Seconde/Tableau de signes et de variations de fonctions

ChingEval : 5 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. Introduction aux variations d'une fonction :

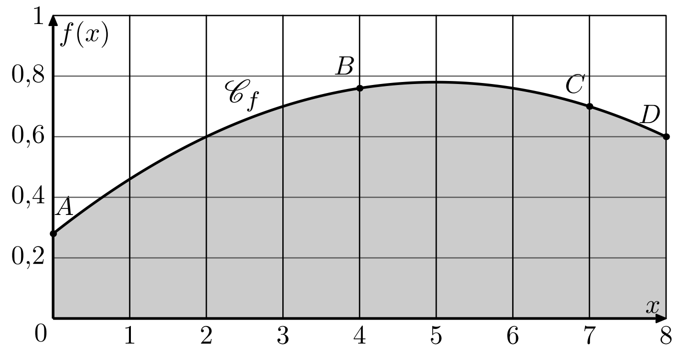
(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 1

On considère la fonction définie sur $[0\,;8]$ par :
$f(x) = -0{,}02{\cdot}x^2 + 0{,}2{\cdot}x + 0{,}25$

Dans une région montagneuse, une entreprise étudie un projet de route reliant les villages A, B et C situés à des altitudes différentes. La fonction f modélise le profil de ce projet routier. La variable x représente la distance horizontale, en kilomètres, depuis le village A et $f(x)$ représente l'altitude associée, en kilomètres.

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



Pour chacune des propositions suivantes, une seule réponse est correcte. Laquelle?

Proposition 1
L'écart d'altitude entre les villages A et B est donné par :

a. $f(0) - f(4)$ b. $f(4) - f(0)$

Proposition 2
L'écart d'altitude entre les villages C et D est donné par :

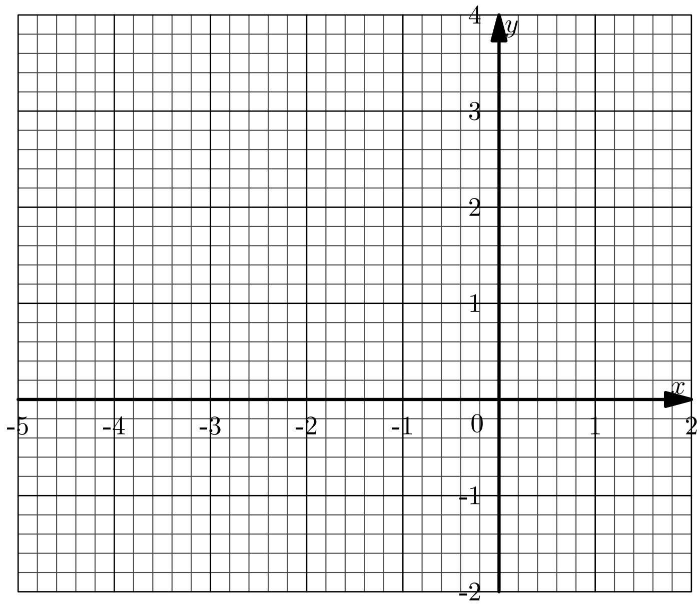
a. $f(7) - f(8)$ b. $f(8) - f(7)$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;2]$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{3}{\cdot}x^3 + \frac{3}{2}{\cdot}x^2 - \frac{3}{2}$$

On considère le plan muni du repèrereprésenté ci-dessous :



On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-dessus.

1. A l'aide la calculatrice, compléter les tableaux de valeurs ci-dessous en y inscrivant les valeurs des images arrondies au dixième près :

x	-5	$-4{,}5$	-4	$-3{,}5$	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$
$f(x)$								

x	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$							

2. Sur l'intervalle $[-5\,;-3]$, que peut-on dire des variations des images par la fonction f?

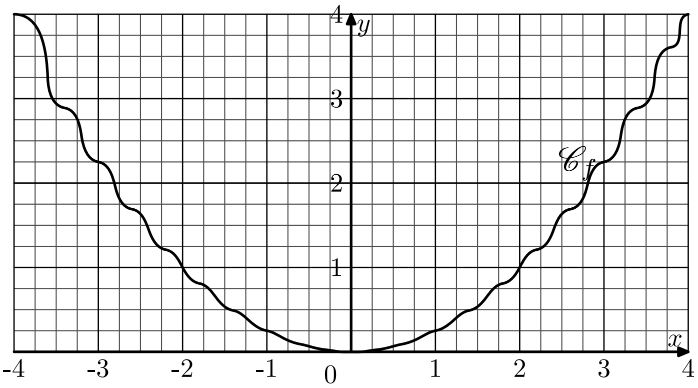
   Sur l'intervalle $[-3\,;0]$, que peut-on dire des variations des images par la fonction f?

3. Placer l'ensemble des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ obtenus à partir des tableaux de valeurs précédentes.
   Puis, effectuer le tracé de $\mathscr{C}_f$.

4. Décrire simplement le comportement de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-5\,;-3]$, puis sur l'intervalle $[-3\,;0]$.

Exercice 3

Dans le plan muni du repère ci-dessous, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



Décrire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;4]$.

2. Tableaux de variation :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 4

On considère une fonction f dont le tableau de variation est donnée ci-dessous :

x	-5		1		3		7
Variation de f	3	↘	-1	→	-1	↗	2 ‖

Compléter les phrases suivantes :

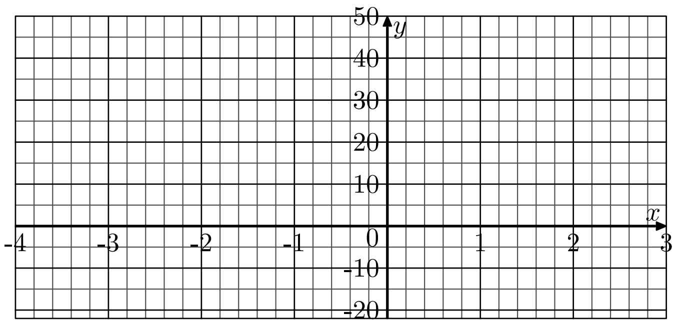
- l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathcal{D}_f = \ldots$
- la fonction f est strictement croissante sur ......
- la fonction f est strictement décroissante sur ......
- la fonction f est ...... sur l'intervalle $[1\,;3]$
- Le nombre ...... n'admet pas d'image par f.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;2]$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x - 1$$

On considère le plan muni du repère orthogonal ci-dessous :



On note $\mathscr{C}_f$ la représentation de la fonction f dans ce repère.

1. A l'aide de la calculatrice, compléter les tableaux de valeurs ci-dessous avec des valeurs arrondies au dixième :

x	-3	$-2{,}8$	$-2{,}4$	-2	-1	$-0{,}8$	0
$f(x)$							

x	$0{,}5$	$0{,}8$	1	$1{,}3$	$1{,}5$	$1{,}7$	2
$f(x)$							

2. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessus.
3. Parmi les tableaux de variations ci-dessous lequel représente le mieux la courbe $\mathscr{C}_f$:

a.

x	-3		1		2
$f(x)$	44	↘	-20	↗	39

b.

x	-3		-1		2
$f(x)$	44	↘	12	↗	39

c.

x	-3		-2		-1		1		2
$f(x)$	44	↘	7	↗	12	↘	-20	↗	39

d.

x	-3		$0{,}6$		1		$-1{,}8$		2
$f(x)$	44	↘	-20	↗	15	↘	5	↗	39

Exercice 6

Ci-dessous, sont représentés les tableaux de variations et les représentations graphiques de quatre fonctions f, g, h, j.

Associer chaque tableau de variations à la représentation graphique correspondante :

a.

x	-4		-2		1		2
Variation de f	-1	↘	-3	↗	2	↘	1

b.

x	-4		-3		1		2
Variation de g	-1	↘	-2	↗	3	↘	1

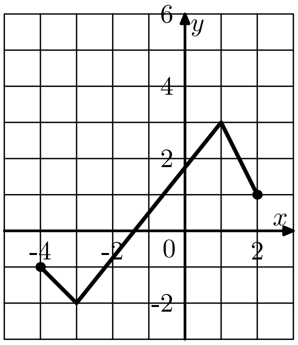
c.

x	-4		-3		1		2
Variation de h	-1	↘	-2	↗	2	↘	1

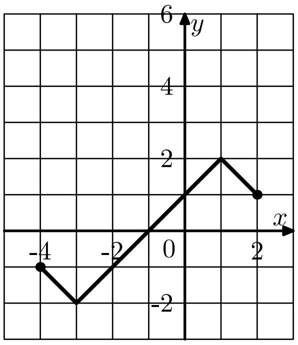
d.

x	-4		-2		1		2
Variation de j	-1	↘	-2	↗	2	↘	1

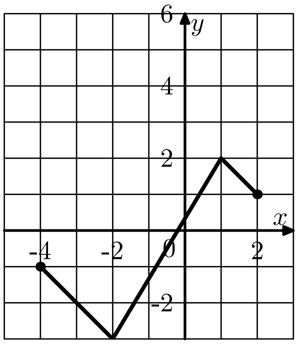
1.



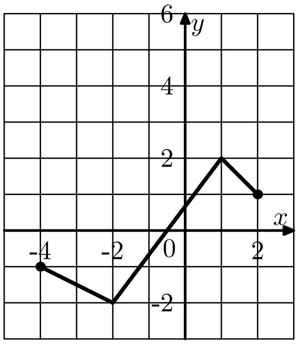
2.



3.



4.



Exercice 7

Ci-dessous, sont représentés les tableaux de variations et les représentations graphiques de trois fonctions f, g, h.

Associer chaque tableau de variations à la représentation graphique correspondante :

a.

x	-4	-2	1	2
Variation de f	-1	↘ -3	↗ 1	→ 1

b.

x	-4	-2	1	2
Variation de f	0	↗ 2	↘ 1	↗ 3

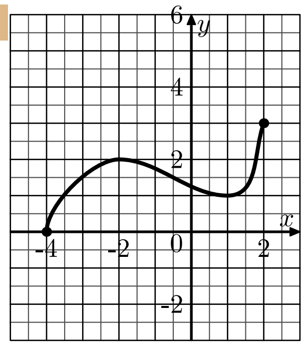
c.

x	-4	-2	0	2
Variation de f	3	↘ -2	↗ -1	↗ 1

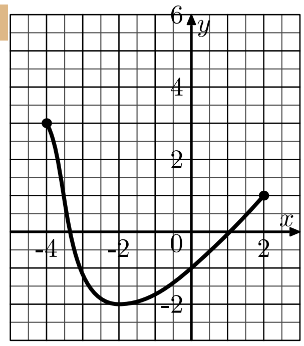
d.

x	-4	-1	0	2
Variation de f	3	↘ -2	↗ -1	↗ 1

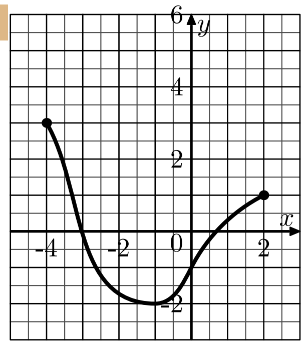
1.



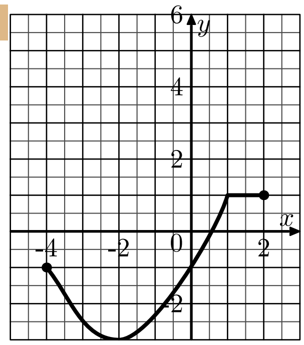
2.



3.

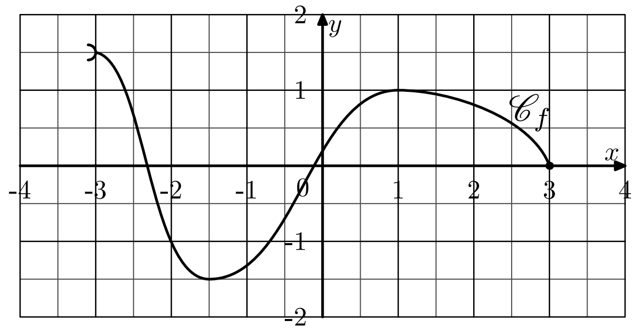


4.



Exercice 8

Dans le plan muni du repère ci-dessous, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Sens de variation et ordre :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $[-3\,;5]$ qui admet le tableau de variations ci-dessous :

x	-3	0	3	5
Variation de f	5	↘ 1	↗ 2	↘ -3

Réaliser les comparaisons des couples de nombres ci-dessous :

a. $f(0)$ et $f(1)$

b. $f(4)$ et $f(5)$

c. $f(-2)$ et $f(-1)$

d. $f(1)$ et $f(2)$

Exercice 10

On considère une fonction f définie sur $[-5\,;6]$ et qui admet le tableau de variations ci-dessous :

x	-5	-2	0	2	6
Variation de f	3 ↗	5 ↘	-4 ↗	1 ↘	-2

Comparer les nombres ci-dessous :

a. $f(-3)$ et $f(-4)$ b. $f(3)$ et $f(4)$

c. $f(-4)$ et $f(4)$ d. $f(-2)$ et $f(1)$

Exercice 11

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[-10\,;9]$ et dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-10	-4	2	6	9
Variation de f	3 ↗	4 ↘	-3 ↗	2 ↘	-1

Si possible, comparer les couples de nombres suivants :

a. $f(7)$ et $f(8)$ b. $f(-9)$ et $f(1)$

c. $f(-3)$ et $f(3)$ d. $f(-8)$ et $f(-5)$

Exercice 12

On considère la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-12	-5	$-\frac{9}{2}$	-1	0	3	6	$\sqrt{50}$
Variation de f	5 ↘	-2 ↗	2 ↗	6 ↘	3 ↘	-5 ↗	-3 ↗	0

Réaliser, si possible, la comparaison des nombres suivants :

a. $f(-3)$ et $f(-2)$ b. $f(1)$ et $f(2)$ c. $f(-5)$ et $f(3)$

d. $f(6)$ et $f(-4)$ e. $f(-4{,}75)$ et $f(7)$ f. $f(-10)$ et $f(-3)$

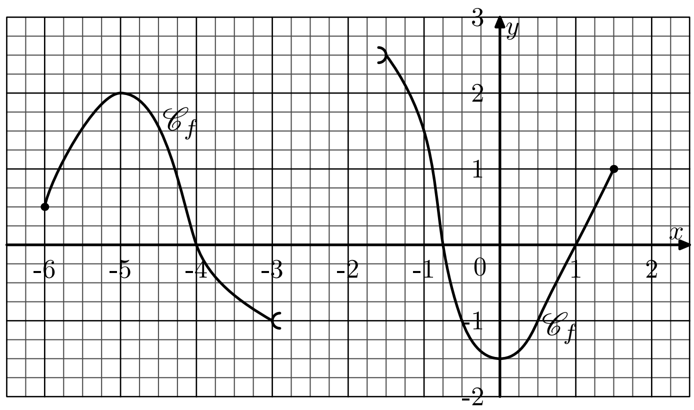
g. $f(-6)$ et $f(4)$ h. $f(7)$ et $f(-2)$

4. Maximum et minimum :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 13

Soit f une fonction dont la représentation graphique est donnée dans le repère orthonormé ci-dessous :

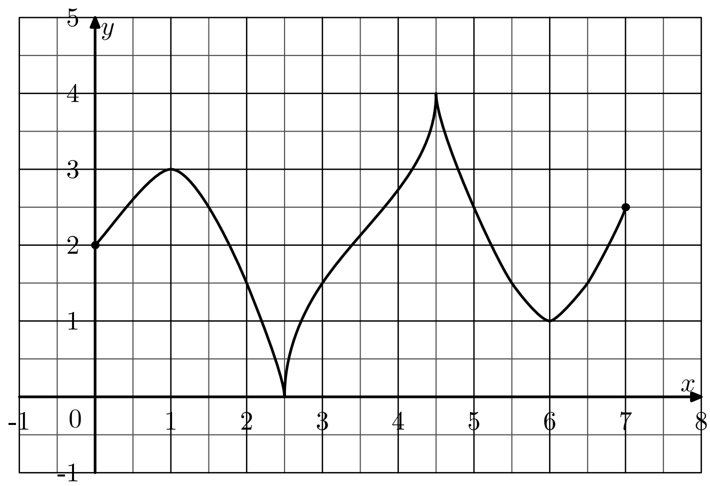


1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. a. Donner le minimun de la fonction f sur son ensemble de définition.

   b. Donner le maximun de la fonction f sur l'intervalle $[-6\,;-3[$

Exercice 14

Voici la représentation graphique d'une fonction f.



1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Donner le tableau de variations de la fonction f?
3. Quel est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{5}{2}\right]$?
4. Quel est le maximum de f sur son ensemble de définition?
5. Quel est le minimum de f sur $[0\,;7]$?

Exercice 15

Le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est représenté ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
Variation de f	5	↘	3	↗	7	↘	-4	↗	3

Pour chacune des affirmations, dire si elles sont vraies, fausses ou indécidables en justifiant à chaque fois votre réponse :

a. 3 admet le nombre -2 comme antécédent.

b. $f(1) > f(-1)$.

c. $f(2)$ est un nombre positif.

d. Le minimum de la fonction f est -4.

e. Pour $x \in]-\infty\,;0]$, on a : $f(x) \geqslant 0$

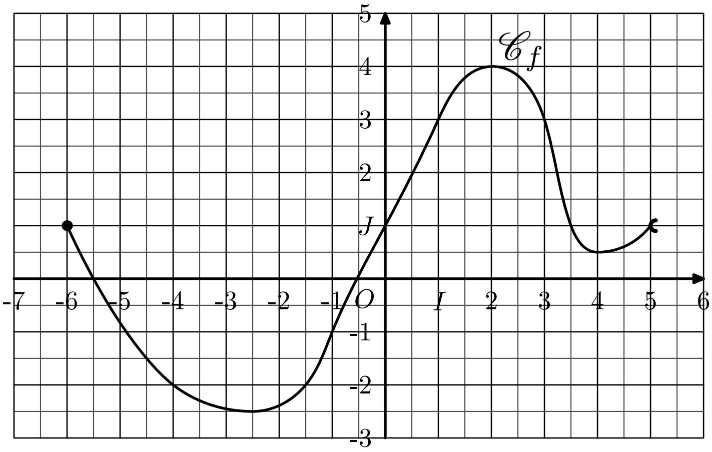
f. Le nombre 4 admet un unique antécédent.

5. *Résolution d'inéquations :*

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 16

La courbe ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f.



1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Donner, sans justification, les images par la fonction f des intervalles suivants :

   a. $[-2{,}5\,;0]$ b. $]1\,;3]$ c. $]-6\,;5[$

4. Pour chaque question, donner sans justification l'ensemble des valeurs de x vérifiant l'encadrement suivant :

   a. $3 \leqslant f(x) \leqslant 4$ b. $-3 \leqslant f(x) < 1$

6. *Image d'un intervalle :*

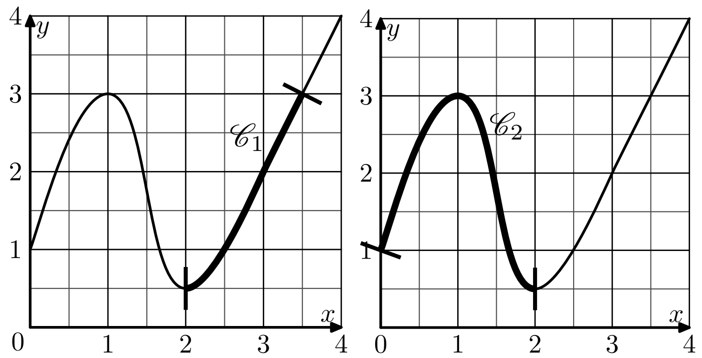
(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 17

Exemples : voici quelques animations illustrant l'image d'un intervalle par une fonction.

r513-1   r513-3   r422-1

Les deux graphiques ci-dessous présente deux parties $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de la courbe représentative d'une même fonction f.



1. a. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les abscisses des points de la partie $\mathscr{C}_1$ de la courbe.

   b. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les ordonnées des points de la partie $\mathscr{C}_1$ de la courbe.

   c. En déduire l'image de l'intervalle $[2\,;3{,}5]$ par la fonction f.

2. a. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les abscisses des points de la partie $\mathscr{C}_2$ de la courbe.

   b. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les ordonnées des points de la partie $\mathscr{C}_2$ de la courbe.

   c. En déduire l'image de l'intervalle $[0\,;2]$ par la fonction f.

Exercice 18

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;12]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-2		1		3		7		9		12
Variation de f	3	↗	5	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	3

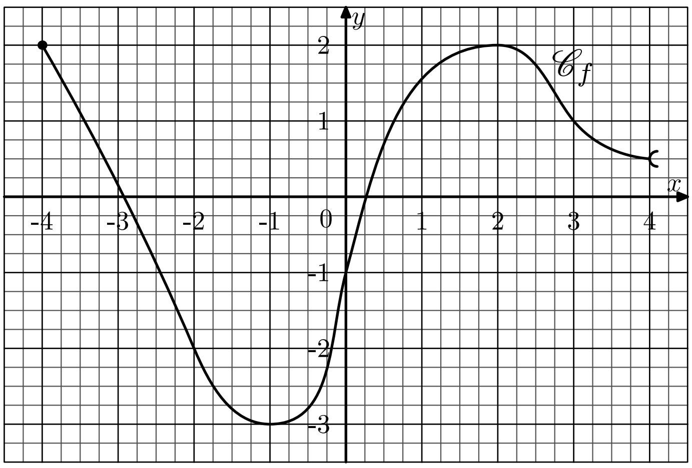
On appelle *image d'un intervalle I* par f l'ensemble formé de l'image de tous les nombres de I par la fonction f.

1. Donner, par la fonction f, l'image des intervalles :
   a. $[7\,;12]$ b. $[1\,;3]$ c. $[-2\,;1]$

2. Donner, par la fonction f, l'image des intervalles :
   a. $[-2\,;3]$ b. $[3\,;9]$ c. $[1\,;12]$

Exercice 19

Dans le plan muni du repère orthonormé ci-dessous, on considère la représentation de la fonction f donnée ci-dessous :



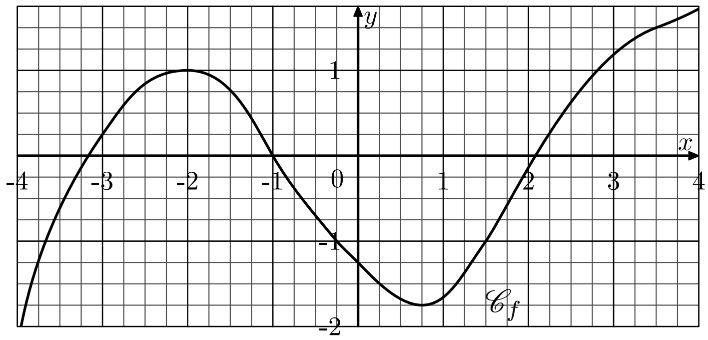
1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Donner les images des intervalles suivants :
   a. $[-4\,;-2]$ b. $[-1\,;2]$ c. $[2\,;3]$

3. Donner les images des intervalles suivants :
   a. $[-2\,;0]$ b. $[0\,;4]$ c. $[-2\,;3]$

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée dans le repère ci-dessous :



Graphiquement, déterminer l'image des intervalles suivants par la fonction f :

a. $\left[\frac{3}{2}\,;\frac{7}{2}\right]$ b. $[-1\,;0]$ c. $\left[-3\,;-\frac{1}{4}\right]$ d. $\left[-2\,;\frac{7}{2}\right]$

7. Tableau de signes :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 21

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, chacune des expressions ci-dessous garde le même signe. Donner le signe de chacune de ces expressions en justifiant votre réponse :
   a. $(x-1)^2$ b. $\dfrac{-3}{x^2+1}$ c. $\dfrac{1+x^2}{-2-x^2}$

2. Justifier que chacune des affirmations suivantes est fausse à l'aide d'un contre-exemple :
   a. L'expression $-x-3$ est négative pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   b. L'expression x^2-1 est positive pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   c. L'expression $(x+1)(x+3)$ est positive pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 22

On considère la fonction f dont le tableau de vatiation est donné ci-dessous :

x	-8	-4	$-\frac{5}{2}$	0	1	5	$\frac{17}{2}$	10	12	15
Variation de f	2 ↗	5 ↘	0 ↘	-3 ↗	0 ↗	5 ↗	7 ↘	5 ↘	0 ↘	-2

1. Parmi les tableaux ci-dessous, indiquer le tableau de signe de la fonction f :

a.

x	-8		-4		0		$\frac{17}{2}$		15
$f(x)$		$+$	5	$-$	-3	$+$	7	$-$	

b.

x	-8		$-\frac{5}{2}$		1		12		15
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

c.

x	-8		0		15
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\geqslant 0$.

Exercice 23

On considère la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-5	-3	-1	0	2	5	7	9
Variation de f	-2 ↗	0 ↗	4 ↘	1 ↗	2 ↗	5 ↘	0 ↘	-3

1. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

2. Donner l'ensemble des solutions des deux inéquations :
   - $f(x)<0$
   - $f(x)\geqslant 0$

Exercice 24

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ admettant le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Répondre aux affirmations suivantes par "*vrai*", "*faux*" ou "*on ne peut pas savoir*" :

1. $f(2)=6$.
2. L'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions.
3. La fonction f est une fonction affine.
4. Le point $A(0\,;5)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f.
5. Si $f(1)=-4$, alors le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est -4.

8. Tableau de signes et inéquations :

Exercice 25

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ admettant le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Déterminer les solutions de l'inéquation $f(x)<0$.

9. Variations et signes :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 26

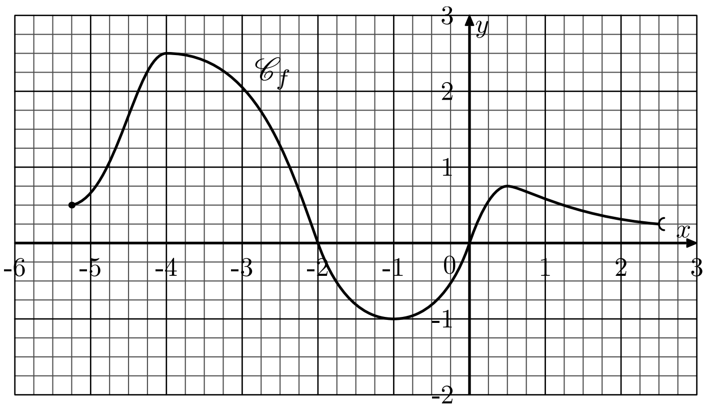
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;10]$ dont seul le tableau de variations ci-dessous est donné :

x	-2	0	3	4	7	10
Variation de f	3 ↗	8 ↘	0 ↘	-2 ↗	0 ↗	1

1. Décrire, en français, les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;10]$.
2. a. Encadrer l'image du nombre 1 par la fonction f.
   b. Encadrer l'image du nombre 6 par la fonction f.
3. a. Donner l'intervalle sur lequel la fonction f est strictement négative.
   b. Sur quel ensemble, la fonction f est-elle strictement positive?

Exercice 27

On considère une fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère orthonormé ci-dessous :



1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

Exercice 28

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;12]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-2	1	3	7	9	12
Variation de f	3 ↗	5 ↘	0 ↘	-2 ↗	0 ↗	3

1. Comparer, si possible, les nombres suivants :
   a. $f(-1)$ et $f(8)$ b. $f(2)$ et $f(5)$ c. $f(0)$ et $f(10)$
2. Donner, par la fonction f, l'image des intervalles :
   a. $[1\,;3]$ b. $[1\,;12]$
3. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

Exercice 29

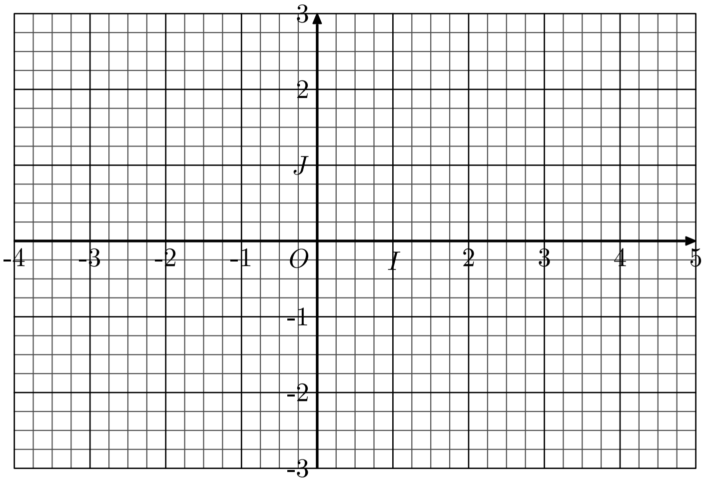
On considère une fonction f vérifiant chacune des assertions suivantes :

- La fonction est définie sur $]-3{,}5\,;4]$.
- Elle est strictement croissante sur $]-3{,}5\,;-1]$ et strictement décroissante sur $[-1\,;4]$;
- Le nombre 2 possède un unique antécédent ;
- L'équation $f(x)\geqslant 0$ admet pour ensemble de solutions l'intervalle $[-2\,;1]$.

1. Donner les antécédents de 0 par la fonction f.
2. Quel est le maximum de la fonction f? Pour quelle valeur

est-il atteint?

3. Tracer, à main levée, une courbe pouvant représenter la fonction f dans le repère $(O;I;J)$ orthonormée ci-dessous :



10. Etude de fonctions et tableaux de variations :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 30

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $\left[-7\,;\sqrt{31}\right]$ dont seul le tableau de variations ci-dessous est donné :

x	-7	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$	2	5	$\sqrt{31}$
Variation de f	7 ↘	3 ↘	0 ↘	-2 ↗	0 ↗	3 ↗	4 ↘	$\frac{10}{3}$

1. a. Donner, si possible, l'ensemble des antécédents du nombre 0 par la fonction f.
   b. Donner le tableau de signes de la fonction f.
2. Résoudre l'inéquation : $f(x)\geqslant 3$.
3. Donner le maximum et le minimum de la fonction f ainsi que les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

Exercice 31

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;6]$ dont le tableau de variations est représenté ci-dessous :

x	-10	-2	0	6
Variation de f	5 ↘	3 ↗	7 ↘	-4

Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si celles-ci sont vraies, fausses ou indécidables en justifiant, à chaque fois, votre pensée :

a. $f(-10)<f(-1)$
b. Le minimum de f est atteint en -2
c. $f(1)<f\left(\sqrt{2}\right)$
d. $f(1)$ est un nombre positif

11. Etude algébrique :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 32

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{-x^2+4x-2}{x^2-4x+5}$$

1. A l'aide de la calculatrice, donner les extrémums de cette fonction.
2. a. Etablir l'égalité : $f(x)=\dfrac{3}{1+(x-2)^2}-1$
   b. Justifier l'inégalité : $\dfrac{3}{1+(x-2)^2}\leqslant 3$.
   c. Retrouver le résultat de la question 1..

12. Partage :

Exercice 33

On considère la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-5	-3	-1	0	2	5	7	9
Variation de f	-2 ↗	0 ↗	4 ↘	1 ↗	2 ↗	5 ↘	0 ↘	-3

1. Déterminer les images des intervalles suivants par la fonction f :

a. $[-5\,;-3]$ b. $[-1\,;0]$ c. $[2\,;9]$

2. Comparer, si possible, les couples de nombres suivants :

a. $f(-4)\,;\,f(-2)$ b. $f(6)\,;\,f(8)$ c. $f(1)\,;\,f(8)$

d. $f(3)\,;\,f(4)$ e. $f\left(-\frac{2}{3}\right)\ ;\ f\left(-\frac{1}{2}\right)$ f. $f(-2)\,;\,f(3)$

3. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

4. Sans justification, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=4$.

13. Exercices non-classés :

Exercice 34

On considère la fonction f dont voici le tableau de variations :

x	-3		0		2		5
Variation de f	‖ $+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-1

1. Dire si les assertions suivantes sont vraies, fausses ou indécidables. Dans chaque cas, justifier votre affirmation :

a. $\mathcal{D}_f = [-2\,;+\infty[$

b. Le nombre 2, par la fonction f, n'admet qu'un antécédent.

c. f est bornée sur son ensemble de définition.

d. L'image de 4 est un nombre négatif.

2. On donne les informations suivantes à propos de la fonction f : l'image de -1 *(resp. 3)* par la fonction f est 3 *(resp. 0)*.

Donner, sans justification, l'image des intervalles ci-dessous par la fonction f :

a. $[0\,;\,5]$ b. $[-1\,;\,2]$ c. $]-3\,;3[$