Hors programme lycée/Bernoulli et loi binomiale

1. Intervalle de confiance et de fluctuation :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 1

On considère une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 9 et 0,3 : $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(9\,;0{,}3)$

Le tableau ci-dessous donne des informations sur la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,04	0,196	0,463	0,73	0,901	0,975	0,996	1,0	1,0	1,0

Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a au moins 95 % de chance de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;5]$.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 9 et 0,5 : $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(9\,;0{,}5)$

Le tableau ci-dessous donne des informations sur la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,002	0,02	0,09	0,254	0,5	0,746	0,91	0,98	0,998	1,0

1. Pour quelles valeurs de k a-t-on : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)>0{,}025$?
2. Pour quelles valeurs de k a-t-on : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)\geqslant 0{,}975$?
3. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ au moins 95 % de chance de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[2\,;7]$.

Exercice 3

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 30 et 0,32 : $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(30\,;0{,}32)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0	0	0,001	0,005	0,018	0,049	0,11	0,208	0,341

k	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,494	0,645	0,774	0,871	0,934	0,97	0,988	0,995	0,999

k	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

1. Déterminer les plus petits entiers a et b tels que :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a) > 0{,}025$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}975$
2. Justifier que : $\mathcal{P}(a\leqslant \mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}95$
3. En notant $F=\dfrac{\mathcal{X}}{30}$ la variable aléatoire qui représente la fréquence aléatoire du succès. Justifier que :
   $\mathcal{P}\Big(\dfrac{a}{30}\leqslant F\leqslant \dfrac{b}{30}\Big) \geqslant 0{,}95$

Exercice 4

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 100 et 0,35 $(\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(100\,;0{,}35))$.

Les questions suivantes sont à traiter à l'aide de la calculatrice et les résultats doivent être donnés, si nécessaire, au millième près :

1. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=43)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 38)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 31)$
2. a. Déterminer la valeur des plus petits entiers a et b vérifiant les deux conditions suivantes :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a) > 0{,}025$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}975$
   b. Donner l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence associée à la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice 5

Une société affirme que 80 % de ses clients sont satisfaits par ses produits.

1. Une association de consommateurs souhaite vérifier cette allégation et commande une étude portant sur 50 clients de cette société.
   a. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.
   b. L'étude obtient un taux de satisfaction de 71 %. Selon cette étude, que peut-on dire de l'affirmation de la société au seuil de 5 %?
2. L'association renouvelle son étude qui porte cette fois sur 100 clients. Cette nouvelle étude obtient toujours un taux de satisfaction de 71 %.
   Que peut-on dire de l'affirmation de la société au seuil de 5 %.

Exercice 6

Un agriculture conditionne ses tomates en fonction de leur taille *(calibre)*. A ses fournisseurs, il annonce que 40 % de ses tomates ont un calibre supérieur ou égal à 6 *(un diamètre supérieur à 47 mm)*.

Se rendant dans l'exploitation, un fournisseur prélève 30 tomates et observent que, parmi elles, 10 tomates sont d'un calibre supérieur ou égal à 6.

L1	L2
0	2.2E-7
1	4.6E-6
2	4.7E-5
3	3.1E-4
4	0.0015
5	0.0057
6	0.0172
7	0.0435
8	0.094
9	0.1763
10	0.2915
11	0.4311
12	0.5785
13	0.7145
14	0.8246
15	0.9029
16	0.9519
17	0.9788
18	0.9917
19	0.9971
20	0.9991
21	0.9998
22	1
23	1
24	1
25	1
26	1
27	1
28	1
29	1
30	1
------	------

Ci-contre est donnée la loi cumulative d'une variable aléatoire binomiale de paramètres 30 et 0,4. On peut y extraire les résultats ci-dessous :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 10)\approx 0{,}2915$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 20)\approx 0{,}9991$

1. a. Déterminer la valeur du plus petit entier a réalisant la condition :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a) > 0{,}025$
   b. Déterminer la valeur du plus petit entier b réalisant la condition :

$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant b) \geqslant 0{,}975$

c. En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence observée pour la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

(on arrondira les bornes à 10^{-3})

2. Que peut-on dire de l'observation du fournisseur?

2. Anciennes annales (programme antérieur à 2011) :

Exercice 7

Un joueur dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et n boules vertes $(0 \leqslant n \leqslant 10)$. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Le joueur tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évèments suivants :

   a. R : "*La boule tirée est rouge*" ;

   b. B : "*la boule tirée est blanche*" ;

   c. V : "*la boule tirée est verte*".

2. Le joueur décide de jouer une partie. Celle-ci se déroule de la manière indiquée ci-dessous.
   Le joueur tire une boule de l'urne :
   - Si elle est rouge, il gagne 16 F ;
   - Si elle est blanche, il perd 12 F ;
   - Si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire une boule de l'urne ;
     - Si cette boule est rouge, il gagne 8 F ;
     - Si cette boule est blanche, il perd 2 F ;
     - Si cette boule est verte, il ne perd rien ni ne gagne rien.

   Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont indépendants. Au début de la partie, le joueur possède 12 F. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que le joueur possède à l'issue de la partie *(un tirage ou deux tirages selon le cas)*.

   a. Déterminer les valeurs prises par $\mathcal{X}$.

   b. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

   c. Montrer que l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$ a pour valeur : $E(\mathcal{X}) = 12 + 16 \cdot \dfrac{n}{(n+7)^2}$.

3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x+7)^2}$. Etudier les variations de f.

4. En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique $\mathcal{X}$ est maximale. Calculer cette valeur maximale *(on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible)*.

3. Loi géométrique tronquée :

Exercice 8

On considère l'expérience aléatoire suivante qui consiste à lancer un dé 5 fois successivement *(et de manière indépendante)* et de noter le numéro de lancer où la face 6 est apparu la première fois.
Si la face 6 n'est pas apparu lors de ces 5 lancers alors on note 0.

1. Construire l'arbre de probabilité associé à cette expérience aléatoire.

2. On considère la variable aléatoire qui associe à chaque épreuve de l'expérience aléatoire associe le nombre noté.

   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

4. Loi binomiale : intervalle fluctuation :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 9

On considère une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres 9 et 0,3 : $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(9\,;0{,}3)$

Le tableau ci-dessous donne des informations sur la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant k)$	0,04	0,196	0,463	0,73	0,901	0,975	0,996	1,0	1,0	1,0

Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a au moins 95 % de chance de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;5]$.

Exercice 10

On considère une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres 9 et 0,5 : $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(9\,;0{,}5)$

Les deux tableau ci-dessous donne des informations sur la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant k)$	0,002	0,02	0,09	0,254	0,5	0,746	0,91	0,98	0,998	1,0

1. Pour quelles valeurs de k a-t-on : $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant k) > 0{,}025$?

2. Pour quelles valeurs de k a-t-on : $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant k) \geqslant 0{,}975$?

3. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ au moins 95 % de chance de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[2\,;7]$.

Exercice 11

Un agriculture conditionne ses tomates en fonction de leur taille *(calibre)*. A ses fournisseurs, il annonce que 40 % de ses tomates ont un calibre supérieur ou égal à 6 *(un diamètre supérieur à 47 mm)*.

Se rendant dans l'exploitation, un fournisseur prélève 30 tomates et observent que, parmi elles, 10 tomates sont d'un calibre supérieur ou égal à 6.

L1	L2
0	2.2E-7
1	4.6E-6
2	4.7E-5
3	3.1E-4
4	0.0015
5	0.0057
6	0.0172
7	0.0435
8	0.094
9	0.1763
10	0.2915
11	0.4311
12	0.5785
13	0.7145
14	0.8246
15	0.9029
16	0.9519
17	0.9788
18	0.9917
19	0.9971
20	0.9991
21	0.9998
22	1
23	1
24	1
25	1
26	1
27	1
28	1
29	1
30	1
------	------

Ci-contre est donnée la loi cumulative d'une variable aléatoire binomiale de paramètres 30 et 0,4. On peut y extraire les résultats ci-dessous :

$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 10) \approx 0{,}2915$; $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 20) \approx 0{,}9991$

1. a. Déterminer la valeur du plus petit entier a réalisant la condition :

$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant a) > 0{,}025$

b. Déterminer la valeur du plus petit entier b réalisant la condition :

$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant b) \geqslant 0{,}975$

c. En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence observée pour la variable aléatoire $\mathcal{X}$. *(on arrondira les bornes à 10^{-3})*

2. Que peut-on dire de l'observation du fournisseur?

Exercice 12

Lors d'une fête foraine, une loterie est organisée toutes les heures. A chaque fois, trente billets sont vendus parmi lesquels dix sont gagnants *(on afmet que tous les billets ont la même probabilité d'être achetés.)*.

On donnera pour chaque résultat la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au millième.

1. Luc achète un billet. Quelle est la probabilité que ce billet soit gagnant?

2. Marc participe à trois loteries consécutives pour lesquelles il prend à chaque fois un billet *(on admet que les loteries sont indépendantes)*. Quelle est la probabilité que Marc ait au moins un billet gagnant?

3. Pierre participe à une loterie, il achète simultanément trois billets.

a. Quelle est la probabilité que Pierre n'ait pas de billet gagnant?

b. Quelle est la probabilité que Pierre ait au moins un billet gagnant?

4. Qui de Pierre ou de Marc a le plus de chances d'avoir au moins un bilet gagnant?

5. La publicité annonce "*Un billet sur trois est gagnant! Achetez trois billets!*". Ce texte suffère que, en achetant trois billets, on est sûr de gagner.
Que peut-on dire de cette propriété?

6. Exercices non-classés : *(+1 exercice pour les enseignants)*

Exercice 13

Les résultats approchés sont à arrondir au millième.

Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique.

On prélève au hasard 100 clés dans la production de la journée pour vérification. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 clés.

On admet que la probabilité qu'une clé USB prélevée au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est égale à 0,015.
On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de clés défectueuses de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer les probabilités $p(\mathcal{X}=0)$ et $p(\mathcal{X}=1)$.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux clés soient défectueuses.

Exercice 14

Les résultats d'une enquête menée auprès d'une population dont 52% des personnes sont des femmes et 48% des hommes, montrent que 80% des femmes et 70% des hommes jouent au Loto au moins une fois par mois.

1. On choisit au hasard un individu de cette population. Tous les choix sont équiprobables.

On note :

- H : l'événement "*L'individu choisi est un homme.*"
- $\overline{H}$ l'événement contraire de H, c'est-à-dire "*L'individu choisi est une femme.*"
- L l'événement "*L'individu joue au Loto au moins une fois par moi.*"
- $\overline{L}$ l'événement contraire de L, c'est-à-dire "*L'individu joue au Loto moins d'une fois par mois.*".
- $P_H(L)$ la probabilité conditionnelle de l'événement L par rapport à l'événement H.

On pourra représenter un arbre de probabilités.

a. Calculer la probabilité de l'événement $H \cap \overline{L}$ puis celle de l'événement $\overline{H} \cap \overline{L}$.

b. Montrer que la probabilité de L est égale à 0,752.

c. Déterminer $\mathcal{P}_L(H)$, probabilité que l'individu choisi soit un homme sachant qu'il joue au moins une fois par mois au Loto. Donner le résultat arrondi à 10^{-4}

2. Cette population étant suffisamment nombreuse, on répète quatre fois, de manière indépendante, dans des conditions identiques *(ou que l'on peut considérer comme telles)*, l'expérience de la première question "*Choisir au* *hasard un individu de cette population*".

a. Déterminer la probabilité qu'un et un seul des quatre individus choisis joue au moins une fois par mois au Loto, les autres jouant moins d'une fois par mois. Donner le résultat arrondi à 10^{-4}.

b. Déterminer la probabilité qu'un, au moins, des quatre individus choisis joue au Loto au moins une fois par mois. Donner le résultat arrondi à 10^{-4}

Exercice 15

On donnera tous les résultats sou forme de fractions irréductibles.

On dispose d'un damier dont chacune des neuf cases est marquée d'un des trois nombres 1, 2, 3 selon le schéma ci-contre :

On répartit au hasard trois pions indiscernables sur le damier *(un pion par case)* et on appelle S la somme des trois nombres marqués sur les trois cases occupées par les pions. Les répartitions sont toutes équiprobables.

1. Ecrire le triangle de Pascal jusqu'à la dixième ligne et en déduire $\binom{9}{3}$

2. On considère les événements E, F et G suivants :
   - E : "*La somme S est égale à 3*" ;
   - F : "*La somme S est égale à 9*" ;
   - G : "*La somme S est éggle à 6*"

   a. Déterminer les probabilités $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(F)$ des événements E et F.

   b. Montrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\dfrac{1}{3}$

3. Soit A l'événement "*La somme est divisible par 3*" et B l'événement "*Les trois pions sont alignés en colonne, en ligne ou en diagonale*".

   a. Déterminer la probabilité $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ des événements A et B

   b. Calculer la probabilité $\mathcal{P}_A(B)$ de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.

   c. Les événements A et B sont-ils indépendants

Exercice 16

Pour engager du personnel, une entreprise organise des tests de sélection.
Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves, il y a 60 % d'hommes.
Une étude statistique montre que l'entreprise engage 70 % des hommes candidats et 80 % des femmes candidates.

Rappel : La probabilité conditionnelle de A sachant B est :
$$\mathcal{P}_B(A) = \frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

Partie A

A l'issue des test, on interroge une personne au hasard parmi tous les candidats. On note :

- H l'événement "*la personne est un homme*".
- F l'événement "*la personne est une femme*".
- E l'événement "*la personne est engagée*".
- $\overline{E}$ l'événement complémentaire *(ou contraire)* de E.

1. a. Quelle est la probabilité $\mathcal{P}(F)$ que la personne interrogé soit une femme?

   b. Quelle est la probabilité que la personne interrogée ne soit pas engagée, sachant que c'est une femme?

2. Construire un arbre de probabilité illustrant cette situation.

3. Calculer la probabilité $\mathcal{P}(\overline{E}\cap F)$ que la personne interrogée soit une femme et qu'elle ne soit pas engagée.

4. Montrer que : $\mathcal{P}(\overline{E}) = 0{,}26$

Partie B

Dans cette partie les résultats seront donnés sous forme de valeurs approchées arrondies au millième.
A l'issue des test on interroge 4 personnes au hasard. On considérera que ces 4 choix sont deux à deux indépendants.

1. Quelle est la probabilité qu'aucune des 4 personnes ne soit engagée?

2. Quelle est la probabilité qu'au moins une des 4 personnes ne soit pas engagée?

3. Quelle est la probabilité que 2 personnes exactement soient engagées?

Exercice 17

Amélie doit traverser la rue principale d'un village qui est jalonnée de deux feux tricolores.

Pour $n\in\{1\,;2\}$, on note E_n l'évènement "*Amélie est arrétée par le n^e feu rouge ou orange*" et $\overline{E_n}$ l'évènement contraire. Le feu orange est considéré comme un feu rouge.

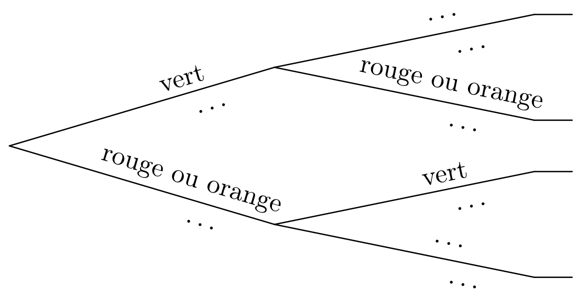
Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E_n}$. La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\dfrac{1}{8}$

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- La probabilité que le second feu tricolore soit rouge ou orange, si le premier feu est rouge, vaut $\dfrac{1}{20}$.
- La probabilité que le seond feu tricolore soit rouge ou orange, si le premier feu est vert, est égale à $\dfrac{9}{20}$.

On s'intéresse, tout d'abord, aux premiers feux tricolores.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.