

Hors programme lycée/Fonctions homographiques

1. Fonctions homographiques :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 1



On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$$

1.
 - a. Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
 - b. Déterminer l'image de 3 par la fonction f .
 - c. Déterminer les antécédents, pour la fonction f , des nombres -1 et 0 .
 - d. Justifier que 1 n'admet pas d'antécédent par la fonction f .

2. Etablir pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, l'égalité suivante :

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1$$

Exercice 2

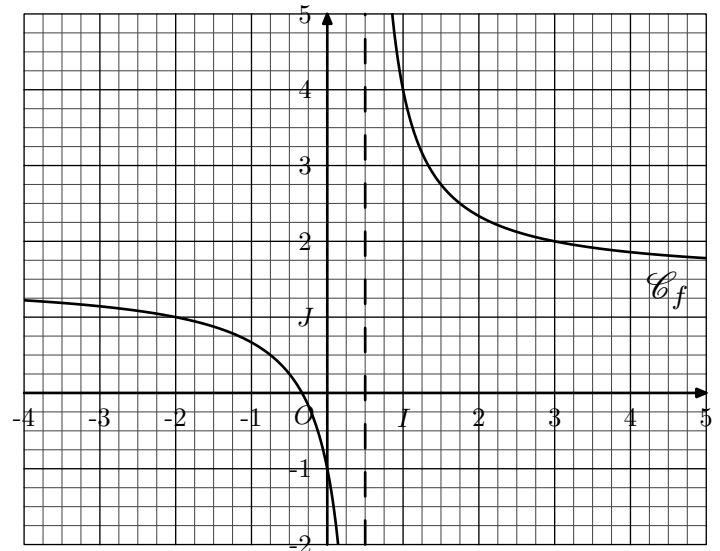


On considère la fonction : $f : x \mapsto \frac{3x+1}{2x-1}$

1.
 - a. Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{3x+1}{2x-1} = \frac{5}{4x-2} + \frac{3}{2}$$
 - b. Etablir la décroissance de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; \frac{1}{2} [$.

2. On représente, dans le repère orthonormé ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f :



- a. Graphiquement, déterminer une valeur approchée de l'antécédent du nombre 3 par la fonction f .
- b. Algébriquement, rechercher l'antécédent du nombre 3 par la fonction f .
- c. Graphiquement, déterminer les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 3$

Exercice 3



On considère la fonction f définie par la relation :

$$f : x \mapsto \frac{2-6x}{1-2x}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Déterminer la valeur des réels a et b vérifiant :

$$\frac{2-6x}{1-2x} = \frac{a}{1-2x} + b$$

3. En déduire que la fonction f est décroissante sur $] \frac{1}{2} ; +\infty [$

2. Fonctions homographiques et fonctions affines :

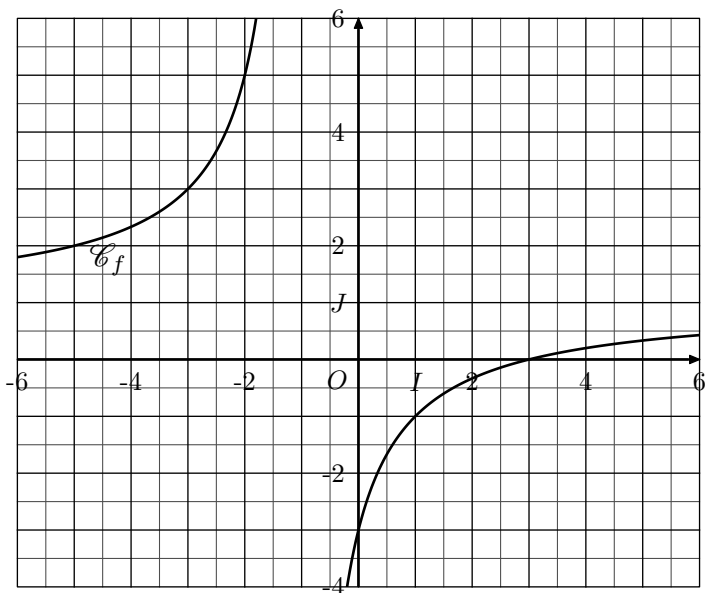
Exercice 4



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+1}$$

Dans le repère $(O; I; J)$ donné ci-dessous, on a représenté la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f .



1.
 - a. Déterminer les coordonnées des deux points A et B de la courbe \mathcal{C}_f ayant pour abscisse respective -2 et 3 .
 - b. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) .
 - c. Tracer, dans le repère, la droite (AB) .

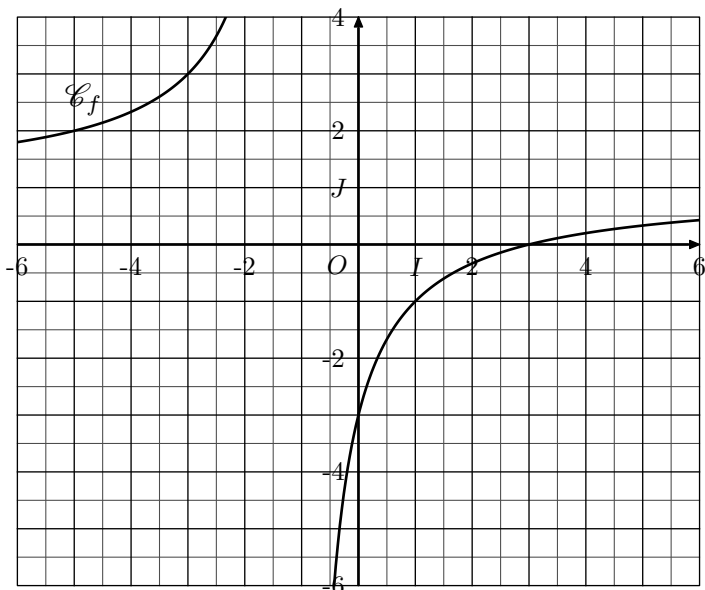
2. On considère la droite (Δ) ayant pour équation réduite : $(\Delta): y = -2x - 3$
 - a. Déterminer algébriquement les solutions de l'équation : $f(x) \geq -2x - 3$
 - b. En déduire la position relative de la courbe \mathcal{C}_f relativement à la droite (Δ) .
 - c. Tracer la droite (Δ) dans le repère.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+1}$$

Dans le repère $(O; I; J)$ donné ci-dessous, on a représenté la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f .



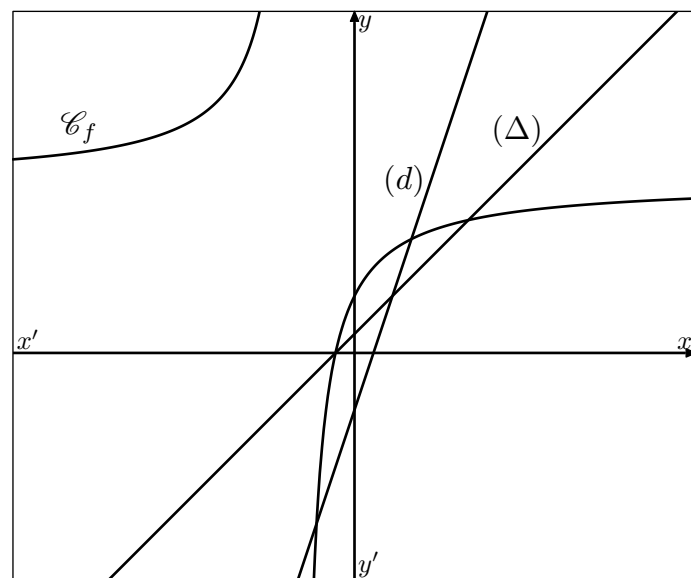
1.
 - a. Déterminer les coordonnées des deux points A et B de la courbe \mathcal{C}_f ayant pour abscisse respective 1 et 3 .
 - b. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) .
 - c. Tracer, dans le repère, la droite (AB) .
2. On considère la droite (Δ) ayant pour équation réduite : $(\Delta): y = 3x - 4$
 - a. Etablir la factorisation suivante : $-3x^2 + 2x + 1 = (1-x)(3x+1)$
 - b. Résoudre algébriquement l'inéquation : $f(x) \leq 3x - 4$
 - c. En déduire la position relative de la courbe \mathcal{C}_f relativement à la droite (Δ) .
 - d. Tracer la droite (Δ) dans le repère.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$$

Dans le repère $(O; I; J)$ donné ci-dessous, on a représenté la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f .



1. Déterminer l'équation réduite de la droite (d) passant par les deux points de la courbe \mathcal{C}_f ayant respectivement pour abscisses $-\frac{2}{3}$ et 1 .
2. On considère la droite (Δ) ayant pour équation réduite : $(\Delta): y = x + \frac{1}{3}$
 - a. Etablir la factorisation suivante : $-3x^2 + 5x + 2 = (2-x)(3x+1)$
 - b. Résoudre algébriquement l'inéquation : $f(x) \leq x + \frac{1}{3}$
 - c. En déduire la position relative de la courbe \mathcal{C}_f relativement à la droite (Δ) sur \mathbb{R} .

Exercice 7

Un automobiliste parcourt sur les routes départementales une distance de 48 km à une vitesse moyenne de 64 km/h, puis il parcourt la suite du parcours, de x km, sur autoroute à une vitesse moyenne de 115 km/h.

- Déterminer la durée de son trajet sur les routes départementales.
- a. Justifier que le trajet total a eu pour durée :

$$t = \frac{3}{4} + \frac{x}{115}$$

4. Etudes d'autres fonctions :*(+1 exercice pour les enseignants)***Exercice 8**

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}$$

- Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
- Etablir les égalités suivantes :

$$f(x) = \frac{4}{(x-3)(x+1)} = \frac{4}{(x-1)^2 - 4}$$
- a. Justifier que, pour x appartenant à $] -\infty ; -1[$, l'image de x est positive.
b. Etablir que la fonction f est croissante sur $] -\infty ; -1[$.
- Dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f :
 - Pour tout nombre $h \in \mathbb{R}$ tel que les deux nombres $1+h$ et $1-h$ appartiennent à \mathcal{D}_f , vérifier l'égalité suivante : $f(1-h) = f(1+h)$
 - En affichant la courbe \mathcal{C}_f sur votre calculatrice, quelle propriété géométrique semble posséder la courbe \mathcal{C}_f ?

Exercice 9**6. Exercices non-classés :****Exercice 10**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{3x+4}{x-1}$$

- Etablir l'identité : $f(x) = 3 + \frac{7}{x-1}$
- Etablir que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $] -2; +\infty[$ par la relation : $f(x) = \frac{3x+8}{x+2}$

- Justifier que la vitesse v moyenne de l'automobiliste, sur l'ensemble du parcours, s'écrit en fonction de x :

$$v = \frac{460x + 22080}{4x + 345}$$

- Le conducteur sait qu'il a parcouru l'intégralité du parcours à une vitesse moyenne de 92 km/h.

Déterminer la distance parcourue sur l'autoroute par l'automobiliste. Puis, donner la distance totale de son parcours.

- On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{x+2}{(2x-1)(3-x)}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
 - Etablir l'égalité suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{3-x}$$
 - Montrer que pour tout $x \in] -\infty ; -2]$, l'image de x par f est un nombre positif.
- Soit g la fonction définie par :

$$g : x \mapsto \frac{4}{4x-2} - \frac{2}{2x+5}$$
 - Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .
 - Déterminer les valeurs de a et de b vérifiant la relation suivante :

$$g(x) = \frac{12}{4(x-a)^2 + b}$$
 - Etablir le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; +\infty[$

- Etablir l'identité : $f(x) = 3 + \frac{2}{x+2}$

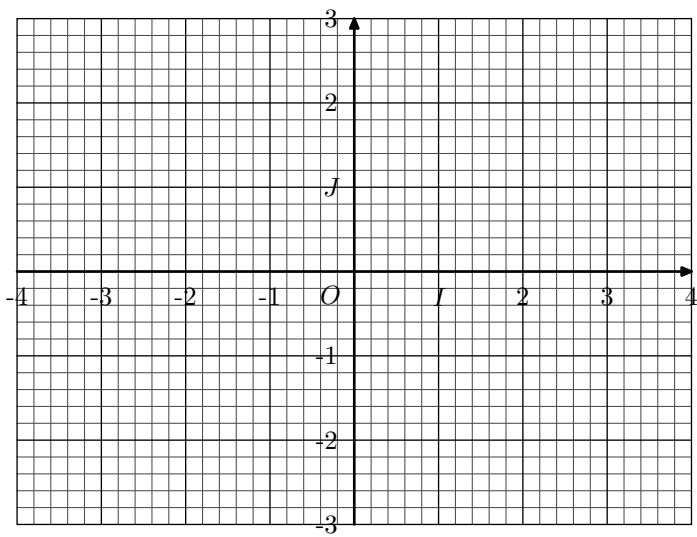
- Etablir que la fonction f est décroissante sur $] -2; +\infty[$.

Exercice 12

On considère la fonction homographique f définie par :

$$f(x) = \frac{x-2}{4x+2}$$

On considère le plan muni du repère $(O; I; J)$ orthonormé représenté ci-dessous :



1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$:

2. A l'aide de la calculatrice :

- a. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- b. Compléter le tableau de valeurs, au dixième près :

x	-4	-3	-2	-1,5	-1	-0,8
$f(x)$						

x	-0,3	0	0,5	1	2	3	4
$f(x)$							

3. Effectuer le tracé de la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans le repère ci-dessus.