Seconde/Calcul algébrique, équation du premier degré, problèmes

ChingEval : 4 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. Rappels :

Exercice 1

Dire si les équations suivantes acceptent pour solution $x=2$:

a. $3x+1=2x-1$ b. $3(x+1)-3(2-x)=x+1$

c. $\dfrac{2x+1}{3x+4}=\dfrac{1}{2}$ d. $\sqrt{3x^2+4}=4$

Exercice 2

Au travers de contre-exemple, montrer que les égalités suivantes sont fausses :

a. $3x+1=4x$ b. $(x+1)^2=x^2+1$

c. $(x+y)^2=x^2+y^2$ d. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x+y}$

e. $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$

Exercice 3

Le diagramme ci-dessous présente la résolution d'une équation.

$5(x+2)+2x=3(x+5)+2$	
$5x+10+2x=3x+15+2$	
$7x+10=3x+17$	
$7x=3x+17-10$	
$7x=3x+7$	
$7x-3x=7$	
$4x=7$	
$x=\dfrac{7}{4}$	

Compléter chacune des étiquettes à l'aide d'une "*action*" mathématique.

2. Développement :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 4

Développer les expressions ci-dessous :

a. $x(2x-1)-3(5-x)$ b. $(3x+1)x-3(x-2)$

Exercice 5

Développer les expressions suivantes :

a. $3(x-5)-2x(1-2x)$ b. $3(x+2)-4(2-2x)$

Exercice 6

Développer et réduire les produits suivants :

a. $(2x+1)(3-2x)$ b. $(x-3)(-x-1)$

Exercice 7

Développer et donner la forme réduite des expressions ci-dessous :

a. $(3x+2)(5-2x)$ b. $(x-1)(3x^2-2)$

Exercice 8

Développer et donner la forme réduite des expressions ci-dessous :

a. $2(3-2x)x-2(x-2)$ b. $\big[2+2(x-5)\big](x-1)$

c. $(5x+1)\big[2(x-1)-5x\big]$

Exercice 9

Développer les expressions suivantes :

a. $(3-x)(2x+1)+2(x+2)$ b. $(x-1)(2x-1)-3(3+2x)$

Exercice 10

Développer et réduire les expressions suivantes :

a. $-(5-2x)+(x+3)(2x+1)$

b. $x(1+x)-(x+2)(3-x)$

3. Développement : identification des termes :

Exercice 11

Pour chacune des questions ci-dessous, déterminer les valeurs des réels a et b réalisant l'identité proposée :

a. $2x^2-5x-3=(2x+1)(a\times x+b)$

b. $-2x^2+5x-3=(x-1)(a\times x+b)$

c. $-x^2-3x+4=(-x+a)(-1+b\times x)$

d. $4x^2+12x+9=\big(2x+a\big)^2$

Exercice 12

1. On considère l'expression algébrique $-4x^2+4x+3$. Sa forme factorisée est une des quatre expressions ci-dessous. Laquelle?

a. $\big(-2x+1\big)\big(2x+3\big)$ b. $\big(2x-1\big)\big(2x-3\big)$

c. $\big(2x+1\big)\big(2x-3\big)$ d. $\big(2x+1\big)\big(3-2x\big)$

2. Déterminer les valeurs des nombres a et b réalisant la factorisation suivante :
$6x^2-7x-5=\big(2x+1\big)\big(a\times x+b\big)$

Exercice 13

1. On considère l'expression algébrique $-4x^2-4x+3$. Sa forme factorisée est une des quatre expressions ci-dessous. Laquelle?

a. $\big(-2x+1\big)\big(2x+3\big)$ b. $\big(2x-1\big)\big(2x-3\big)$

c. $\big(2x+1\big)\big(2x-3\big)$ d. $\big(2x+1\big)\big(3-2x\big)$

2. Déterminer les valeurs des nombres a et b réalisant la factorisation suivante :
$8x^2-2x-3=\big(2x+1\big)\big(a\times x+b\big)$

4. Factorisation : avec facteur commun :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 14

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(3x-1)(2x+1)+(5-x)(2x+1)$

b. $x(2-x)+(3x+1)(2-x)$

Exercice 15

Factoriser les expressions suivantes :

a. $\big(x+3\big)\big(x+1\big)+\big(3x-1\big)\big(x+3\big)$

b. $\big(2x+1\big)\big(4x-1\big)+\big(2+x\big)\big(2x+1\big)$

Exercice 16

Factoriser les expressions suivantes :

a. $\big(3x+2\big)\big(2-2x\big)+\big(3x+2\big)\big(x+4\big)$

b. $\big(x-1\big)\big(2x-2\big)+\big(2x-2\big)\big(5-2x\big)$

Exercice 17

Factoriser les expressions suivantes :

a. $\big(4-3x\big)\big(x+5\big)-\big(4-3x\big)\big(x+2\big)$

b. $\big(2x+5\big)\big(x+2\big)-\big(2x+5\big)$

Exercice 18

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(2x+4)(3-3x)+(2x+4)$

b. $(5x+1)(7-3x)-(5x+1)$

Exercice 19

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(3x-1)^2+(3x-1)(5x+4)$

b. $\big(x+5\big)\big(4-x\big)-\big(4-x\big)^2$

Exercice 20

Factoriser les expressions suivantes :

a. $\big(5-x\big)^2+\big(5-x\big)\big(x+1\big)$

5. Factorisation et équation :

Exercice 21

Résoudre par la méthode de votre choix les équations suivantes :

a. $(3x+1)(2-3x)-(5x-1)(3x+1)=0$

b. $2(x+2)(3-x)=(x+2)(5x-7)$

6. Equation produit et du 1er degré :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 22

1. Développer chacune des expressions suivantes :

   a. $x(x-3)-x^2$

   b. $(6x+1)^2-(12x+2)(3-3x)$

2. Résoudre les équations suivantes après développement et réduction :

   a. $x(x-3)-x^2=0$

   b. $(6x+1)^2=(12x+2)(3x-3)$

Exercice 23

Résoudre par la méthode de votre choix les équations suivantes :

a. $(2x+3)(6x+7)+(2-4x)(3x+1)=3x-7$

b. $(2x+1)(x-2)+(3x-5)(2x+1)=0$

Exercice 24

Résoudre dan $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $(2x+1)(4-x)+(4x-1)(2x+1)=0$

b. $-(12x-2)(2-3x)=36x^2-12x+1$

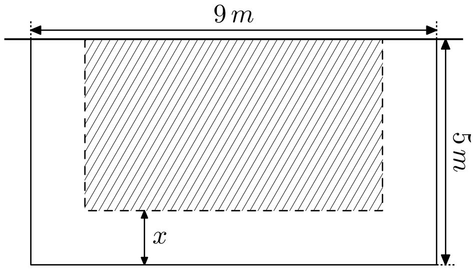
7. Problèmes :

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 25

Adossé à sa maison, Jean possède un jardin de forme rectangulaire ayant pour dimensions $9\,m$ et $5\,m$.

Il souhaite construire sur trois des côtés de ce jardin une allée ayant la même largeur et il plantera de la pelouse sur le reste du jardin. Il propose le schéma ci-dessous où la partie hachurée est l'espace de la pelouse



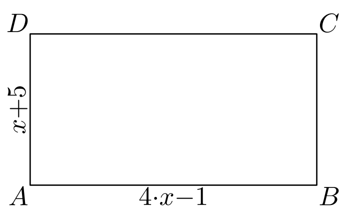
Quelle doit-être la largeur de l'allée pour que l'ensemble de la pelouse ait une surface de $10\,m^2$?

Indication :
On utilisera une des formes factorisées ci-dessous :
- $2x^2-18x+28=(2x-4)(x-7)$
- $2x^2-20x+32=(2x-4)(x-8)$
- $2x^2-19x+35=(2x-5)(x-7)$
- $2x^2-21x+40=(2x-5)(x-8)$

Exercice 26

1. Etablir la factorisation suivante :
   $(x+5)(4x-1)-10x-8=(x-1)(4x+13)$

2. On considère le rectangle $ABCD$ dont les dimensions sont fonction d'un nombre réel x et sont données en centimètre :
   $AB=4x-1$; $AD=x+5$

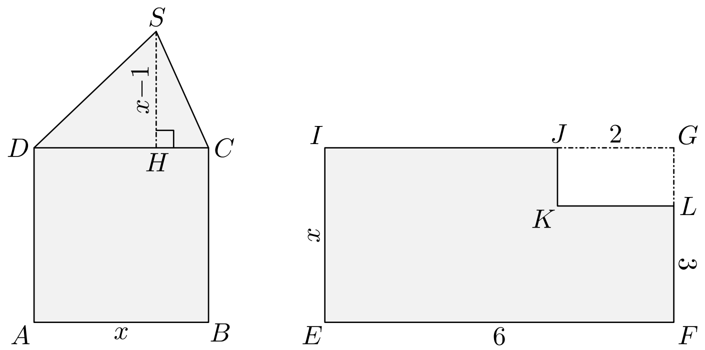


   a. Quelles sont les valeurs possibles du paramètre x.

   b. Déterminer la ou les valeurs de x afin que le périmètre, exprimé en cm, du rectangle $ABCD$ est égale à l'aire, exprimé en cm^2, du rectangle $ABCD$.

Exercice 27

On considère les deux surfaces $ABCSD$ et $EFLKJI$ représentées ci-dessous où x est un nombre réel.



- $ABCD$ est un carré de côté x et SDC est un triangle dont la hauteur $[SH]$ a pour mesure $x-1$.
- Les quadrilatères $EFGI$ et $GJKL$ sont deux rectangles.

1. Quelles sont les valeurs possibles de la variable x en fonction des contraintes des figures?

2. Exprimer l'aire de ces deux surfaces en fonction de x.

3. a. Etablir la factorisation :
   $\frac{3}{2}\cdot x^2-\frac{9}{2}\cdot x-6=\left(\frac{3}{2}\cdot x-6\right)(x+1)$

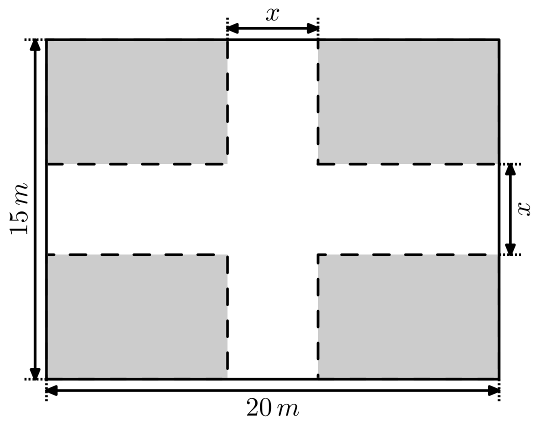
   b. Déterminer la ou les valeurs possibles de la variable x permettant d'obtenir l'égalité d'aires de ces deux surfaces.

Exercice 28

Un jardin a une forme rectangulaire ayant pour dimension $20\,m$ de longueur et $15\,m$ de largeur.

Deux allées de largeur $x\,m$ partagent transversalement ce jardin ; du gazon sera planté sur le reste du jardin.

Une cloture doit être poser autour du gazon : elle est représentée en pointillées sur la représentation.



1. Indiquer quelles valeurs peut prendre la variable x.

2. a. Déterminer en fonction de x l'aire totale des deux allées.

   b. Déterminer en fonction de x l'aire du gazon de ce jardin.

3. a. Déterminer les valeurs des réels a et b vérifiant l'égalité :
   $2{\cdot}x^2 - 70{\cdot}x + 300 = (x-30)(a{\cdot}x+b)$

   b. L'architecte chargé de la réalisation de ce jardin décide de choisir la largeur de l'allée afin que les aires des allées et du gazon soient égales.

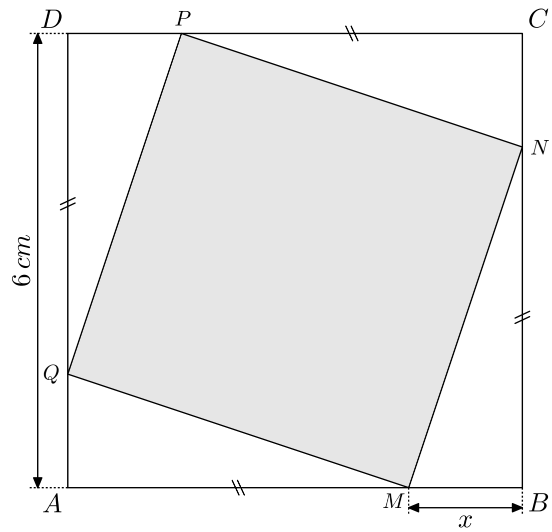
4. Le propriétaire du jardin décide d'investir 5 600 euros dans l'aménagement du jardin.
   Le m^2 de gazon coûte 7 € ; Le m^2 du parquet composant l'allée coûte 30 € ; Le m de la clôture coûte 12 €.

   a. Etablir l'égalité suivante :
   $23x^2 - 757x + 2660 = (x-4)(23x-665)$

   b. En déduire la largeur des allées réalisant les dessins du propriétaire.

Exercice 29

On considère le carré $ABCD$ de côtés $6\,cm$ et quatre points M, N, P, Q tels que : $AM = BN = CP = DQ$
On admet que $MNPQ$ est un carré et on note : $x = BM$



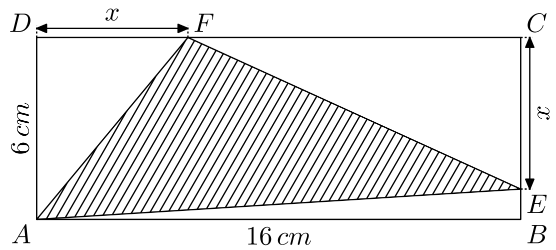
1. Justifier que l'aire $\mathcal{A}$ du carré $MNPQ$ a pour valeur :
   $\mathcal{A} = 2x^2 - 12x + 36$

2. a. Etabir la factorisation :
   $2x^2 - 12x + \dfrac{27}{2} = \dfrac{1}{2}\big(2x-9\big)\big(2x-3\big)$

   b. Déterminer la ou les valeurs de x afin que l'aire du carré $MNPQ$ a pour valeur les $\dfrac{5}{8}$ de celle du carré $ABCD$.

Exercice 30

On considère la figure ci-dessous constituée d'un rectangle $ABCD$ de dimension $16\,cm$ et $6\,cm$ et des deux points E et F appartenant respectivement aux segments $[BC]$ et $[CD]$ tels que : $CE = DF = x$ où x est un nombre réel.



On considère le domaine hachuré de la figure défini par le triangle AEF.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles du nombre x.

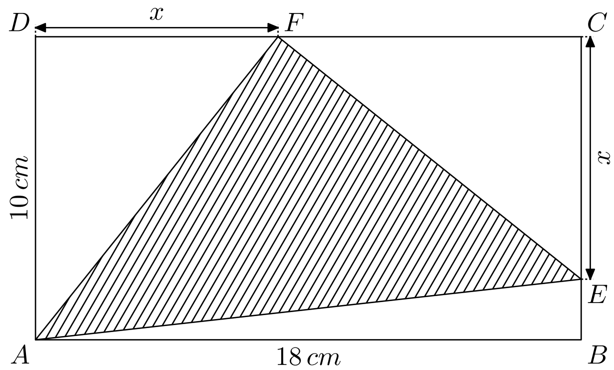
2. a. Justifier que la partie "*blanche*" de cette figure a pour aire $\mathcal{A}$ dont l'expression en fonction de x est :
   $\mathcal{A} = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x + 48$

   b. Déterminer l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie "*hachurée*".

3. Déterminer la ou les valeurs de x permettant d'obtenir les deux domaines "*blancs*" et "*hachurés*" de même aire.

Exercice 31

On considère la figure ci-dessous constituée d'un rectangle $ABCD$ de dimension $18\,cm$ et $10\,cm$ et des deux points E et F appartenant respectivement aux segments $[BC]$ et $[CD]$ tels que : $CE = DF = x$ où x est un nombre réel.



On considère le domaine hachuré de la figure défini par le triangle AEF.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles du nombre x.

2. a. Justifier que la partie "*blanche*" de cette figure a pour aire $\mathcal{A}$ dont l'expression en fonction de x est :
   $\mathcal{A} = -\dfrac{1}{2}x^2 + 5x + 90$

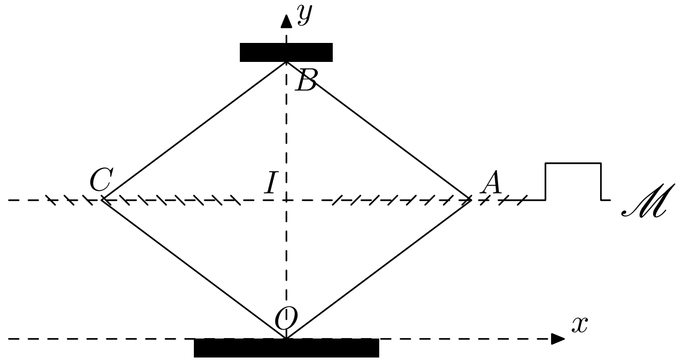
   b. Déterminer l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie "*hachurée*".

Indication : on pensera à factoriser par x.

3. Déterminer la ou les valeurs de x permettant d'obtenir les deux domaines "*blancs*" et "*hachurés*" de même aire.

Exercice 32

La figure ci-dessous est le schéma d'un cric de voiture.



Celui-ci est constitué d'un losange déformable $OABC$, le point O étant le point d'appui sur le sol et le point B étant le point par lequel la voiture est soulevée.

A chaque tour de la manivelle $\mathscr{M}$, les écrous A et C se rapprochent *(ou s'éloigne)* de $2\,cm$, ce qui fait monter *(ou descendre)* l'appui B, selon l'axe (Oy).

On donne : $OA=OC=AB=BC=25\,cm$

Dans le repère orthonormé $(O\,;\ x\,;\,y)$ d'unité un centimètre, x_A désigne l'abscisse du point A et varie de 0 à 25.
L'ordonnée du point B est notée y_B :

- Pour $x_A=0$, on a : $y_B=50$;
- Pour $x_A=25$, on a : $y_B=0$.

1. Démontrer que les valeurs x_A et y_B vérifient la relation : $y_B = 2\sqrt{625-{x_A}^2}$

2. a. Déterminer la valeur de y_B lorsque x_A est égal à 7.

   b. Déterminer la valeur de x_A lorsque y_B est égal à 40.

3. Supposons que le cric est fermé ; la hauteur du point B est alors de $0\,cm$:

   a. Lorsque le cric est complétement fermé, combien de tours de manivelles permettent d'atteindre une hauteur de $24\,cm$ pour le point B?

   b. Combien de tours supplémentaire faut-il pour doubler la hauteur du point B?

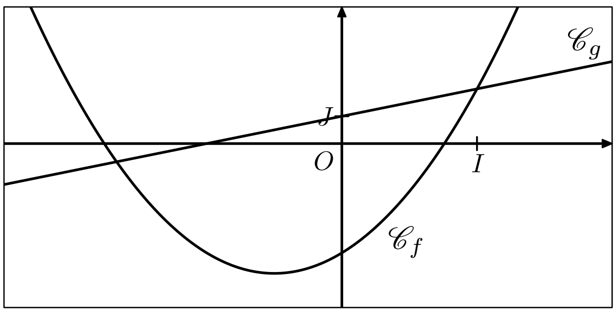
8. Fonctions et équations produits :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 33

On considère les deux fonctions f et g du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions algébriques :
$f(x)=3x^2+3x-4$; $g(x)=x+1$

Dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthogonal ci-dessous, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives données ci-dessous :



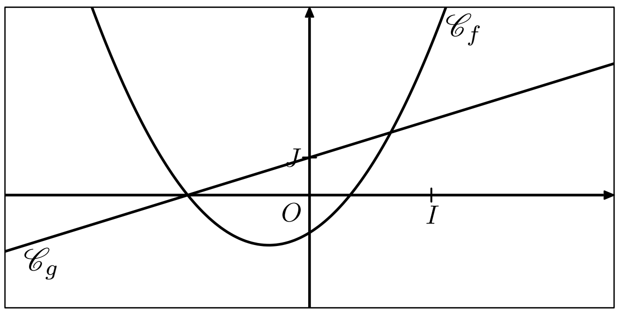
1. Etablir la factorisation :
   $f(x)-g(x)=\big(x-1\big)\big(3x+5\big)$

2. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 34

On considère les deux fonctions f et g du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions algébriques :
$f(x)=3x^2+2x-1$; $g(x)=x+1$

Dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthogonal ci-dessous, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives données ci-dessous :



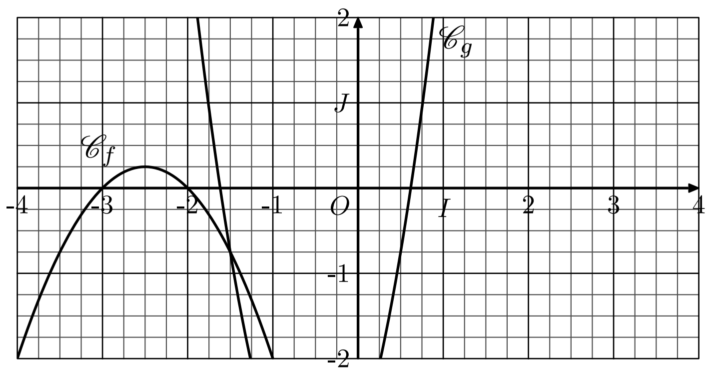
1. Etablir la factorisation :
   $f(x)-g(x)=\big(x+1\big)\big(3x-2\big)$

2. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 35

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=(-x-2)(x+3)$; $g(x)=3x^2+3x-3$

Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g :



1. Etablir la factorisation :
   $f(x)-g(x)=\big(-2x-1\big)\big(2x+3\big)$

2. En déduire les abscisses des points d'intersection de ces

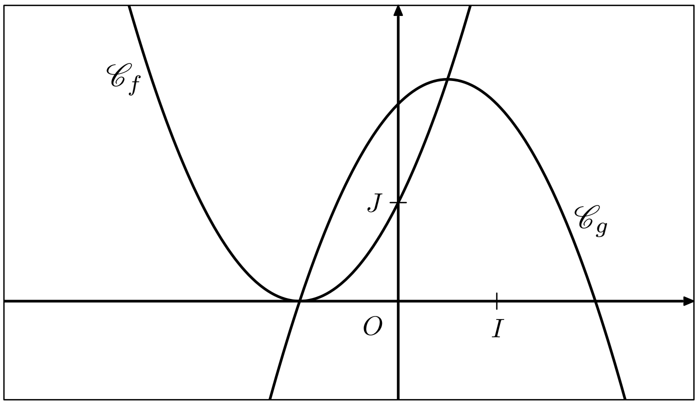
deux courbes.

Exercice 36

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f(x) = x^2 + 2{\cdot}x + 1 \quad ; \quad g(x) = -(x+1)(x-2)$$

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives respectivement des fonctions f et g sont données dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.

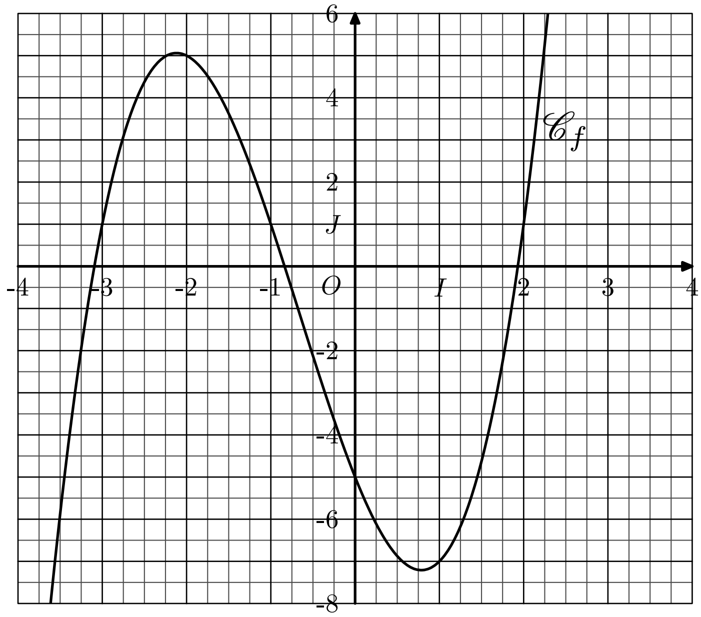


Déterminer les coordonnées des points d'intersections de ces deux courbes.

Toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 37

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal représenté ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



1. a. Déterminer l'image du nombre -3 par la fonction f. Justifier votre réponse.

   b. Résoudre, graphiquement, l'équation $f(x)=1$. Justifier votre réponse.

2. L'image d'un nombre x par la fonction f est donnée par la relation :
   $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 5$

   a. Justifier, par le calcul, la valeur de l'image du nombre -3.

   b. Etablir l'égalité suivante :
   $x^3 + 2x^2 - 5x - 5 = (x+3)(x-2)(x+1) + 1$

   c. Résoudre, par le calcul, l'équation $f(x)=1$.

9. Factorisation : reconnaissance du facteur commun :

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 38

1. a. Trouver une relation algébrique entre les deux expressions :
   $3x-2 \quad ; \quad 6x-4$

   b. En déduire une factorisation de l'expression algébrique suivante :
   $A = (x+2)(3x-2) + (5x-2)(6x-4)$

2. a. Trouver une relation algébrique entre :
   $3-x \quad ; \quad x-3$

   b. En déduire une factorisation de l'expression algébrique suivante :
   $B = (2x+1)(3-x) - (2-2x)(x-3)$

3. a. Trouver une relation algébrique entre :
   $2x-1 \quad ; \quad 2-4x?$

   b. En déduire une factorisation de l'expression algébrique suivante :
   $C = (5-2x)(2x-1) + (2-4x)$

Exercice 39

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(7x-2)(5-x) + (4x-1)(x-5)$

b. $(12x-3)(7+2x) - (5-2x)(1-4x)$

Exercice 40

Factoriser les expressions suivants :

a. $(x-2)(x+1) - 2(x-2)(2x+3)$

b. $(x+3)(2x-1) + (2-4x)(x-1)$

Exercice 41

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(2x-4)(x+4) + (6-3x)(4x+2)$

b. $2(4x+6)(5-2x) + (x-3)(6x+9)$

Exercice 42

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(2x+3)(1-x) + (4x+6)^2$

b. $(3-9x)^2 + 3(3x-1)$

c. $(5x+1)(2x-4) + (3x-6)^2$

10. Equation produit : reconnaissance du facteur commun :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 43

1. a. Factoriser l'expression algébrique suivante :
$(3x+2)(2x-1)+(4x-2)(3-5x)$

b. Résoudre l'équation suivante :
$(3x+2)(2x-1)+(4x-2)(3-5x)=0$

2. a. Factoriser l'expressions suivante :
$(2x+1)(3-2x)-(3x-2)(2x-3)$

b. Résoudre l'équation suivante :
$(2x+1)(3-2x)=(3x-2)(2x-3)$

Exercice 44

1. a. Montrer que les deux équations suivantes sont équivalentes :
$x^2=x \quad ; \quad x(x-1)=0$

b. En déduire les solutions de l'équation : $x^2=x$

2. Résoudre les équations suivantes :

a. $(x-2)(3-2x)=0$

b. $(5x-1)(2-x)+(2x-4)(3-2x)=0$

Exercice 45

En se ramenant à une équation produit, résoudre les équations suivantes :

a. $(3x-1)(2x+2)+3(5-2x)(x+1)=0$

b. $3(5x+1)(2-3x)+(6x-4)(x-1)=0$

c. $(4x+6)(1-2x)=5(2x+3)^2$

11. Expression rationnelle et équation :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 46

Etablir les identités suivantes :

a. $\dfrac{3x+1}{x+1}+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)}$

b. $\dfrac{2-x}{3x+1}+\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{3x^2+2x+5}{2(3x+1)}$

Exercice 47

Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{2x-1}=0$ b. $\dfrac{2x-1}{4x+1}-\dfrac{3x}{6x-1}=0$

Exercice 48

Résoudre l'équation : $\dfrac{4x}{2x+1}-\dfrac{2x-3}{x+1}=0$

Exercice 49

Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{2x}{4x+1}=\dfrac{x+1}{2x-1}$ b. $\dfrac{1-x}{2-x}=\dfrac{x+3}{x-1}$

Exercice 50

Résoudre l'équation : $\dfrac{3}{5x+3}-\dfrac{2-5x}{x+2}=0$

12. Expression algébrique : antécédents :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 51

1. On considère les trois fonctions suivantes :
$f(x)=(x+1)(1-x^2) \quad ; \quad g(x)=\dfrac{(1+x)^2}{x-2} \quad ; \quad h(x)=3-2\cdot(x+1)$
Déterminer l'image du nombre 1 par chacune de ces trois fonctions.

2. On considère les trois fonctions suivantes :
$j(x)=\dfrac{1}{1-x} \quad ; \quad k(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x+1} \quad ; \quad \ell(x)=\dfrac{3\cdot x-1}{2-3\cdot x}$
Déterminer les antécdents du nombre -1 par chacune de ces trois fonctions.

13. Expression algébrique : antécédents et ensemble de définition :

Exercice 52

1. On considère la fonction f carré dont l'expression algébrique est : $f(x)=x^2$
La fonction f admet-elle un ou des antécédents du nombre -4 ? Justifier votre réponse.

2. On considère la fonction g dont l'expression est donnée par la relation : $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$
Que peut-on dire de l'ensemble des antécédents du nombre 2 par la fonction g ?

3. On considère la fonction h définie par l'expression :
$$h(x) = \frac{3{\cdot}x+1}{x}$$
Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre 3 par la fonction h.

14. Expression algébrique : image et antécédents :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 53

1. Soit f une fonction réalisant la relation : $f(2) = \sqrt{5}$
   a. Traduire cette relation par une phrase utilisant le mot "*image*".
   b. Traduire cette relation par une phrase utilisant le mot "*antécédent*".
2. Soit g une fonction telle que l'équation $g(x) = 1$ admet pour solution les nombres -1 et 2.
   Traduire cette propriété par une phrase utilisant le mot "*antécédente*".

Exercice 54

On définit six fonctions et, pour chacune d'elles, deux valeurs numériques :

a. $f(x) = 3x+5$; $a = 2$; $b = -1$

b. $g(x) = -2x-2$; $a = 1$; $b = 8$

c. $h(x) = x^2$; $a = 5$; $b = 9$

d. $j(x) = 3x^2$; $a = -3$; $b = -1$

e. $k(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$; $a = 2$; $b = 1$

f. $\ell(x) = \dfrac{2x-2}{x+\pi}$; $a = 1$; $b = 2$

1. Pour chaque question, déterminer l'image du nombre a par la fonction associée.
2. Pour chaque question, déterminer l'ensemble des antécédents du nombre b par la fonction associée.

Exercice 55

1. Ci-dessous est présenté trois fonctions qui ont été saisies sur une calculatrice :
   a. `Y1=√(1+√(3-X))÷√X+3`
   b. `Y2=(3X-2)÷(2√X+1)`
   c. `Y3=√(3+X)(2-X)`

   Ré-écrire sur votre copie ces trois fonctions avec la présentation habituelle des expressions mathématiques.
2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, écrire les caractères à saisir dans une calculatrice pour les insérer :
   a. $f : x \mapsto \dfrac{1+\dfrac{3+x}{x}}{2-3x}$
   b. $g : x \mapsto \sqrt{(1-2x)\times(3x-1)}$
   c. $h : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+1}$

15. Etude algébrique :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 56

On considère les trois fonctions ci-dessous

$f : x \longmapsto 3x+2$; $g : x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x+3}$; $h : x \longmapsto \sqrt{x-5}$

1. Déterminer l'image de 5 pour chacune de ces fonctions.
2. Déterminer les antécédents du nombre 4 pour chacune de ces trois fonctions.
3. Pour chaque fonction, préciser si elle est définie pour tout nombre réel. Sinon, citer au moins un nombre n'admettant d'image par cette fonction.

Exercice 57

On considère la fonction f définie, pour tout réel strictement positif, par :
$$f(x) = \frac{-x^2}{3} + \frac{2}{x}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Donner, sous forme simplifiée, les images des nombres suivants par la fonction f :
   a. -2 b. 1 c. $\sqrt{2}$
3. Justifier que le nombre 2 est un antécédent de $-\dfrac{1}{3}$ par la fonction f.

Exercice 58

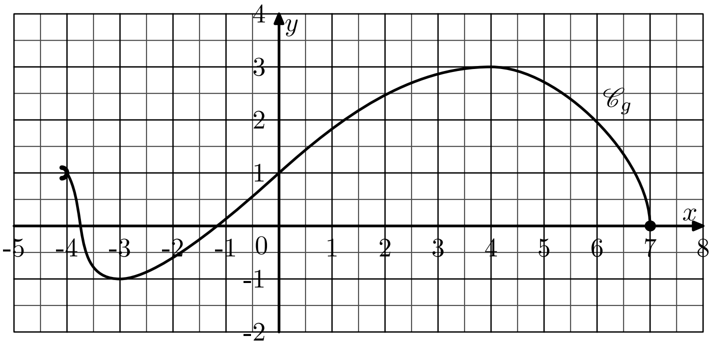
1. On considère la fonction f dont l'image du nombre x est définie par :
   $$f(x) = \sqrt{1-x} \times \sqrt{2x+3}$$
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   b. Déterminer, sous forme simplifiée, les images de -1 et de $\dfrac{1}{2}$ par la fonction f.
2. On considère la fonction g définie par :
   $$g(x) = \frac{\sqrt{2}\,x+1}{3x-1}$$
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
   b. Déterminer l'image du nombre 3 par la fonction g.

16. Etude de fonctions : *(+1 exercice pour les enseignants)*

Exercice 59

On considère les deux fonctions f et g :

- la fonction f définie par : $f : x \longmapsto x^2 - 6x + 2$.
- La fonction g est définie par la représentation graphique ci-dessous :



Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées sont exactes ; citer la réponse exacte.

1. L'image de 1 par la fonction f est :
   a. 1 b. 0 c. -1 d. -3

2. L'ensemble des antécédents de -7 par f est :
   a. $\{3\}$ b. $\{2\}$ c. $\{-2\,;3\}$ d. $\{1\,;2\}$

3. L'ensemble de définition de la fonction g est :
   a. $[-1;-3[$ b. $[-1;3]$ c. $[-4;7]$ d. $]-4;7]$

4. L'image de 0 par la fonction g vaut :
   a. 1 b. -1 c. 7 d. 0

5. Un de ces points n'appartient pas à $\mathscr{C}_g$. Lequel?
   a. $(-3;-1)$ b. $(-4;1)$ c. $(6;2)$ d. $(-2;-0{,}5)$

Exercice 60

1. On considère une fonction f. On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f.

   On considère les propriétés suivantes de la courbe $(\mathscr{C})$:

   a. Le point de coordonnées $(0\,;3)$ appartient à $(\mathscr{C})$.

   b. Le seul point de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée 5 a pour abscisse -1.

   c. Aucun point de $(\mathscr{C})$ n'a pour abscisse -2.

   d. Il n'y a pas de point de $(\mathscr{C})$ d'ordonnée 6.

   Traduire chacune de ces phrases par une phrase décrivant une propriété de la fonction f en utilisant, à chaque fois, au moins un des mots suivant *image*, *antécédent*, *définiey*.

2. Soit g la fonction définie dont l'image d'un nombre x est définie par :
   $g(x) = 2x^2 - 3$

   On note $(\mathscr{C}_g)$ la courbe représentative de la fonction g.

   a. A est un point d'abscisse 2 de $(\mathscr{C}_g)$. Quelle est l'ordonnée du point A?

   b. B est un point de $(\mathscr{C}_g)$ d'ordonnée -3. Donner l'abscisse du point B.

   c. Combien de points de la courbe $(\mathscr{C}_g)$ ont pour ordonnées -1. Préciser, s'ils existent, les coordonnées de ces points.

   d. Combien de points de la courbe $(\mathscr{C}_g)$ ont pour ordonnées -4. Préciser, s'ils existent, les coordonnées de ces points.

3. On considère la fonction h définie par la relation :
   $$h(x) = \frac{2}{x^2+3}$$

   On note $(\mathscr{C}_h)$ la courbe représentative de la fonction h.

   a. Donner l'ordonnée du point de $(\mathscr{C}_h)$ d'abscisse 0.

   b. Combien de points $(\mathscr{C}_h)$ ont pour ordonnée $\dfrac{1}{6}$? Donner, s'ils existent, les coordonnées de ces points.

17. Ensemble de définitions : *(+1 exercice pour les enseignants)*

Exercice 61

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto 2x+5$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
3. $h : x \longmapsto \dfrac{1}{2x+5}$
4. $j : x \longmapsto \dfrac{x+1}{2x+5}$
5. $k : x \longmapsto \sqrt{x}$
6. $\ell : x \longmapsto \sqrt{x^2}$
7. $m : x \longmapsto \sqrt{2x+5}$
8. $n : x \longmapsto \sqrt{-x+2}$

Exercice 62

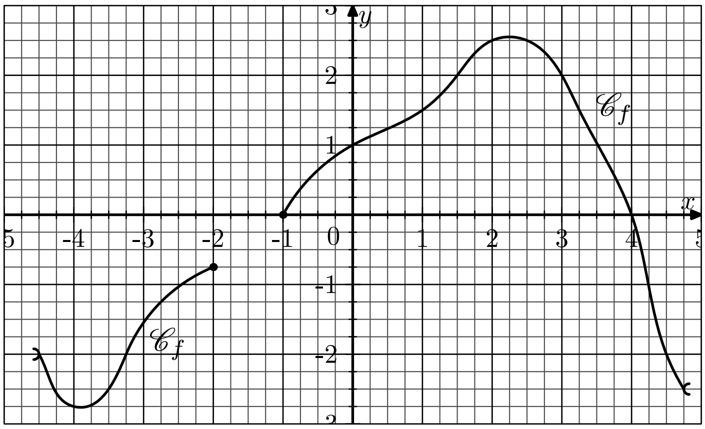
On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x-4}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer l'image du nombre 3 par la fonction f.
3. Déterminer l'ensemble des antécédents de 0 par la fonction f.

Exercice 63

Dans le repère ci-dessous, est représentée la courbe représentative de la fonction f



1. Déterminer les images des nombres suivants par la fonction f :

   a. 1 b. 0 c. -2

2. Déterminer l'ensemble des antécédents pour chacun des nombres suivants :

   a. 2 b. -2

3. a. Donner deux nombres n'admettant pas d'images par la fonction f.

   b. Donner un nombre n'admettant pas d'antécédents par la fonction f.

19. Exercices non-classés :

(+11 exercices pour les enseignants)

Exercice 64

1. Etablir pour tout entier naturel non nul p l'égalité suivante :
$$\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}=\frac{1}{p(p+1)}$$
2. En déduire la valeur de la somme suivante :
$$S=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{2003\times2004}+\frac{1}{2004\times2005}$$

Exercice 65

Résoudre les équations suivantes :

a. $(3x+1)(5x-2)=(6x+2)(1-x)$ b. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}=0$

Exercice 66

Résoudre les équations :

a. $\dfrac{x}{3x+2}=\dfrac{5x}{2x+1}$ b. $\dfrac{4x-2}{2x-3}-\dfrac{6x-2}{3x+1}=0$

Exercice 67

Développer les expressions suivantes :

a. $(2x+1)(3-x)$ b. $(5-2x)(3-x)-3(3-2x)$

c. $4(x+4)(5-2x)$ d. $(x-2)(2x-1)(5-x)$

Exercice 68

Développer et réduire les expressions suivantes :

a. $(2x+1)(3-x)-2(3x+2)$ b. $(2x+1)^2$

c. $(2x+1)(1-x)(x+2)$

Exercice 69

Chacune des expressions suivantes est factorisable. Donner la forme factorisée de chacune d'elle :

a. $(2x+1)(3x-1)-(x+3)(6x-2)$

b. $(x-1)(3x+2)+(2x+3)(1-x)$

c. $(7x-1)(5x-6)-(10x-12)$

d. $(x+2)^2-(x+2)$

Exercice 70

Effectuer les factorisations suivantes :

a. $(3x+1)(2-2x)-(5-4x)(x-1)$

b. $(2-3x)(3+2x)+(3x+2)(-6x-9)$

c. $(6x+2)(2x+3)+(9x+3)^2$

d. $(2x+1)(2x+3)+2(2x+3)$

Exercice 71

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(2x-4)(3x+1)-(6x+2)(4x+1)$

b. $(2-6x)+(x+1)(3x-1)$

Exercice 72

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(3x+2)(x-2)+(4-2x)(2x+3)$

b. $(6x-3)(2x+1)-2(2x-1)^2$

c. $(x+1)(5-2x)(3x-4)+3(2x-5)(6x-8)$

Exercice 73

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(x-1)(2x+1)-(2x-2)(5-2x)$

b. $(2+x)(3-x)+(5-2x)(3-x)$

c. $3(4+2x)-(3+x)(10+5x)$

d. $(2-x)(3x-4)+\left(2-\dfrac{3}{2}x\right)(2x+3)$

Exercice 74

Factoriser les expressions suivantes :

d. $(5x+1)(3\text{-}2x)-(5x+1)(2x+1)$

e. $(x+1)(2x\text{-}1)-(2x\text{-}1)$

f. $(2x-1)^2+(2x-1)(3x+1)$

Exercice 75

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(x+1)(1-x)-(x+1)(2x+1)$

b. $3(2x-2)+(x+1)(1-x)$

Exercice 76

Définition :
- on dit qu'une expérience aléatoire est **équiprobable** si chacune de ses issues à la même probabilité de se réaliser.
- La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des issues qui le définissent.

Proposition :
Pour une expérience aléatoire équiprobable comportant N issues et pour un évènement A défini par n issues, la probabilité de A a pour valeur : $\dfrac{n}{N}$

Exemple :
On jette un dé équilibré où les six faces sont numérotés de 1 à 6. On considère l'évènement A : "*la face obtenue est strictement supérieure à* 4". Cet évènement est composé de 2 issues. La probabilité de l'évènement A est :
$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1\times\cancel{2}}{3\times\cancel{2}}$

Jean possède 365 albums de bandes dessinées. Afin de trier les albums de sa collection, il est range par série et classe les séries en trois catégories : franco-belges, comics et mangas comme ci-dessous :

Séries franco-belges	**Séries de comics**
23 albums "Astérix" 22 albums "Tintin" 45 albums "Lucky-Luke"	35 albums "Batman" 90 albums "Spider-Man"
Séries de mangas	
85 albums "One-pièce" 65 albums "Naruto"	

Il choisit au hasard un album parmi tous ceux de sa collection.

1. Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un album "*Lucky-Luke*"?
2. Quelle est la probabilité que l'album choisi soit un comics?

Exercice 77

Résoudre, par la méthode de votre choix, les équations suivantes :

a. $(x-2)(3x+1)=2(x-2)(x-5)$

b. $(5-2x)(3x+1)+(4x+10)(2x-5)=0$

c. $(2x+3)(8x-3)+(3-4x)(4x+1)=0$

Exercice 78

Résoudre les équations suivantes :

a. $(x+1)(x-1)=3x(x+1)$

Exercice 79

Résoudre les équations suivantes :

a. $(x+1)^2=4$

b. $(x-2)^2+4=7$

c. $(x+2)^2+5=2$

d. $3{\cdot}x^2-6=1$

Exercice 80

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(5x-1)(3x+1)+(5x-1)^2$

b. $(3x+1)(2-3x)+(2-3x)$

c. $(x-3)(7-x)+(x-3)(2x+1)$

d. $(3x-1)(x-2)-(x-2)(1-5x)$