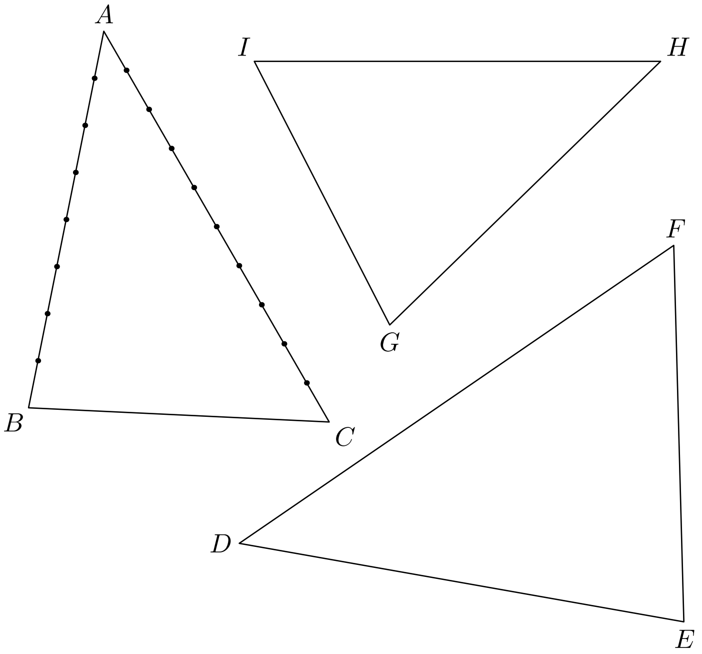
Hors programme collège/Théorème des milieux

1. Activité d'introduction :

Exercice 1

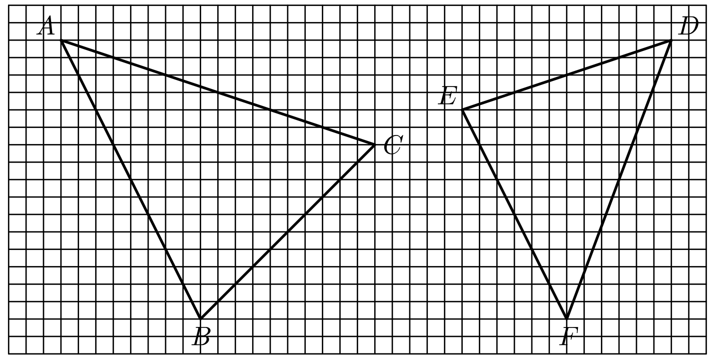
On considère les trois triangles ABC, DEF et GHI représentés ci-dessous :



1. Les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle ABC ont été partagés en part égales.
   a. Placer le point J milieu du segment $[AB]$ et K milieu du segment $[AC]$.
   b. Qu'observe-t-on à propos des droites (BC) et (JK)? A propos des longueurs JK et BC?
2. a. A l'aide de la règle gradué, placer les points L et M milieux respectifs des segments $[DE]$ et $[DF]$.
   b. Qu'observe-t-on à propos des droites (EF) et (LM)? A propos des longueurs EF et LM?
3. En traçant les médatrices des segments $[GH]$ et $[GI]$, quelles observations peut-on faire sur la droite reliant les milieux de deux des côtés du triangle GHI et du troisième côtés.

Exercice 2

Dans le plan quadrillé, on considère les triangles ABC et EDF représentés ci-dessous :



On se servira du quadrillage pour placer les nouveaux points de la figure et pour construire les droites parallèles.

1. a. Placer le point I milieu du segment $[AB]$.
   b. Tracer la droite (d) passant par le point I et parallèle à la droite (BC). Nommer J le point d'intersection des droites (d) et (AC).
   c. Vérifier que le point J est le milieu des segments $[AC]$.
   d. A l'aide du compas, vérifier que le segment $[IJ]$ mesure la moitié du segment $[BC]$.
2. a. Placer le point K milieu du segment $[DE]$.
   b. Tracer la droite (Δ) passant par le point K et parallèle à la droite (EF). Nommer L le point d'intersection des droites $[DF]$ et (Δ).
   c. Vérifier que le point L est le milieu des segments $[DF]$.
   d. A l'aide du compas, vérifier que l'égalité suivante : $EF = 2 \times KL$

2. Théorème des milieux : parallélisme :

Exercice 3

Soit ABC un triangle quelconque. Soient I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$

1. Effectuer le tracé d'une figure représentant cette situation.
2. Placer le point M symétrique du point I par rapport au point J. Démontrer que le quadrilatère $AMCI$ est un parallélogramme
3. a. Démontrer que : $IB = MC$
   b. Démontrer que $IMCB$ est un parallélogramme en utilisant la propriété suivante :

> **Si** un quadrilatère a deux de ses côtés opposés parallèles et de même longueur **Alors** c'est un parallélogramme

4. a. En déduire que $(IM)/\!/(BC)$? Que peut-on dire des droites (IJ) et (BC)?

b. Recopier et compléter la phrase suivante :

Dans un triangle quelconque, **Si** une droite passe par les .... de deux des côtés **Alors** elle est .... au ....

5. a. Prouver que $IM{=}BC$. Que peut-on dire des longueurs IJ et BC?

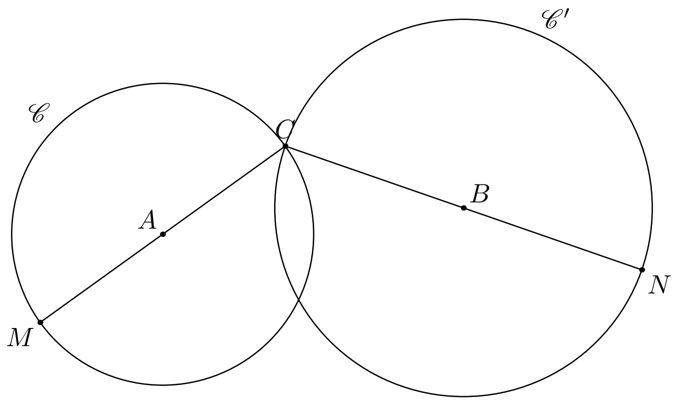
b. Recopier et compléter la phrase suivante :

Dans un triangle quelconque, **Si** un segment a pour extrémités les .... de deux des côtés du triangle **alors** sa longueur est .... celle du troisième côté.

Exercice 4

On considère deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre respectif A et B s'interseptant : C est l'un de ces points d'intersection.
M et N sont deux points tels que $[CM]$ et $[CN]$ forment deux diamètres respectivement de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

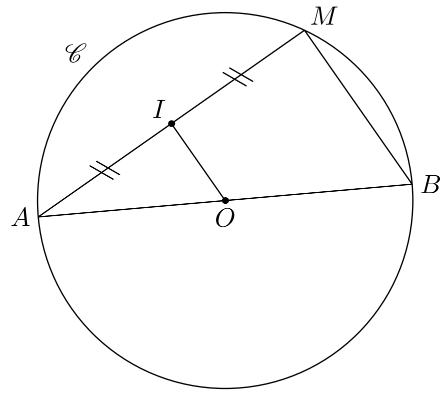
Montrer que les droites (AB) et (MN) sont parallèles.



Exercice 5

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre $[AB]$.
Soit M un point du cercle distinct de A et de B.
On note I le milieu de $[AM]$.

Montrer que les droites (IO) et (BM) sont parallèles.



Exercice 6

Soit ABC un triangle. On note I le milieu du segment $[AB]$, J milieu de $[BC]$ et K milieu de $[AC]$.

1. Déterminer la nature du quadrilatère $AIJK$.

2. Supposons dans cette question que le triangle ABC est rectangle en A. Déterminer la nature de $AIJK$.

3. Théorème des milieux : longueurs :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 7

Soit A, B, C trois points du plan tels que :
$AB = 6\,cm$; $BC = 3\,cm$

1. Compléter correctement les phrases suivantes :

a. La longueur AB est .... de la longueur BC.

b. La longueur BC est .... de la longueur AB.

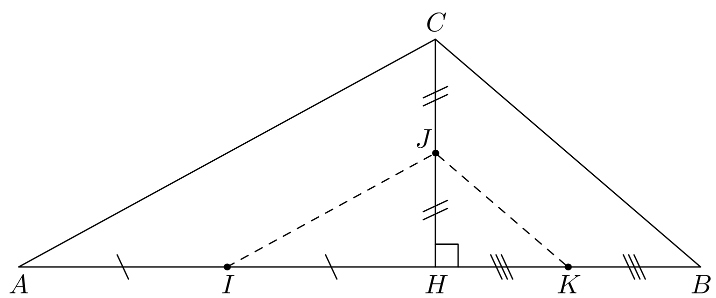
2. Compléter en choisissant correctement le facteur manquant :

a. $AB = \ldots\ldots \times BC$

b. $BC = \ldots\ldots \times AB$

Exercice 8

On considère un triangle ABC quelconque. On note H le pied de sa hauteur issue du point C. On note I, J, K respectivement les milieux des segments $[AH]$, $[CH]$ et $[BH]$.



Démontrer que le triangle IJK est une réduction de facteur de $\dfrac{1}{2}$ du triangle ABC.

Exercice 9

Soit un parallélogramme $ABCD$. Soit O le milieu de $[BD]$, I le milieu de $[AD]$, J le milieu de $[BC]$.

1. Démontrer que (OI) est parallèle à (AB).

2. Démontrer que (OJ) est parallèle à (AB).

3. Démontrer que O, I, J sont alignés.

Question facultative :

4. Que représente O pour le segment $[IJ]$?

4. Réciproque du théorème des milieux :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 10

On considère :

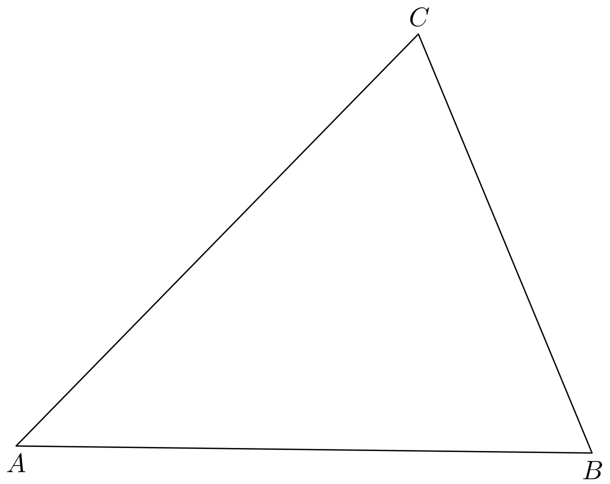
- ABC un triangle quelconque ;
- I le milieu $[AB]$;
- la droite (d) telle que $\quad I \in (d) \quad$ et $\quad (d) /\!/ (BC)$;
- J le point d'intersection des droites (d) et (AC).

1. Effectuer le tracé d'une figure représentant cette situation.
2. On note K le milieu du segment $[BC]$.
   Démontrer que : $\quad (AC) /\!/ (IK)$.
3. Démontrer que $IJCK$ est un parallélogramme.
4. Démontrer que : $\quad IK = JC$
5. Démontrer que : $\quad IK = \frac{1}{2} \times AC$.
6. En déduire que le point J est le milieu de $[AC]$.
7. Recopier et compléter la phrase suivante :

Si une droite passe par le .... d'un côté d'un triangle et est .... à un deuxième côté **alors** cette droite passe par le .... du troisième côté

Exercice 11

On considère le triangle ABC représenté ci-dessous :



1. Réaliser le programme de tracé suivant :

   a. Placer le point I milieu du segment $[BC]$.

   b. Tracer le segment $[AI]$ et y placer le point J milieu du segment $[AI]$.

   c. La droite (BJ) intercepte la droite (AC) au point K.

   d. La droite parallèle à la droite (BK) passant par le point I intercepte la droite (AC) au point L

2. Démontrer que le point L est le milieu du segment $[KC]$.
3. Démontrer que le point K est le milieu du segment $[AL]$.
4. Justifier que le segment $[AC]$ est partagé en trois parts égales.

Exercice 12

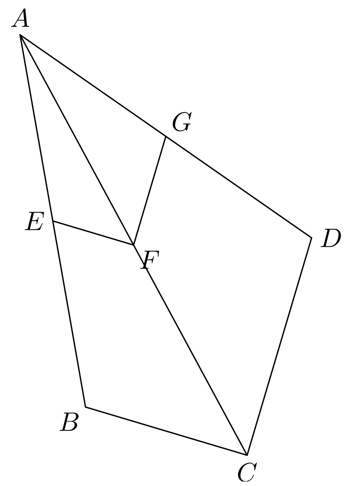
On considère les deux triangles ABC et ACD.

E est le milieu de $[AB]$.

On trace la parallèle à (BC) passant par E, elle coupe $[AC]$ en F.

On trace la parallèle à (CD) passant par F, elle coupe $[AD]$ en G.

Montrer que les droites (EG) et (BD) sont parallèles.



Exercice 13

Soit un triangle ABC rectangle en A. La médiatrice de $[AB]$ coupe $[AB]$ en M et $[BC]$ en O.

1. Démontrer que (OM) est parallèle à (AC).
2. Démontrer que O est le milieu de $[BC]$.
3. Démontrer que $OA = OB = OC$. En déduire que le cerlce passant par A, B, C a pour centre O.
4. Compléter la phrase suivante :

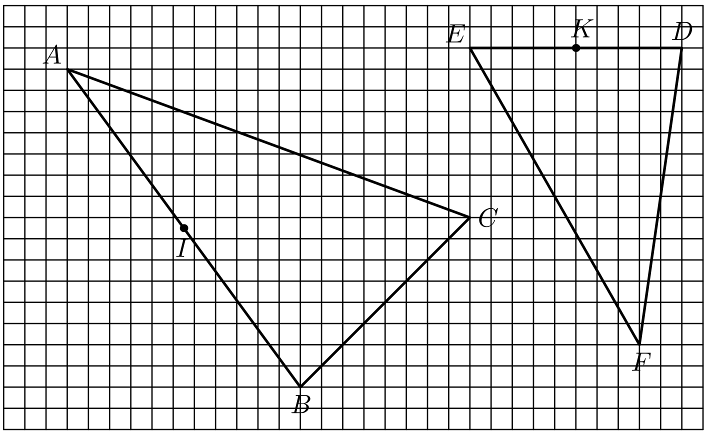
Si un triangle est rectangle alors le centre de son cercle circonscrit est ....

5. Théorème et réciproque :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 14

Dans le quadrillage ci-dessous, on considère les deux triangles ABC et DEF :



Pour les questions suivantes, seule la règle non-graduée est autorisée ; les tracés doivent être suivis de justification.

1. Placer le milieu J du segment $[AC]$.
2. Tracer la droite parallèle à la droite (EF) et passant par le point K.

Exercice 15

Dans le plan, on considère un triangle ABC dont les dimensions sont :

$AB = 6\,cm$; $AC = 9\,cm$; $\widehat{BAC} = 60^o$

On note I et J les deux points de la demi-droite $[AB)$ vérifiant les mesures :

$AI = 2\,cm$; $AJ = 4\,cm$

On note K et L les deux points de la demi-droite $[AC)$ vérifiant les mesures :

$AK = 3\,cm$; $AL = 6\,cm$

On note M le point d'intersection des droites (JL) et (BK).

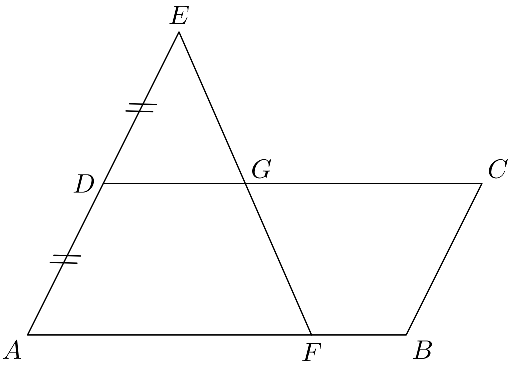
1. Effectuer le tracé de cette configuration.
2. Montrer que les droites (IK) et (JL) sont parallèles.
3. Justifier que le point M est le milieu du segment $[BK]$.
4. Montrer que la droite (JL) est parallèle à la droite (BC).
5. En déduire que (IK) est parallèle à (BC).

Exercice 16

On considère le parallèlogramme $ABCD$ et le point E tel que D soit le milieu de $[AE]$.

Soit F un point du segment $[AB]$ tel que : $AF = \frac{3}{4} \times AB$.

La droite (EF) intercepte le segment $[DC]$ en G.



1. Montrer que G est le milieu de $[EF]$.
2. Sachant que $DC = 5\,cm$, en déduire la mesure du segment $[DG]$

Exercice 17

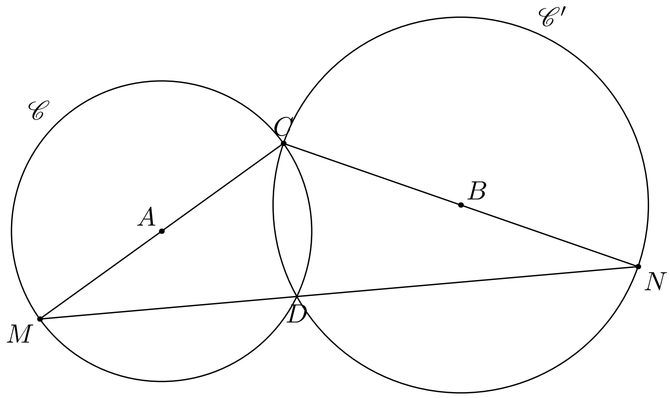
On considère deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre respectif A et B s'interseptant aux points C et D.

M et N sont deux points tels que $[CM]$ et $[CN]$ forment deux diamètres respectivement de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

1. Montrer que les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

On note I le point d'intersection des droites (AB) et (CD)

2. Montrer que le point I est le milieu du segment $[CD]$.
3. Montrer que les droites (AI) et (MD) sont parallèles.
4. Montrer que les droites (IB) et (DN) sont parallèles.
5. En déduire que les points M, D et N sont alignés.
(on se servira de la propriété : si deux droites sont parallèles et ont un point commun alors ces deux droites sont confondus)



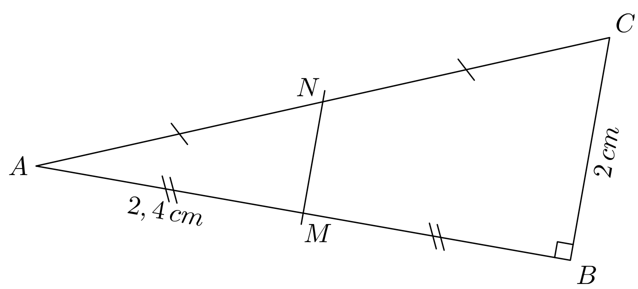
6. Théorème des milieux et du théorème de Pythagore :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 18

On considère le triangle ABC représenté ci-dessous où le point M est le milieu du segment $[AB]$ et le point N est le milieu du segment $[AC]$. On a les deux mesures suivantes :

$AM = 2{,}4\,cm$; $BC = 2\,cm$



1. a. Etablir que les droites (MN) et (BC) sont paral-

lèles.

(b.) Déterminer la mesure du segment $[MN]$.

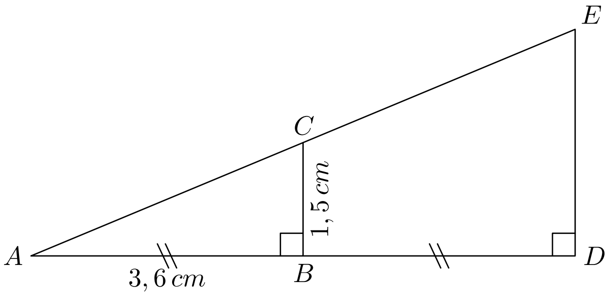
(c.) Justifier que le triangle AMN est rectangle en M.

2. Déterminer la mesure du segment $[AN]$.

7. Réciproque du théorème des milieux et du théorème de Pythagore : (+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 19

On considère le triangle ADE est rectangle en D où B est le milieu du segment $[AD]$. La droite perpendiculaire à (AD) et passant par le point B intercepte en C la droite (AE) :



1. Démontrer que $ED = 3\,cm$.
2. Déterminer la longueur du segment $[AE]$.
3. (a.) Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC.
   (b.) Déterminer l'aire $\mathcal{A}'$ du triangle ADE.
   (c.) Donner la valeur du quotient $\dfrac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}}$.

8. Exercices sans indications : (+3 exercices pour les enseignants)

Remarque : Ces exercices sont plus difficiles compte tenu de l'absence de questions intermédiaires

Exercice 20

On considère un trapèze $ABCD$ tel que $(AB)/\!/(CD)$. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[BD]$ et $[BC]$.

1. Réaliser cette figure.
2. Montrer que la droite (IK) est parallèle à la droite (AB).

10. Exercices non-classés : (+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 21

Dans le plan, on considère un triangle ABC dont les dimensions sont :

$AB = 6\,cm$; $AC = 9\,cm$; $\widehat{ABC} = 60^o$

On note I et J les deux points de la demi-droite $[AB)$ vérifiant les mesures :

$AI = 2\,cm$; $AJ = 4\,cm$

On note K et L les deux points de la demi-droite $[AC)$ vérifiant les mesures :

$AK = 3\,cm$; $AL = 6\,cm$

On note M le point d'intersection des droites (JL) et (BK).

1. Réaliser le dessin de cette configuration.
2. Montrer que les droites (IK) et (JL) sont parallèles.
3. Justifier que le point M est le milieu du segment $[BK]$.
4. Montrer que la droite (JL) est parallèle à la droite (BC).
5. En déduire que (IK) est parallèle à (BC).