Hors programme lycée/Fonctions associées et composée de fonctions

1. Introduction de composée :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 1

Soit f la fonction définie dont l'image de x est définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

1. Etablir l'égalité suivante : $\dfrac{x-1}{x-2} = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

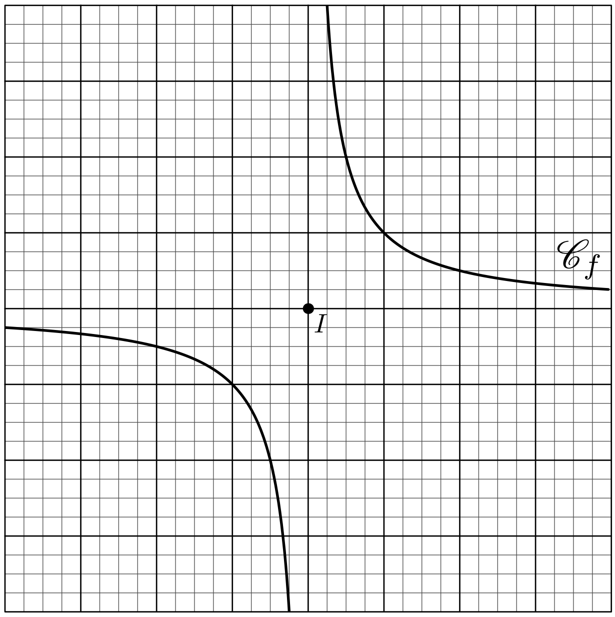
On note g la fonction inverse. A la question précédente, nous venons d'établir que :

$$f(x) = g(x-2) + 1$$

2. Par quelle transformation du plan, obtient-on la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f à partir de l'hyperbole $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction inverse?

La figure ci-dessous représente l'hyperbole obtenu par la fonction inverse et I sont centre de symétrie.

3. Placer correctement le repère pour que cette courbe soir la représentation de la fonction f.

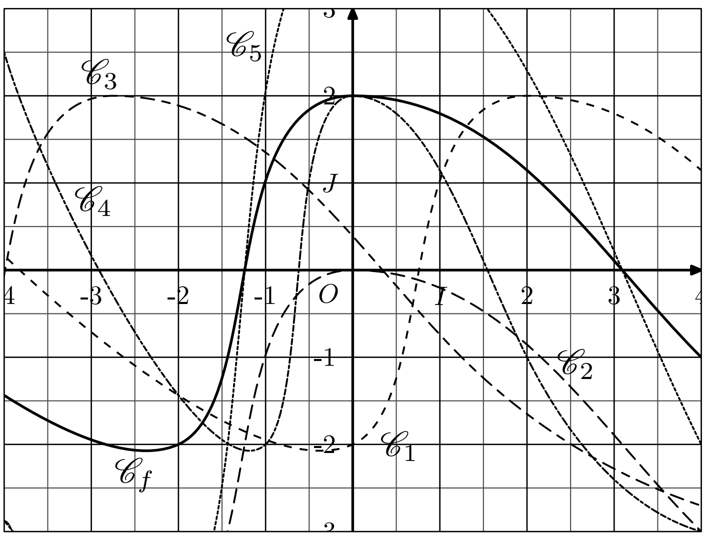


2. Composée de fonctions :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 2

On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée dans le repère $(O;I;J)$ ci-dessous :



Dans ce repère est également donnée les courbes représentatives associées à la fonction f dont voici les expressions algébtiques :

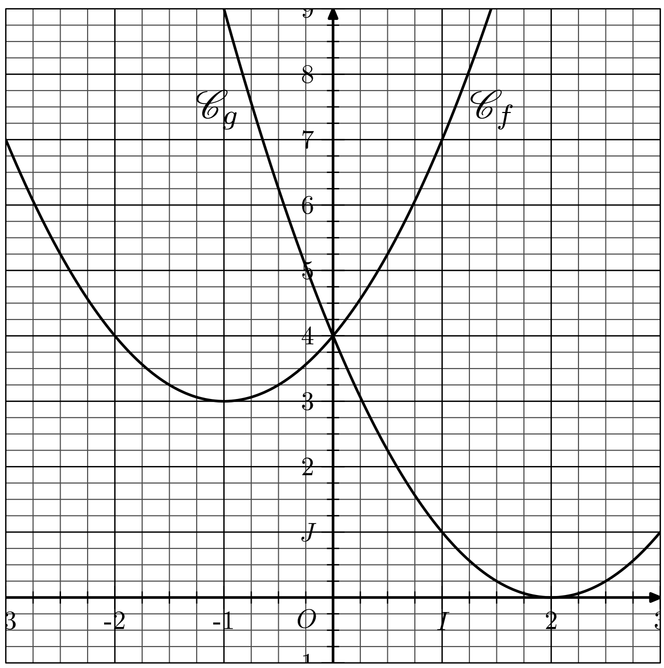
$g : x \mapsto f(x+2)$; $h : x \mapsto f(2 \cdot x)$; $j : x \mapsto f(x-2)$

$k : x \mapsto 2 \cdot f(x)$; $\ell : x \mapsto f(x) - 2$

Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative.

Exercice 3

On considère les deux repères $(O;I;J)$ dans lesquels ont été tracées des courbes représentatives de polynômes de second degré :



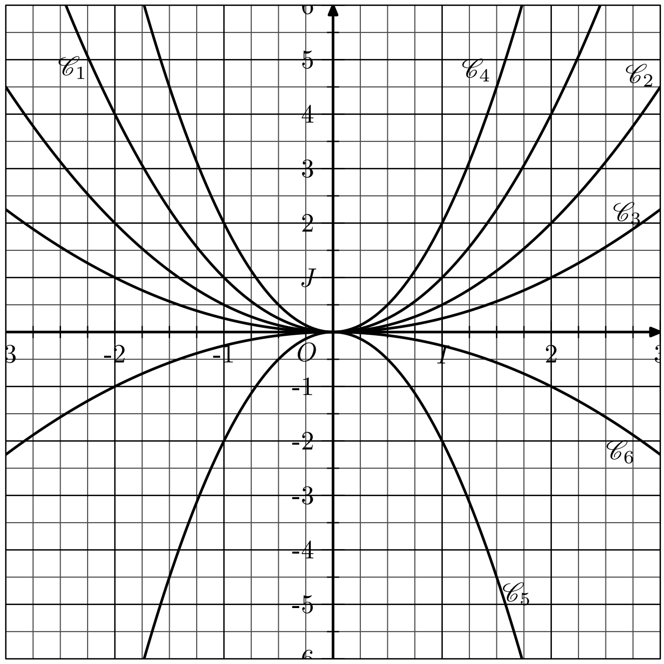
1. La courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie par :

$f : x \longmapsto x^2 + 2x + 4$

La fonction g est définie, explicitement par la fonction f, par la relation suivante :
$g(x) = f(x+\alpha) + \beta \quad$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

a. Déterminer, à l'aide des représentations de ces deux fonctions, les valeurs des nombres réels α et β.

b. Déduire la forme développée réduite de l'expression de $f(x)$.



2. Les courbes $\mathscr{C}_1$ à $\mathscr{C}_6$ sont les représentations de fonctions définie par la relation :
$x \longmapsto \alpha \cdot x^2 \quad$ où α est un nombre réel.

Déterminer pour chaque fonction la valeur de α.

3. Composé et expressions :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 4

Dans chacune des questions suivantes, donner l'expression algébrique de $(f \circ g)(x)$ en fonction de x :

a. $f(x) = 3x + 1 \quad$ et $\quad g(x) = 2 - x$

b. $f(x) = x^2 \quad$ et $\quad g(x) = x - 4$

c. $f(x) = x - 4 \quad$ et $\quad g(x) = x^2$

d. $f(x) = \sqrt{x} \quad$ et $\quad g(x) = 3x + 2$

e. $f(x) = 3x + 2 \quad$ et $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

f. $f(x) = -2x + 1 \quad$ et $\quad g(x) = 2x + 1$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :
$f(x) = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2$

1. Pour $x \in [0\,;1]$, établir l'égalié suivante :
$(f \circ f)(x) = x$

2. Pour $x \in [1\,;+\infty[$, déterminer une expression simplifiée de la fonction $f \circ f$.

4. Composé et tableau de variation :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation suivante :
$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$

1. a. Déterminer la forme factorisée de l'expression $f(x)$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
(On indiquera également les deux racines de la fonction f)

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		8		$+\infty$
Variation de g	-1	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

a. Faire une conjecture sur la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} (g \circ f)(x) \quad ; \quad \lim_{x \mapsto -\infty} (f \circ g)(x)$$

b. Justifier que la fonction $f \circ g$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

c. Justifier et préciser la monotonie de la composée $g\circ f$ sur chacun des deux intervalles suivants :
$]-\infty\,;-3]$; $[-3\,;1]$

Exercice 7

On considère une fonction f définie sur $[-5\,;4]$ dont le tableau de variations est donnée ci-dessous :

x	-5	-2	1	4
Variation de f	-2 ↗	1 ↘	-3 ↗	3

Déterminer le tableau de variations des fonctions associées à f présentées ci-dessous :

a. $g: x\longmapsto f(x+2)$

b. $h: x\longmapsto -2\cdot f(x)$

c. $j: x\longmapsto f(x-2)+1$

Exercice 8

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f(x)=-3\big(2x-1\big)^2+1$$

On note g, la fonction affine définie par :

$$g: x\longmapsto 2x-1.$$

1. Déterminer l'intervalle I tel que : $g\big(I\big)=\mathbb{R}_+$
2. Justifier que la fonction f est monotone sur I.
3. Préciser le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles I et $\mathbb{R}\backslash I$.

Exercice 9

Donner le sens de variation des fonctions ci-dessous sur l'intervalle précisé. Aucune justification n'est demandée :

a. $f: x\longmapsto\sqrt{2-3x}$ sur $\left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right]$

b. $g: x\longmapsto 2(3-x)^2+1$ sur $[3\,;+\infty[$

c. $h: x\longmapsto \dfrac{2}{(x+1)^2}+1$ sur $]-\infty\,;-1[$

d. $j: x\longmapsto x^2-3x+2$ sur $\mathbb{R}_-$

e. $k: x\longmapsto -3\sqrt{x}-1$ sur $\mathbb{R}_+$

f. $\ell: x\longmapsto -2\sqrt{3-x}+1$ sur $]-\infty\,;3]$

5. *Composée de fonctions :*

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 10

La plupart des fonctions utilisées sont des fonctions composées à partir des fonctions de référence.
La fonction $x\longmapsto\sqrt{x^2+1}$ peut être vu comme la composée de fonctions de référence de la manière suivante :

$$x \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{g} x^2+1 \xrightarrow{h} \sqrt{x^2+1}$$

$$\text{où}\ \begin{cases} f : x\longmapsto x^2 \\ g : x\longmapsto x+1 \\ h : x\longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

1. Décomposer les fonctions suivantes à l'aide des fonctions de références :

   a. $x\longmapsto 3x^2-1$

   b. $x\longmapsto \dfrac{2}{3+x^2}$

   c. $x\longmapsto \sqrt{\dfrac{2}{-2x+3}}$

2. On définit a et b deux éléments de l'intervalle $[1\,;5]$ tel que $a<b$. Pour chacune des fonctions de la question 1., comparer les images des nombres a et b.
3. En analysant vos résultats de la question 1., compléter les deux phrases suivantes :
   - La composée de deux fonctions croissantes est ....
   - La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est ....
4. Que peut-on dire du sens de variation de la somme de deux fonctions croissantes? de deux fonctions décroissantes? d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante?

Justifier par une démonstration ou un contre-exemple chacune de vos affirmations.

Exercice 11

Soit f une fonction dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f: x\longmapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Décomposer cette fonction à l'aide de trois fonctions de référence.
3. Prouver la décroissance de la fonction f sur D_f.

Exercice 12

1. Après avoir observé le sens de variation sur votre calculatrice de chacune des fonctions suivantes, appuyez votre observation au travers d'une preuve algébrique.

   a. Soit f la fonction définie par la formule :
   $f(x)=x+3$ sur $\mathbb{R}$.

   b. Soit g la fonction définie par la formule :
   $g(x)=-\dfrac{1}{4}x-1$ sur $\mathbb{R}$.

   c. Soit j la fonction définie par la formule :
   $j(x)=3(1-x)^2+2$ sur $\mathbb{R}$.

   d. Soit k la fonction définie par la formule :
   $k(x)=\sqrt{x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

   e. Soit l la fonction définie par la formule :
   $l(x)=\dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

2. a. Etablir l'identitié : $x^2+2x+1=(x+1)^2$

(b.) On considère la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$m(x)=x^2+2x+1$.
Etablir la stricte décroissance de la fonction m sur $]-\infty\,;-1]$.

Exercice 13

1. Etudier le sens de variation des fonctions suivantes :
   - f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x)=2x-1$
   - g définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $g(x)=-2x-1$
   - h définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $h(x)=x^2$
   - k définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $k(x)=(x-1)^2-2$
   - l définie sur $\mathbb{R}^*$ par la relation : $l(x)=\dfrac{1}{x}$
   - m définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par la relation : $m(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$
2. (a.) Etablir la relation : $x^2-2x-1=(x-1)^2-2$

   (b.) Etablir le sens de variation de la fonction n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $n(x)=x^2-2x-1$

6. Opérations sur les fonctions :

(+5 exercices pour les enseignants)

Exercice 14

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$:

$f: x \longmapsto x+2 \quad ; \quad g: x \longmapsto (3x-2)(2x+4)$

1. Déterminer la forme simplifiée des expressions suivantes :

   (a.) $(f+g)(x)$ (b.) $(f\times g)(x)$ (c.) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$
2. Donner l'ensemble de définition de la fonction $\dfrac{f}{g}$.

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;4]$ dont le tableau de variations est données ci-dessous :

x	-∞	-2	1	4
Variation de f	-5 ↗	-2 ↗	2 ↘	-1

On considère les fonction g, h et j définies par :

$g(x)=f(x)+2 \quad ; \quad h(x)=2\cdot f(x) \quad ; \quad j(x)=-f(x)$

Dresser les tableaux de variation des fonctions g, h et j.

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $[1\,;7]$ dont le tableau de variations est donnée ci-dessou :

x	1	3	7
Variation de f	4 ↗	5 ↘	1

1. Sans justification, dresser les tableaux de variations des fonctions g et h définies par :
   $g(x)=2\cdot f(x) \quad ; \quad h(x)=f(x)+2$
2. On considère la fonction j définie par la relation :
   $j(x)=f(x-2)$

   (a.) Donner l'ensemble de définition de la fonction j.

   (b.) Dresser, sans justification, le tableau de variations de la fonction j.

7. Composition : racines :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 17

On considère la fonction f polynômiale du second degré définie par la relation :
$f(x)=-x^2-2\cdot x+3$

On construit la fonction g par la relation :
$g\colon x \longmapsto \sqrt{f(x)}$

1. Conjecture sur la fonction g :

   Après avoir tracé la courbe représentative de la fonction g à l'aide de la calculatrice :

   (a.) Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction g.

   (b.) Conjecturer le sens de variation de la fonction g sur les intervalles $[-3\,;-1]$ et $[-1\,;1]$.
2. Etude de la fonction g :

   (a.) Déterminer les zéros de la fonction f, puis compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	0 ↗	$\cdots$ ↘	0 ↘	$-\infty$

   (b.) Justifier que la fonction g est définie sur $[-3\,;1]$.

   (c.) Justifier que la fonction g est décroissante sur $[-1\,;1]$.

Exercice 18

1. On considère la fonction f dont l'image de x est donnée par la relation :
$f(x) = \sqrt{2{\cdot}x - x^2}$

a. Dresser le tableau de signes de la fonction suivante :
$x \longmapsto 2x - x^2$

b. En déduire l'ensemble de définition de la fonction f.

2. On considère la fonction g définie par :
$g\colon x \longmapsto \sqrt{x^3 - 3x - 2}$

a. Développer l'expression : $(x{+}1)^2{\cdot}(x{-}2)$

b. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

Exercice 19

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$f(x) = \sqrt{\dfrac{3 - 2{\cdot}x}{2{\cdot}x + 3}}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction de la fonction f.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ par la relation :
$g(x) = \dfrac{3 - 2{\cdot}x}{2{\cdot}x + 3}$

a. Déterminer les réels a et b réalisant l'identité suivante :
$g(x) = a + \dfrac{b}{2{\cdot}x + 3}$

b. Etablir le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

Exercice 20

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 6{\cdot}x^2 - 11{\cdot}x - 10$

a. Déterminer les zéros de la fonction f.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
(On y indiquera ses zéros)

2. On considère la fonction g définie par :
$g(x) = \sqrt{6{\cdot}x^2 - 11{\cdot}x - 10}$

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Exercice 21

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x^2 - x - 6}}$$

1. a. Factoriser l'expression : $\left(x{-}\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}$

b. Justifier l'égalité suivante : $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{(x{-}3)(x{+}2)}}$

2. a. Etablir le tableau de signes de l'expression : $(x - 3)(x + 2)$.

b. Déterminer l'ensemble définition de la fonction f.

3. En déduire, sur l'intervalle $]3\,;+\infty[$, la monotonie de la fonction f.

8. Composition : inverses :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 22

On considère la fonction f définie par l'expression :
$f(x) = 2{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x + 4$

On construit une fonction g définie par l'expression :
$g(x) = \dfrac{1}{2{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x + 4}$

1. Conjecture sur la fonction g :

Après avoir tracé la courbe représentative de la fonction g à l'aide de la calculatrice :

a. Conjecturer l'ensemble de définition de la fonction g

b. Conjecturer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.

2. Etude de la fonction g :

a. Déterminer les zéros de la fonction f, puis compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\cdots$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b. Justifier que la fonction g n'est pas définie pour $x{=}1$ et $x{=}2$.

c. Justifier que la fonction g est croissante sur $]-\infty\,;1[$.

Exercice 23

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par les relations : $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$; $g(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

Sans justification, donner le sens de variations des fonctions f et g sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$.

9. Un peu plus loin - composée de fonctions :

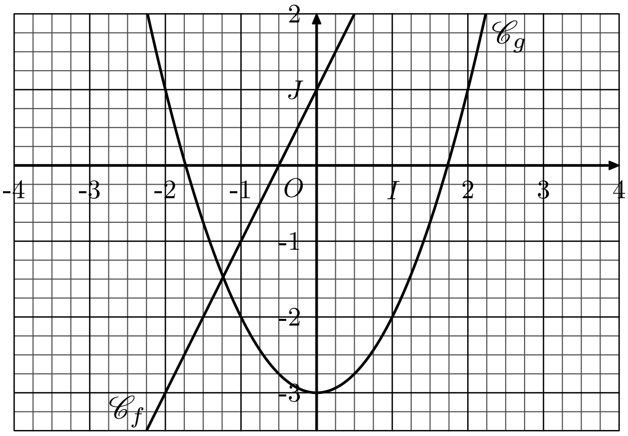
(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 24

On considère les deux fonctions f et g définie sur $[-4\,;4]$ par les relations :

$$f(x)=2x+1 \quad ; \quad g(x)=x^2-3$$

On donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



1. Par lecture graphique, compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$					

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

2. On considère le programme de calcul suivant :

- Prendre un nombre x ;
- Déterminer l'image de x par la fonction f ; on note ce nombre x' ;
- Déterminer l'image de x' par la fonction g ; on note ce nombre $g\big(f(x)\big)$.

On peut noter ce programme de calcul par la chaine :

$$x \xhookrightarrow{f} f(x) \xhookrightarrow{g} g\big(f(x)\big)$$

a. Déterminer la valeurs des expressions suivantes :

$$g\big(f(-1)\big) \quad ; \quad g\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

b. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$g\big(f(x)\big)$					

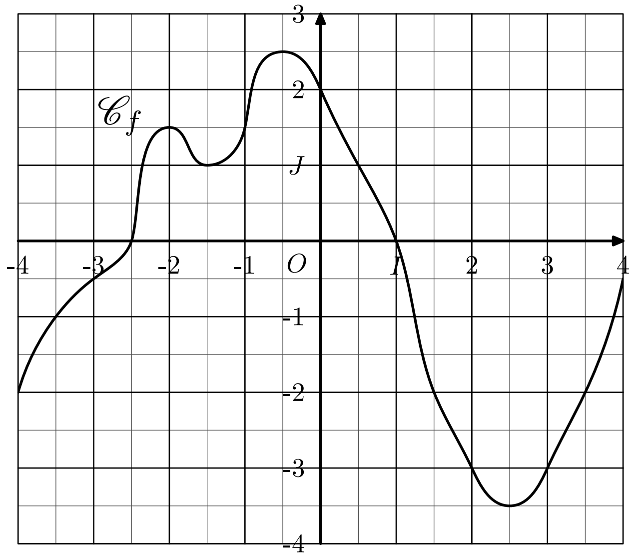
On vient de créer une nouvelle fonction qui à un nombre x associe l'image $g\big(f(x)\big)$. Cette fonction s'appelle la fonction composée de f par g et se note $g\circ f$.

3. Tracer dans le repère ci-dessus la courbe $\mathscr{C}_{g\circ f}$ représentative de la fonction $g\circ f$.

4. Donner l'expression, en fonction de x, de la fonction $g\circ f$.

Exercice 25

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



1. Calculer les images suivantes :

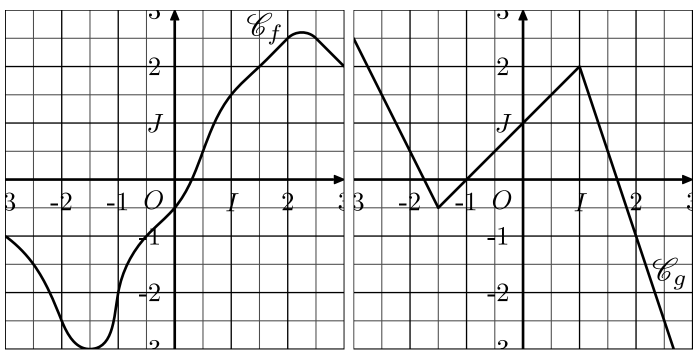
a. $(f\circ f)(1)$ b. $(f\circ f)(-2)$ c. $(f\circ f)(3)$

2. On définit la fonction f^n comme la fonction composée n fois de la fonction f par elle-même. Déterminer la valeur des images suivantes :

a. $f^3(1)$ b. $f^3(-3)$ c. $f^4(-1)$

Exercice 26

On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3\,;3]$ dont les courbes, respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, représentatives sont données dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormée :



1. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a. $(f\circ g)(-2)$ b. $(f\circ g)(1{,}5)$ c. $(f\circ g)(2)$

2. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a. $(g\circ f)(-3)$ b. $(g\circ f)(0)$ c. $(g\circ f)(1)$

Exercice 27

On considère les deux fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto x^2-2 \quad ; \quad g : x \longmapsto \sqrt{x}$$

1. a. Donner les ensembles de définition des fonctions f et g.

b. Peut-on parler de l'image de 1 par la fonction $g\circ f$? Justifier votre réponse.

2. a. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

b. Donner l'ensemble de définition de la fonction $g\circ f$.

Exercice 28

Pour chacun des couples de fonctions ci-dessous, déterminer l'expression de la fonction $g \circ f$:

1. $f\colon x \longmapsto 3x-5$; $g\colon x \longmapsto x^2$
2. $f\colon x \longmapsto x^2-1$; $g\colon x \longmapsto -2x+4$
3. $f\colon x \longmapsto x^2+1$; $g\colon x \longmapsto x^2+1$

11. Exercices non-classés :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 29

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont voici le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	5	2	$+\infty$

On considère la fonction g dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$g(x) = \frac{2}{f(x)-1} + 3$$

1. Déterminer l'image des nombres -1 et 3 par la fonction g.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\,;3]$.

Exercice 30

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2+2}$$

Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.

Exercice 31

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ définie par la relation :

$$f(x) = 2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3\cdot\frac{1}{x} + 5$$

1. Dresser le tableau de signes et le tableau de variations du polynôme du second degré :
   $$P(x) = 2x^2 - 3x + 5$$
2. En remarquant que la fonction f est la composée de la fonction inverse avec ce polynôme du second degré, établir que la fonction est décroissante $\left]0\,;\frac{4}{3}\right]$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f *(ne pas chercher à compléter le tableau avec les valeurs des images.)*

Exercice 32

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{-x^2+2x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.