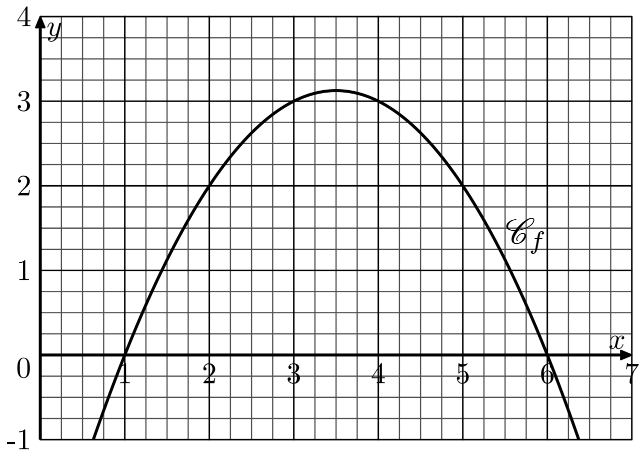
(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 18

> Soit f une fonction f dérivable en a et notons $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
> La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour équation réduite :
> $y = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)$

On considère la fonction f définie pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;7\right]$ par :
$f(x) = -0{,}5\cdot x^2 + 3{,}5\cdot x - 3$
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère et A le point d'abscisse 2 appartenant à $\mathscr{C}_f$.

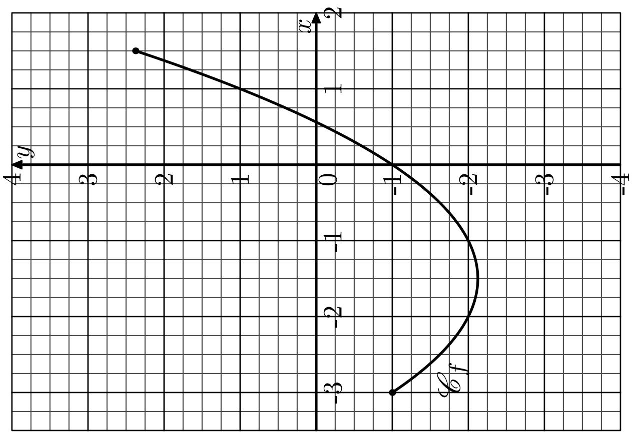
1. Donner les coordonnées du point A.
2. Déterminer la valeur du nombre dérivée de la fonction f en $x=2$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
4. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessous :



Exercice 19

On considère la fonction f définie pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $\left[-3\,;1{,}5\right]$ par :
$f(x) = 0{,}5\cdot x^2 + 1{,}5\cdot x - 1$
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère et A le point d'abscisse 1 appartenant à $\mathscr{C}_f$.

1. Donner les coordonnées du point A.
2. Déterminer la valeur du nombre dérivée de la fonction f en $x=1$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
4. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessous :



9. Signe du nombre dérivé et variation :

(+1 exercice pour les enseignants)

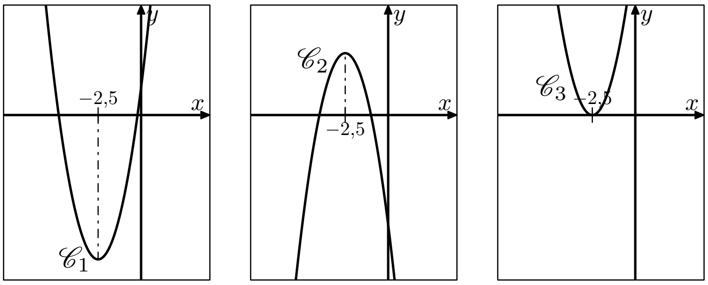
Exercice 20

Soit f la fonction du second degré définie sur $\left[-4\,;4\right]$ par la relation : $f(x)=x^2+5\cdot x+1$

1. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Résoudre l'équation : $f'(x)=0$
   c. Compléter le tableau de signes ci-dessous :

x	-4	4
$f'(x)$		

2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère. Laquelle de ces trois courbes est la courbe $\mathscr{C}$:



Exercice 21

Soit f la fonction du second degré définie sur $[-2\,;5]$ par la relation : $f(x)=-x^2+2\cdot x+1$

1. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

b. Résoudre l'équation : $f'(x)=0$

c. Compléter le tableau de signes ci-dessous :

x	-2	5
$f'(x)$		

2. Parmi les tableaux de variations ci-dessous, lequel est le tableau de variations de la fonction f :

a.

x	-2	1	5
Variation de f	-7 ↗	1	↘ -14

b.

x	-2	1	5
Variation de f	-7 ↗	2	↘ -14

c.

x	-2	1	5
Variation de f	7 ↘	1	↗ 14

10. Etude des variations :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 22

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;b]$ dont on notera la fonction f' sa fonction dérivée :

- Si f' est positive sur $[a\,;b]$ alors la fonction f est croissante :
  Pour $x\in[a\,;b]$, $f'(x)\geqslant 0 \implies f$ est croissante.
- Si f' est négative sur $[a\,;b]$ alors la fonction f est décroissante :
  Pour $x\in[a\,;b]$, $f'(x)\leqslant 0 \implies f$ est décroissante.

Ainsi, si la fonction f' admet le tableau de signes suivant :

x	a		α		β		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

alors la fonction f admet le tableau de variations :

x	0	10
Variation de f		

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ définie par :
$f(x)=x^2-12\cdot x-10$

a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

b. Compléter le tableau de signes ci-dessous :

x	0	10
$f'(x)$		

c. Compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	0	10
Variation de f		

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ définie par :
$g(x)=-x^2+2\cdot x+3$

a. Déterminer l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g.

b. Compléter le tableau de signes ci-dessous :

x	-3	4
$g'(x)$		

c. Compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	-3 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 4
Variation de g	

Exercice 23

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;2]$ par :
$f(x) = -2{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x + 3$
   a. Donner l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   b. Etudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[-4\,;2]$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-4\,;2]$.
2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par :
$g(x) = 6{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 3$
   a. Donner l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g.
   b. Etudier le signe de la fonction g' sur l'intervalle $[0\,;5]$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;5]$.

11. Problèmes :

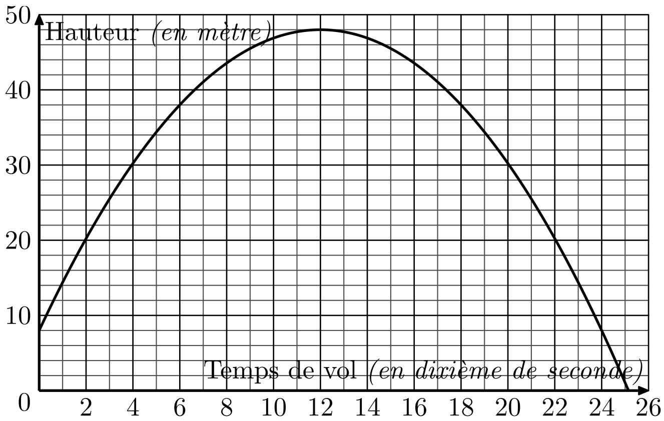
(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 24

A l'occasion d'un festival pyrotechnique, un artificier se prépare à lancer des fusées à partir d'une plate-forme située à 8 mètres de hauteur. Il dispose de deux types de fusée, notés A et B.

Partie A

La hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type A en fonction de leur temps de vol x, en dixième de seconde, est modélisée par la courbe ci-dessous.



Répondre aux deux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

1. Quelle hauteur atteindra la fusée après 0,7 seconde de vol?
2. Pour des raisons de sécurité, la fusée doit exploser à une altitude supérieure à 40 mètres. Déterminer l'intervalle de temps auquel doit appartenir x pour satifsfaire cette contrainte.

Partie B

On modélise la hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type B en fonction de leur temps de vol x, en dixième de seconde, par la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;20]$:
$f(x) = -0{,}5{\cdot}x^2 + 10{\cdot}x + 8$

Comme dans le cas des fusées de type A, l'explosion des fusées de type B doit avoir lieu lorsque celles-ci sont situées à une altitude supérieure ou égale à 40 mètres. On cherche à déterminer l'intervalle dans lequel doit se trouver x pour satisfaire à cette contrainte.

1. a. Montrer que pour satisfaire à la contrainte posée, x doit être solution de l'inéquation :
$-0{,}5{\cdot}x^2+10{\cdot}x-32 \geqslant 0.$
   b. Dresser le tableau de signes de la fonction qui à x associe $-0{,}5{\cdot}x^2+10{\cdot}x-32$ sur l'intervalle $[0\,;20]$ et répondre alors au problème posé.
2. a. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;20]$, calculer $f'(x)$, f' étant la fonction dérivée de f.
   b. L'artificier souhaite connaître le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe représentative de f.
   Donner le coefficient directeur recherché.
3. Pour des raison d'esthétique, l'artificer souhaite faire exploser ses fusées de type B lorsque celles-ci seront à la hauteur maximale.
Quel temps de vol avant l'explosion doit-il alors programmer?

Exercice 25

En 2012, le gérant d'une brasserie de bord de plage propose le midi, un menu à 9,80 €.
A ce tarif, il sert en moyenne 420 couverts par semaine. Cette formule rencontre un tel succès qu'il décide d'augmenter son prix les étés suivants.
Il observe une légère diminution du nombre de couverts mais sa formule demeure rentable.

1. Le nombre hebdomadaire moyen de couverts en fonction du prix x du menu est : $N(x)=-19{\cdot}x+604$
Le prix x du menu est exprimé en euro.
   a. Calculer le nombre hebdomadaire moyen de couverts lorsque le prix du menu est de 11 €.
   b. Calculer le chiffre d'affaires hebdomadaire réalisé par la brasserie lorsque le menu est au prix de 11 €.
   c. On note $C(x)$ le chiffre d'affaires hebdomadaire en euro pour un prix du menu de x euros.
   Montrer que : $C(x)=-19{\cdot}x^2+604{\cdot}x$.
2. On considère la fonction c définie sur l'intervalle $[0\,;25]$

par : $C(x) = -19 \cdot x^2 + 604 \cdot x$

a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée C' de C.

b. Donner le signe de $C'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;25]$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction C sur l'intervalle $[0\,;25]$.

3. a. Pour quel prix du menu le chiffre d'affaires hebdomadaire de la brasserie est-il maximal?
On arrondira le résultat au centième.

b. A ce prix, quel est le chiffre d'affaires hebdomadaire de la brasserie? On arrondira le résultat à l'unité.