Hors programme lycée/Fonction paire et impaire

2. Etude de la parité :

Exercice 1

Etudier la parité des fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = (x-1)\cdot(x+1)$

b. $g(x) = 3x^3 - 2x$

c. $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

d. $j(x) = \cos(3\cdot x^3)$

Exercice 2

1. Justifier que la fonction suivante est paire :
$f:\ x \longmapsto e^x + e^{-x}$

2. Justifier que la fonction suivante est impaire :
$g:\ x \longmapsto e^x - e^{-x}$

3. Axe de symétrie des courbes :

Exercice 3

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est définie par :
$f(x) = 2x^2 + 4x - 1$
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

a. Soit h un nombre réel. Déterminer les expressions simplifiées en fonction de h de :
$f(-1-h)\quad ;\quad f(-1+h)$

b. En déduire une propriété géométrique de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ définie par :
$$g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$$
Justifier que la courbe $\mathscr{C}_g$, représentative de la fonction g, admet le point de coordonnée $(1\,;1)$ pour centre de symétrie.

4. Centre de symétrie des courbes :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{2x - 4}$$
Montrer que le point $I(2\,;0)$ est le centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ dont l'image de x est donnée par la relation :
$$f(x) = \frac{x^2 + 10x + 20}{2x + 6}$$
Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f admet pour centre de symétrie le point $K(-3\,;2)$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x + 2 - \frac{4\cdot e^x}{e^x + 3}$$
On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.

On note I le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\ln 3$. Montrer que le point I est le centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{4\cdot e^x}{e^x + 7}$$
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.

1. Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x) = \dfrac{4}{1+7\cdot e^{-x}}$

2. Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln 7\,;2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point I.

5. Axe et centre de symétries de courbes :

(+2 exercices pour les enseignants)

Remarque : Le programme de première S de 2005 précisait : "On justifiera symétries observées sur les représentations graphiques".

Exercice 8

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{6}{\frac{1}{2}x^2 + x + 2}$$
admet la droite d'équation $x = -1$ comme axe de symétrie.

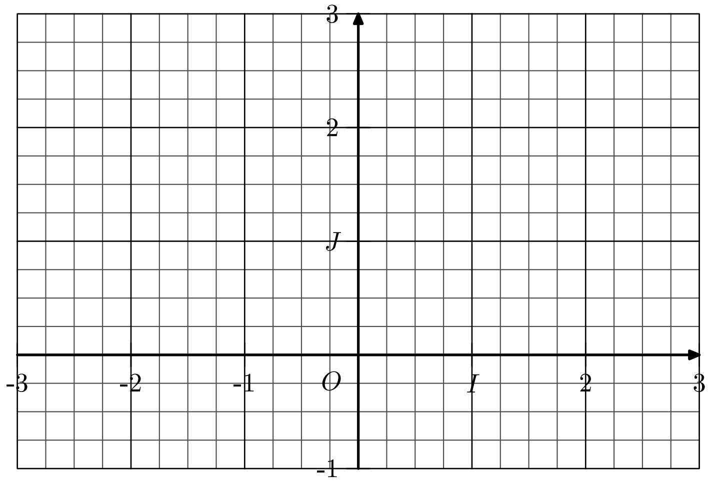
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$ par :
$$g(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x+1}$$
admet le point $I(-1\,;2)$ comme centre de symétrie.

6. Symétrie et asymptotes obliques :

Exercice 9

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :
$$f(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - 5x + 4}{4(x^2+1)}$$
Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer la valeur des réels a, b, c vérifiant la relation :
$$f(x) = a{\cdot}x + b + \frac{c{\cdot}x}{x^2+1}$$
   b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique (Δ) dont on précisera l'équation.
   c. Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (Δ).
2. Etablir que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet le point de coordonnée $(0\,;1)$ comme centre de symétrie.
3. a. Etablir que la dérivée f' de la fonction f admet pour dérivée :
$$f'(x) = \frac{\big(x^2+5\big)\big(3x^2-1\big)}{4\big(x^2+1\big)^2}$$
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   On admettra les deux résultats suivants :
   - $f\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}57$
   - $f\Big(-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}43$
4. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$.



7. Symetries et dérivées :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 10

Soit f une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la limite suivante :
$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{f(2{+}h) - f(2)}{h} = -\frac{1}{2}$$

1. Que peut-on dire de la dérivabilité de la fonction f en 2.
2. Supposons que la fonction f est paire :
   a. Déterminer le nombre dérivée de la fonction f en -2.
   b. A main levée, représenter une courbe $\mathscr{C}_f$ et ses deux tangentes en -2 et 2 vérifiant une telle situation.
3. Supposons que la fonction f est impaire :
   a. Déterminer le nombre dérivée de la fonction f en -2.
   b. A main levée, représenter une courbe $\mathscr{C}_f$ et ses deux tangentes en -2 et 2 vérifiant une telle situation.

8. Symétries et intégrales :

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\left[-1\,;1\right]$ par :

$f(x)=\dfrac{3}{2}\cdot\Big(|x|-1\Big)^2$

1. Etudier la parité de la fonction f.
2. Montrer que cette fonction est la densité d'une loi de probabilité sur $\left[-1\,;1\right]$.

9. Symétries de courbes :

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 12

Pour chacune des fonctions suivantes, donner leurs ensembles de définition puis étudier leurs parités :

a. $f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$

b. $g : x \longmapsto \dfrac{|x|}{x(x^2-1)}$

c. $h : x \longmapsto 3x^2-x+1$

d. $j : x \longmapsto \dfrac{3}{x}\times|x|$

Exercice 13

Donner l'ensemble de définition et la parité des fonctions suivantes :

a. $f\colon x \longmapsto x(x+2)^2$

b. $g\colon x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$

c. $h\colon x \longmapsto \dfrac{1}{(x-4)(x+4)}$

d. $j\colon x \longmapsto \dfrac{1}{2}x\cdot|x|$

Exercice 14

On se place dans un repère orthogonal $(O;I;J)$

1. a. Soit M un point du plan de coordonnée $(x\,;y)$. Donner les coordonnées de l'image du point M par la symétrie orthogonal d'axe (OJ).

   b. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout nombre réel x :
   $f(x)=f(-x)$
   Montrer que la fonction f est paire.

2. a. Soit M un point du plan de coordonnée $(x\,;y)$. Donner les coordonnées de l'image du point M par la symétrie centrale de centre O.

   b. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout nombre réel x :
   $f(x)=-f(-x)$
   Montrer que la fonction f est impaire.

10. Symétrie de courbes :

Exercice 15

On considère la fonction f définie par :

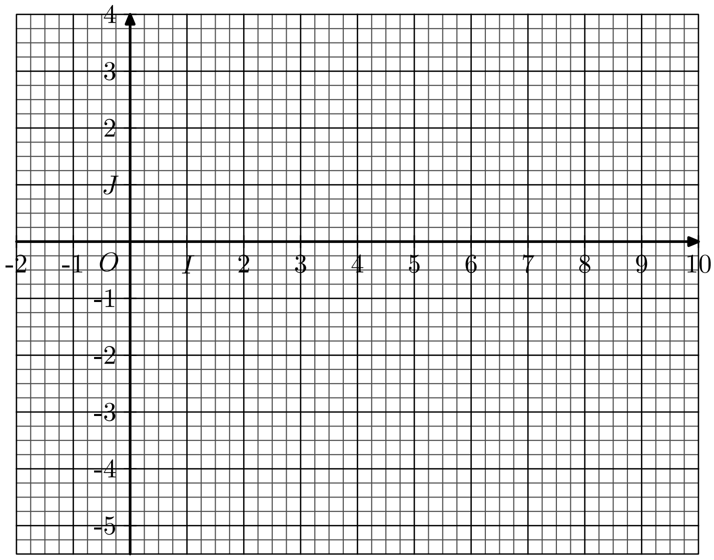
$f : x \longmapsto \dfrac{1}{4}\cdot x^2-2\cdot x-1$

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous avec des valeurs arrondies au centième près :

x	-2	$-0{,}5$	1	2	3	3,5	4
$f(x)$							

x	4,5	5	6	7	8,5	10
$f(x)$						

2. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ ci-dessous :



3. Cette courbe possède un axe de symétrie, tracer cet axe sur votre représentation.

Exercice 16

Dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie par un polynôme du second degré.

Pour seule connaissance de la fonction f, on a le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-5	-3	-2	0	2	4
$f(x)$	36	0	-9	-9	15	63

1. Donner l'équation de l'axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Donner les deux antécédents du nombre 0 par la fonction f.

3. Donner l'expression de la fonction f.

Exercice 17

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est définie par :

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 3$$

1. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

   b. Préciser les caractéristiques de l'extrémum de la fonction f.

2. Soit h un nombre quelconque positif :

   a. Déterminer la forme développée et réduite des deux expressions suivantes :
   $f(1-h)$; $f(1+h)$

   b. Que peut-on dire sur les deux points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives $(1-h)$ et $(1+h)$.