Hors programme lycée/Intégration

ChingEval : 2 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. Intégrale par parties :

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
$f(x)=x\cdot\ln\left(x+1\right)$

1. On pose : $I=\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$
   a. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x\neq 1$:
   $$\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}$$
   b. Calculer I.
2. Déterminer par une intégration par parties l'intégrale suivante :
$$\int_0^1 x\cdot\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 2

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_{-1}^4 x\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ b. $\int_0^5 t\cdot\mathrm{e}^{2\cdot t}\,\mathrm{d}t$

c. $\int_{\mathrm{e}}^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ d. $\int_0^1 (2\cdot x+1)\cdot\ln\left(x+1\right)\mathrm{d}x$

e. $\int_1^e \frac{5\cdot\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ f. $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$

Exercice 3

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ b. $\int_1^{\ln 3} \mathrm{e}^t\cdot(t-1)\,\mathrm{d}t$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cdot\sin 3x\,\mathrm{d}x$ d. $\int_1^e x\cdot(1-\ln x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 4

La fonction f est définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
$$f(x)=\left(20\cdot x+10\right)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot x}$$
Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;3\right]$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ par :
$$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}\cdot x+1$$

1. Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra utiliser une intégration par parties.
2. Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par :
   - la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses ;
   - les droites d'équation $x=\frac{1}{2}$ et $x=1$.

   (on admettra que la fonction f est positive sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$)

Exercice 6

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=1-\frac{2}{e}$$

2. Intégrale par parties - doubles :

Exercice 7

A l'aide d'une double intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_{-2}^3 x^2\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ b. $\int_1^5 \left(1-t^2\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 8

Le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=x^2\cdot\mathrm{e}^{-x}$

On note f' la fonction dérivée de f.

Pour tout nombre réel a, on considère l'intégrale :
$$I(a)=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Donner selon les valeurs de a le signe de $I(a)$.
2. A l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a :
$$I(a) = 2 - 2{\cdot}\mathrm{e}^{-a}{\cdot}\Big(1 + a + \frac{a^2}{2}\Big)$$

3. Intégrale par parties - étude :

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $\big[1\,;+\infty\big[$ par :
$$f(x) = \big(x-1\big){\cdot}\mathrm{e}^{1-x}$$
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\big(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\big)$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :
$$F(x) = \int_1^x f(x)\,\mathrm{d}t = \int_1^x (t-1){\cdot}\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la fonction F est croissante sur $\big[1\,;+\infty\big[$.
2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x appartenant à $\big[1\,;+\infty\big[$:
$$F(x) = -x{\cdot}\mathrm{e}^{1-x} + 1$$
3. Démontrer que sur $\big[1\,;+\infty\big[$, l'équation $F(x)=\dfrac{1}{2}$ est équivalente à l'équation :
$$\ln(2x) + 1 = x$$

Exercice 10

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\big(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\big)$; l'unité graphique est $4\,cm$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$

Γ est sa courbe représentative dans le repère $\big(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\big)$.

1. Montrer que $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$; en déduire une primitive de f.
2. Quelle est l'aire en cm^2 de la surface comprise entre Γ, la droite d'équation $y=x$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$?
Hachurer cette surface sur la représentation graphique.
3. Calculer : $\displaystyle\int_0^1 \big[f(x)\big]^2\,\mathrm{d}x$
4. En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$$\int_0^1 x{\cdot}\Big[1-\big[f(x)\big]\Big]\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}^2+1} - \ln\Big(\frac{\mathrm{e}^2+1}{2{\cdot}e}\Big).$$
En déduire : $\displaystyle\int_0^1 x{\cdot}\big[f(x)\big]^2\,\mathrm{d}x$

Exercice 11

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $\big]0\,;1\big]$ par : $f(x) = 1 + x{\cdot}\ln x$

Soit α un nombre réel tel que $0<\alpha<1$. On pose :
$$I(\alpha) = \int_\alpha^1 \big[1-f(x)\big]\,\mathrm{d}x$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$I(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}{\cdot}\ln\alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$$
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{\alpha\mapsto 0} I(\alpha)$
3. On admet que la fonction f est postive sur $\big]0\,;1\big]$. Interpréter graphiquement le résultat précédente.

4. Intégrale par parties - suites :

Exercice 12

Pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $\displaystyle I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}{\cdot}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

1. Calculer I_2.
2. Une relation de récurrence :
   a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n\geqslant 2$:
   $$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n){\cdot}I_n$$
   b. Calculer I_3.

Exercice 13

On considère la suite numérique $\big(J_n\big)$ définie, pour tout entier naturel n non nul, par :
$$J_n = \int_1^n \mathrm{e}^{-t}{\cdot}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la suite $\big(J_n\big)$ est croissante.
2. *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*
On définit la suite $\big(I_n\big)$, pour tout entier naturel n non nul, par :
$$I_n = \int_1^n (t+1){\cdot}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
   a. Justifier que, pour tout $t\geqslant 1$, on a :
   $$\sqrt{t+1} \leqslant t+1$$
   b. En déduire que : $J_n\leqslant I_n$.

c. Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel *(indépendant de n)*.

d. Que peut-on en conclure pour la suite (J_n)?

Exercice 14

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cdot \cos(n\cdot x)\,\mathrm{d}x$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n :
$\cos\left(n\cdot x\right) = (-1)^n \quad ; \quad \sin\left(n\cdot\pi\right) = 0$

2. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :
$I_n = \dfrac{(-1)^n\cdot \mathrm{e}^{\pi} - 1}{1+n^2}$

Exercice 15

On pose : $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} \ln x\,\mathrm{d}x$ et $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} \left(\ln x\right)^2\mathrm{d}x$

1. Calculer I_1.

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$I_2 = \dfrac{5}{4}\cdot \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - \dfrac{5}{e}$

Exercice 16

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \dfrac{1}{x^n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

1. Calculer I_2.

2. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que tout entier naturel $n \geqslant 2$:
$I_{n+1} = e - \dfrac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)\cdot I_n$

Exercice 17

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \dfrac{1}{x^n}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

1. Calculer I_2

2. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:
$I_{n+1} = e - \dfrac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)\cdot I_n$

3. Calculer I_3.

5. *Intégrale par parties - probabilite :*

Exercice 18

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. La probabilité pour un client d'attendre moins de t minutes est définie par :

$$\mathcal{P}(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda\cdot \mathrm{e}^{-\lambda\cdot x}\,\mathrm{d}x$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{t\mapsto+\infty} \int_0^t \lambda\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-\lambda\cdot x}\,\mathrm{d}x$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^t \lambda\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-\lambda\cdot x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de t.

2. En déduire que le temps moyen est $\dfrac{1}{\lambda}$

3. Le temps moyen d'attente étant de $5\,min$, quelle est la probabilité d'attendre plus de $10\,min$? plus de $5\,min$?

6. *Intégrale par parties - annales :*

Exercice 19

L'objectif est d'étudier quelques propriétés de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-1\,;+\infty\right[$ par :
$f(x) = \left(1-x^2\right)\cdot \mathrm{e}^{-x}$

Partie A : Variations de f et tracé de la courbe (F)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[-1\,;+\infty\right[$ par :
$f(x) = \left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$

Dans le plan (P) muni du repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ *(unité graphique : $2\,cm$)* la représentation graphique de la fonction f est noté (F).

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de f : interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Déterminer, suivant les valeurs de x de l'intervalle $\left[-1\,;+\infty\right[$, le signe de x^2-2x-1 et celui de $f(x)$.

   b. Déterminer la fonction dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations ; préciser les valeurs exactes du minimum et du maximum.

3. Déterminer une équation de la tangente noté (T) à la courbe (F) au point A de (F) dont l'abscisse est 0.

4. a. Déterminer la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 0,1 près de chacun des coefficients directeurs des tangentes à la courbe (F) en $(1\,;0)$ et $C(-1\,;0)$.

   b. Tracer les trois tangentes à la courbe (F) en A, $B\left(A\,;0\right)$ et $C\left(-1\,;0\right)$ et la courbe (F).

Partie B : Intégrales et aires

Les surfaces S et $S_1(u)$ du plan (P), où u est un réel donné de l'intervalle $[1\,;+\infty[$ sont définies par :

- S est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :
  $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$
- $S_1(u)$ est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :
  $1 \leqslant x \leqslant u$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$

Les aires respectives de ces surfaces sont notées $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1(u)$. Leurs valeurs exactes seront exprimées en unités d'aire.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où x est un réel positif.

En procédant par deux intégrations par parties successives, déterminer cette intégrale.

2. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t$.

En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$

3. Déterminer, en fonction de u où $u \geqslant 1$, l'aire $\mathcal{A}_1(u)$ puis la limite, lorsque u tend vers $+\infty$, de $\mathcal{A}_1(u)$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

4. L'objectif est de déterminer le réel α supérieur ou égal à 1 pour lequel :
$\mathcal{A}_1(\alpha) = \mathcal{A}$

a. Démontrer que, sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, l'équation $\mathcal{A}_1(x) = \mathcal{A}$ est équivalente à : $x = 2\cdot\ln(1+x)$

b. Etudier le sensede variations de la fonction h définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par : $h(x) = x - 2\cdot\ln(1+x)$.
Démontrer que, sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, l'équation $x = 2\cdot\ln(1+x)$ admet exactement une solution et que celle-ci, noté α, vérifie la condition : $2 < \alpha < 3$.

c. Déterminer, en indiquant la méthode utilisée, un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.
Déterminer $f(\alpha)$ sous la forme d'une fonction rationnelle de α puis l'encadrement de $f(\alpha)$, qu'on déduira du pécédent, d'amplitude 2×10^{-4}

Exercice 20

1. On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$$

On donne ci-dessous le tableau de variations de g :

x	0		$2{,}3$	x_0	$2{,}4$		$+\infty$
Variation de g	$-\infty$	$\nearrow$		0		$\nearrow$	$+\infty$

Démontrer toutes les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5\ln x}{x}$$

a. Montrer que $f(x_0) = \dfrac{10}{x_0^2}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

b. Soit a un réel. Pour $a > 1$, exprimer $\displaystyle\int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de a.

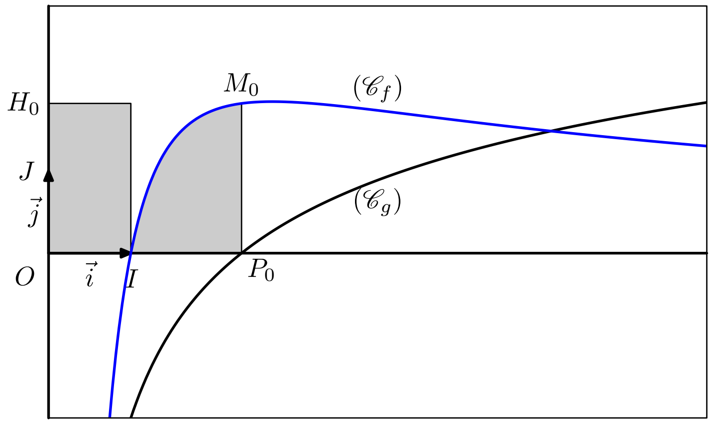
3. On a tracé dans le repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

On appelle I le point de coordonnées $(1\,;0)$, P_0 le point d'intersection de $(\mathscr{C}_g)$ et de l'axe des abscisses, M_0 le point de $(\mathscr{C}_f)$ ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.

On nomme $(\mathscr{D}_1)$ le domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et les segments $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$.

On nomme $(\mathscr{D}_2)$ le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de $[OI]$ et $[OH_0]$.

Démontrer que les deux domaines $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.



Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2+x}$

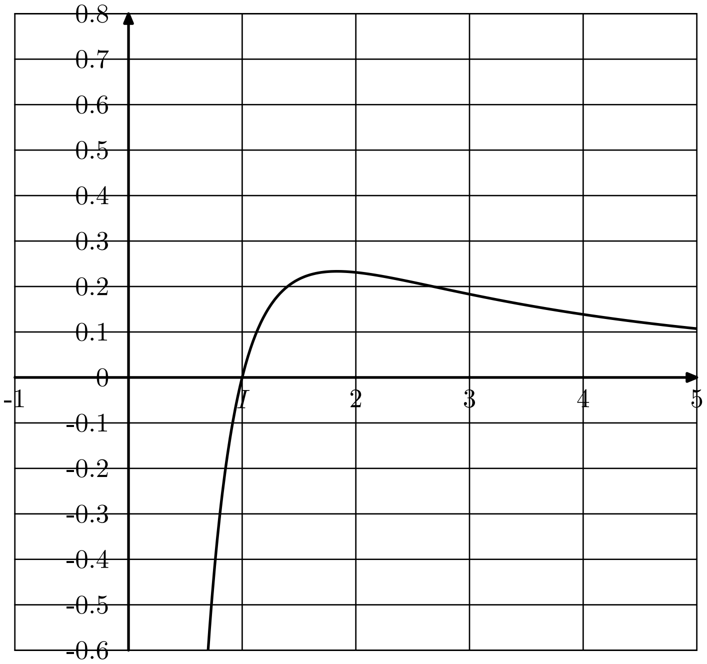
1. Montrer que pour tout $x > 1$: $\dfrac{\ln x}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x}$

2. a. Calculer $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ *(on pourra utiliser une intégration par parties pour cette dernière)*

b. En déduire un encadrement de $K = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. la figure ci-dessous représente la courbe représentative de f *(unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité)*. On considère l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :

$$\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$ et on note $\mathscr{A}$ son aire.



A l'aide de l'encadrement trouvé au 2. b. , donner un encadrement $\mathscr{A}$ en cm^2.

Exercice 22

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :
$$g(x)=\frac{1}{x(x^2-1)}$$
   a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x>1$:
$$g(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}$$
   b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$
Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :
$$I=\int_2^3\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}\ln x\,\mathrm{d}x$$
On donnera le résultat exact sous la forme $p{\cdot}\ln 2+q{\cdot}\ln 3$, avec p et q rationnels.

Exercice 23

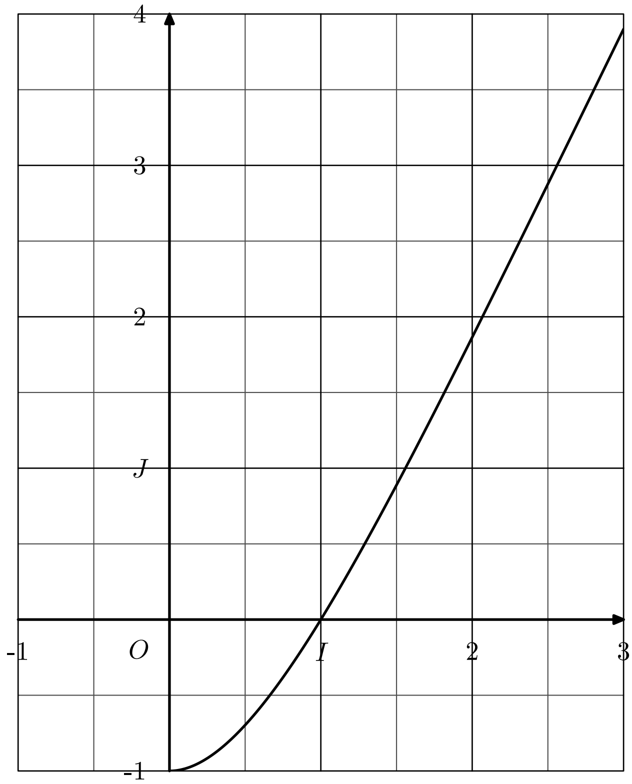
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=(x-1)\left(2-\mathrm{e}^{-x}\right)$$
Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormé ci-dessous *(unité graphique 2 cm)*

1. a. Etudier la limite de f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite Δ d'équation $y=2x-2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
   c. Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que :
$$f'(x)=x\mathrm{e}^{-x}+2\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$$
   b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x)>0$.
   c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

4. a. Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ.
   b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.



Exercice 24

L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

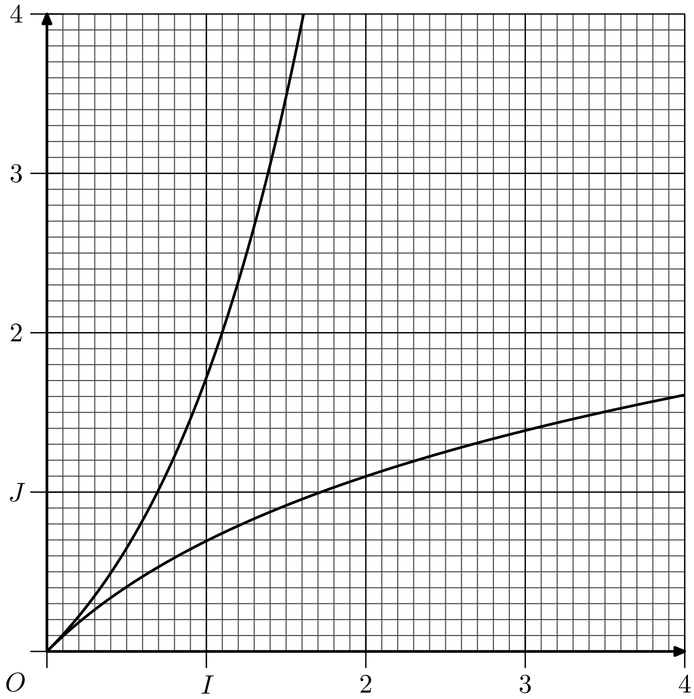
On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, par :
$$f(x)=\ln(x+1)\quad;\quad g(x)=\mathrm{e}^x-1$$
On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans une repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par la candidat.

1. Vérifier que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune au point $O(0\,;0)$. Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.

2. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

3. Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre $I(a)=\displaystyle\int_0^a\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.
   a. En utilisant des considérations d'aires, démontrer que :
$$I(a)=a\cdot\ln(a+1)-\int_0^{\ln(a+1)}\left(\mathrm{e}^x-1\right)\mathrm{d}x$$
   b. En déduire la valeur de $I(a)$.
   c. Retrouver la valeur de $I(a)$ en effectuant une intégra-

tion par parties.



Exercice 25

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Soit $a\in[0\,;+\infty[$. On note $I_0(a)=\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t}$ et pour $k\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_k(a)=\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer $I_0(a)$ en fonction de a.
2. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1(a)$ en fonction de a.
3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :
$$I_{k+1}(a)=\frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1}+I_k(a)\quad \text{pour tout } k\in\mathbb{N}^*$$
4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$:
$$P(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+x.$$
Démontrer en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que :
$$I_5(a)=\ln(1+a)-P(a)$$
5. Soit $J(a)=\displaystyle\int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t$. Calculer $J(a)$.
6. a. Démontrer que pour tout $t\in[0\,;a]$:
$$\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}\geqslant (t-a)^5$$
   b. Démontrer que pour tout $a\in[0\,;+\infty[$:
$$J(a)\leqslant I_5(a)\leqslant 0$$
7. En déduire que pour tout $a\in[0\,;+\infty[$:
$$\big|\ln(1+a)-P(a)\big|\leqslant\frac{a^6}{6}.$$
8. Déterminer, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice 26

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=(x-1)\big(2-\mathrm{e}^{-x}\big)$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormé ci-dessous *(unité graphique 2 cm)*

1. a. Etudier la limite de f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite Δ d'équation $y=2x-2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
   c. Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.
2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que :
$$f'(x)=x\cdot\mathrm{e}^{-x}+2\cdot\big(1-\mathrm{e}^{-x}\big).$$
   b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif : $f'(x)>0$
   c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.
3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.
4. a. Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ.
   b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.

Exercice 27

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :
$$I=\int_0^1\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right)\mathrm{d}x$$

1. a. Etudier les variations de la fonction :
$$f: x\longmapsto f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}$$
sur l'intervalle $[0\,;1]$.
   b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, on a :
$$\frac{1}{e}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$$
2. Soit J et K les intégrales définies par :
$$J=\int_0^1 (2+x)\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\quad ;\quad K=\int_0^1 x^2\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$
   a. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que :
$$J=3-\frac{4}{e}$$
   b. Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que :
$$\frac{1}{3\cdot e}\leqslant K\leqslant\frac{1}{6}.$$
   c. Démontrer que : $J+K=4\cdot I$.
   d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I.

7. Intégrale par parties - suites et annales :

Exercice 28

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2\mathrm{e}^{1-x}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 *cm*.

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathscr{C}$ peut-on en tirer?

b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f'.

c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$$

a. Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n.

b. Calculer I_1, puis I_2.

c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 1. c..

3. a. Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0\,;1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n\leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x}\leqslant x^n e$$

b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 29

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par

$$f(x)=x\ln(x+1)$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ est donnée en annexe.

1. a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

b. L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe $(\mathscr{C})$ au point O?

2. On pose : $I=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x\neq 1$,

$$\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

b. Calculer I.

3. A l'aide d'un intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2., calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0{,}25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0\,;1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$$

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
La suite (u_n) converge-t-elle?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$0\leqslant u_n\leqslant\frac{\ln 2}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 30

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2. On définit, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, l'intégrale :

$$I_n=\int_0^2\frac{1}{n!}(2-x)^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_1.

2. Etablir que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:

$$0\leqslant I_n\leqslant\frac{2^n}{n!}\left(\mathrm{e}^2-1\right)$$

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:

$$I_{n+1}=I_n-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

4. Démontrer par récurrence que :

$$\mathrm{e}^2=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\cdots+\frac{2^n}{n!}+I_n$$

5. On pose, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $\quad u_n=\dfrac{2^n}{n!}$.

a. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n\geqslant 3$:

$$u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}u_n.$$

b. En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant 3$:

$$0\leqslant u_n\leqslant u_3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).

7. Justifier enfin que :

$$\mathrm{e}^2=\lim_{n\mapsto+\infty}\left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\cdots+\frac{2^n}{n!}\right)$$

Exercice 31

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par :
$f(x)=(1+x)\cdot\mathrm{e}^{-x}$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ d'unité graphique 1 *cm*.

1. a. Etudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

a. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (-2-b)\cdot\mathrm{e}^{-b} + (2+a)\cdot\mathrm{e}^{-a}$$

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $a\in\mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\int_{-1}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = e$

Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire?

Exercice 32

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non-nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n\cdot\cos t\,\mathrm{d}t \quad ; \quad y_n = \int_0^1 t^n\cdot\sin t\,\mathrm{d}t$$

1. a. Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

b. Etudier les variations de la suite (x_n).

c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n)?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non-nul :

$$x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

b. En déduire la limite de la suite (x_n).

3. a. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non-nul :

$$x_{n+1} = -(n+1)\cdot y_n + \sin(1).$$

b. En déduire que : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} y_n = 0$

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul :

$$y_{n+1} = (n+1)\cdot x_n - \cos(1)$$

Déterminer : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n\cdot x_n$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n\cdot y_n$

8. *Intégrale par parties - équation différentielles et annales :*

Exercice 33

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

2. Déterminer la solution ϕ de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie les conditions :

$$\phi(0) = 0 \quad ; \quad \phi'(0) = -e$$

Partie B

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x\cdot\mathrm{e}^{2x+1}$$

a. Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$?

b. Etudier le sens de variation de f.

c. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

d. Dresser le tableau de variations de f.

e. On appelle $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans une repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ *(unité graphique : 4 cm)*

Quelle est la tangente à $(\mathscr{C})$ au point O?

Ecrire une équation de la tangente T à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $(-A)$.

f. On appelle (Γ) la représentation graphique dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^x$$

Quelle est la tangente à (Γ) au point d'abscisse $(-A)$?

2. On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 1 + e\cdot x\cdot\mathrm{e}^x$$

a. Etudier le sens de variation de h.

En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

b. Etudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Γ).

c. Tracer, sur le même graphique, les courbes T, $(\mathscr{C})$ et (Γ).

3. Soit m un réel quelconque et M le point de la courbe (Γ) d'abscisse M.

a. Ecrire une équation de la tangente D à (Γ) en M.

b. La tangente D coupe les axes de coordonnées en A et B.

Calculer, en fonction de m ; les coordonnées du milieu J du segment $[AB]$.

c. Prouver que J appartient à $(\mathscr{C})$.

d. Tracer (D) et J pour $m=0$.

Partie C

1. Soit x un réel quelconque.

A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x t\cdot\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$$

2. Soit x un réel négatif.

Calculer l'aire $\mathcal{A}(x)$, exprimée en cm^2, de l'ensemble des points N dont les coordonnées $(u\,;v)$ vérifient :

$$\begin{cases} x \leqslant u \leqslant 0 \\ 0 \leqslant v \leqslant f(x) \end{cases}$$

3. Calculer $\mathcal{A}(-1)$.

4. $\mathcal{A}(x)$ admet-elle une limite quand x tend vers moins

l'infini? Si oui, laquelle?

Exercice 34

Partie A

On considère l'équation différentielle :

$(E): \; y' + y = \mathrm{e}^{-x}$

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $\quad u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle :
$(E_0): \; y' + y = 0$

3. Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si, et seulement si, $v-u$ est solution de (E_0).

4. En déduire toutes les solutions de (E).

5. Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

Partie B

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$f_k(x) = (x+k)\cdot\mathrm{e}^{-x}$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormé $\left(O\,;\, \overrightarrow{i}\,;\, \overrightarrow{j}\right)$.

1. Déterminer les limites f_k en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x.

3. En déduire le tableau de variations de f_k.

Partie C

1. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par :
$$I_0 = \int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$
et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :
$$I_n = \int_{-2}^{0} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

   a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0.

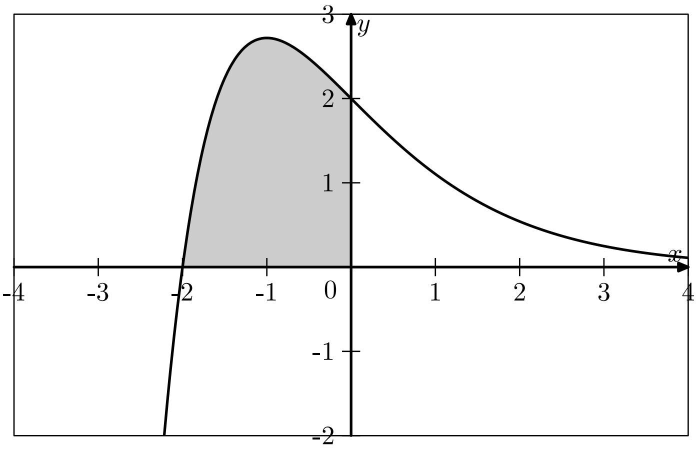
   b. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :
   $$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\cdot\mathrm{e}^2 + (n+1)\cdot I_n$$

   c. En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2.

2. Le graphique ci-dessous représente une courbe $\mathscr{C}_k$ qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la partie **B**.

   a. A l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.

   b. Soit $\mathscr{S}$ l'aire de la partie hachurée *(en unité d'aire)* ; exprimer $\mathscr{S}$ en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.



Exercice 35

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par :

$f(x) = \left(20x+10\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\, \overrightarrow{i}\,;\, \overrightarrow{j}\right)$ *(unité graphique 1 cm)*

1. Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

3. Etablir que l'équation $f(x)=10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

5. Calculer l'intégrale : $\quad I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$, est $y(0)=10$.
On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle :
$$(E): y' + \frac{1}{2}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie **A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

   a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ vérifiant $g(0)=10$. Démontrer que la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, de l'équation différentielle :
   $$(E') : y' + \frac{1}{2}y = 0$$

   b. Résoudre l'équation différentielle (E').

   c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique resdescent-elle à sa valeur initiale? Le résultat sera arrondi à la minute.

4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;3]$.

Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

9. Intégrale et volumes :

Exercice 36

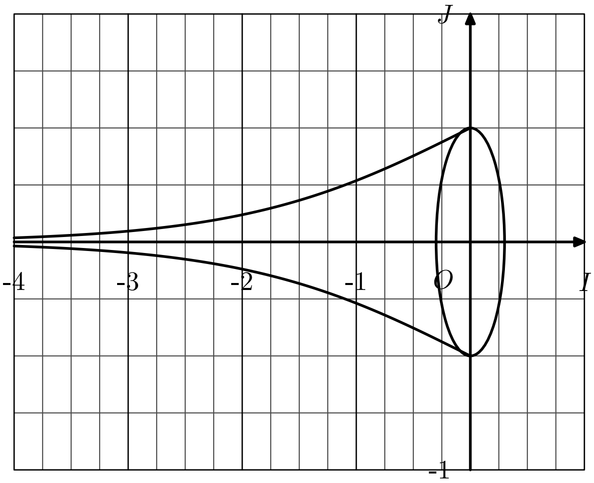
On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

Soit λ un réel positif, on note $\mathscr{V}(\lambda)$ l'intégrale :

$$\int_{-\lambda}^{0} \pi\cdot\big[f(x)\big]^2\,\mathrm{d}x$$

On admet que $\mathscr{V}(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue pour $-\lambda \leqslant x \leqslant 0$.



1. Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel x :
$$\frac{\mathrm{e}^{2\cdot x}}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \frac{a\cdot\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} + \frac{b\cdot\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$$

2. Exprimer $\mathscr{V}(\lambda)$ en fonction de λ.

3. Déterminer la limite de $\mathscr{V}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Exercice 37

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = x^2\cdot\ln x$

La courbe $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.

On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe (Ox) de la région plane délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe (Ox) et les droites d'équations :

$$x = \frac{1}{e} \quad ; \quad x = 1$$

On note V un mesure, exprimée en unités de volume, du volume de ce solide et on admet que :

$$V = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \pi\cdot\big[f(x)\big]^2\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer qu'une primitive de la fonction :
$x \longmapsto x^4\cdot\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$
est la fonction : $x \longmapsto \dfrac{x^5}{25}\cdot\big(5\cdot\ln x - 1\big)$.

2. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que :
$$V = \frac{\pi}{125}\cdot\left(2-\frac{37}{\mathrm{e}^5}\right)$$

Exercice 38

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x\cdot\mathrm{e}^{-x+2}$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.

Partie A

1. Dresser le tableau des variations de f sur $[0\,;+\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.

2. a. Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction f et de la fonction logarithme népérien ; on notera $\mathscr{L}$ cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation
$f(x) = \ln(x)$
sur $[1\,;+\infty[$.

   b. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$g(x) = \ln(x) - f(x)$
est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
En déduire que l'équation $f(x)=\ln(x)$ admet une unique solution α sur $[1\,;+\infty[$.

   c. Déterminer à 10^{-3} près une valeur approchée de α.

Partie B

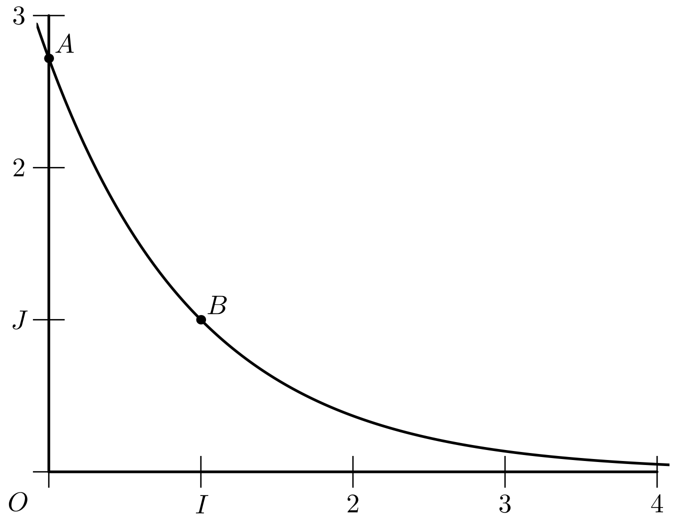
1. A l'aide d'une double intégration par parties, déterminer :
$$I = \int_0^3 x^2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

2. On définit le solide $\mathscr{S}$ obtenu par révolution autour de l'axe (Ox) de la courbe déquation $y=f(x)$ pour $0\leqslant x\leqslant 3$ dans le plan (xOy) *(repère orthonormé d'unité 4 cm)*. On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ du solide est donné par :
$$\mathscr{V} = \pi\int_0^3 \big[f(x)\big]^2\,\mathrm{d}x$$

   a. Exprimer $\mathscr{V}$ en fonction de I.

   b. Déterminer alors une valeur approchée à $1\,cm^3$ près du volume du solide.

Exercice 39



On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

(E) : $y' + y = 0$ et telle que $f(0)=e$

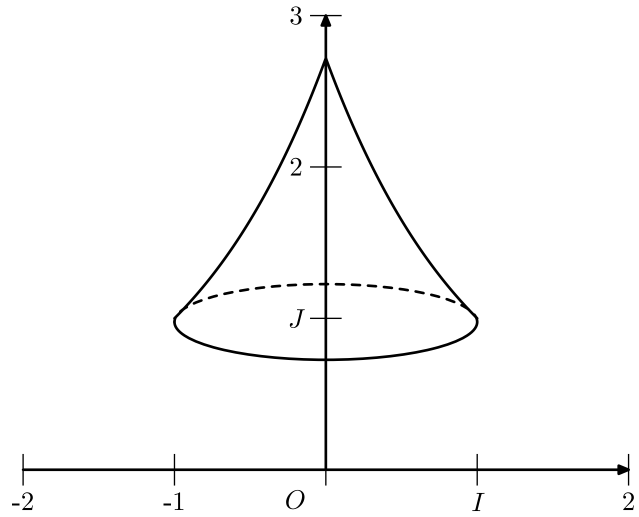
1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.

2. Soit t un réel donné de l'intervalle $[1\,;e]$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{1-x}=t$ d'inconnue x.

3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.
On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\widehat{AB}$ comme représenté ci-dessous. On note V son volume.

On admet que : $V=\pi\cdot\displaystyle\int_1^e (1-\ln t)^2\,\mathrm{d}t$

Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



10. Anciennes annales (avant 2012) :

Exercice 40

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right)\cdot\mathrm{e}^{-x}$

(a.) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

(b.) Calculer $f'(x)$ et montrer que :
$f'(x) = 2x\left(-x^2 + 5x - 4\right)\cdot\mathrm{e}^{-x}$.

(c.) Dresser le tableau de variations de f.

(d.) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ *(unité graphique : 1 cm)*.

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\cdot\mathrm{e}^{-x}dx$

(a.) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

(b.) On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2 :
$I_n = n\cdot I_{n-1} - \dfrac{1}{e}$.
Détermienr I_2 et I_3.

(c.) Soit $\mathcal{A}$ l'aire, exprimé en cm^2, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$. Calculer $\mathcal{A}$.

3. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On définit la fonction v sur $]0\,;+\infty[$ par $v(x)=u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(a.) On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a\,;b]$ *(où $0<a<b$)*.
Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\dfrac{1}{b}\,;\dfrac{1}{a}\right]$.

(b.) On définit maintenant la fonction g par $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0\,;+\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.
Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

(c.) Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

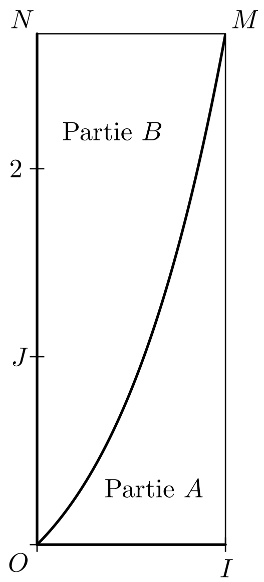
Exercice 41

Première partie

Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 x\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Deuxième partie

La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire $OIMN$ telle que, dans le repère orhonormal $\left(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}\right)$, la ligne courbe $\mathscr{C}$ reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\cdot\mathrm{e}^x$. Cette courbe partage la cible $OIMN$ en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.



Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontière de la cible, ni la courbe $\mathscr{C}$.

Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\frac{1}{2e}$.
   Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B?

2. On lance de manière indépendante trois fléchettes:

   a. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de $\mathcal{X}$. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.

   b. Soit E l'évènement: "*Exactement deux fléchettes atteignent la partie A*".
   Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E.

   c. Soit F l'évènement: "*les trois fléchettes atteignent la partie B*". Calculer la probabilité de F *(on donnera la valeur exacte)*.
   Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans partie B?

3. On lance cette fois de manières indépendante n fléchettes.

   a. Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.

   b. Déterminer le plus petit entier $n\in\mathbb{N}$ tel que $p_n \geqslant 0{,}99$.

Exercice 42

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$$

1. a. Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f'(x)$ est du signe de:
   $$N(x) = -\Big[2\big(x\cdot\sqrt{x} - 1\big) + \ln x\Big]$$

   b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0<x<1$ et $x>1$.

   c. En déduire le sens de variation de f sur $\big]0\,;+\infty\big[$ et les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée maximale.

2. On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $\big]0\,;1\big]$.

   a. Exprimer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de α *(on pourra utiliser une intégration par parties)*.

   b. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.

On définit une suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $\big[1\,;2\big]$ et:

$$\text{pour tout entier naturel } n:\quad u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1$$

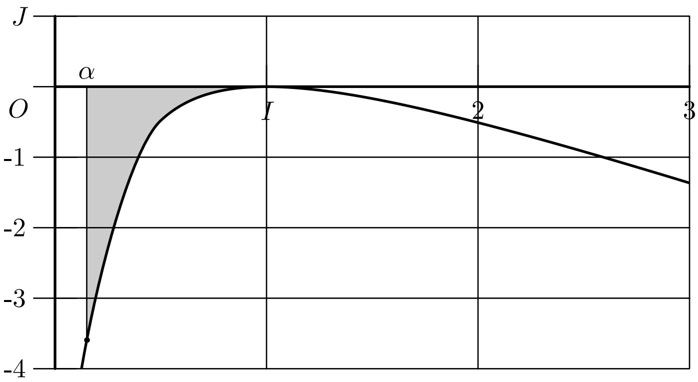
3. a. Démontrer, pour tout réel x élément de $[1\,;2]$, la double inégalité:
   $$0 \leqslant \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leqslant 1$$

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $\big[1\,;2\big]$.

4. En remarquant que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)+u_n$, déterminer le sens de variation de la suite $\big(u_n\big)$.

5. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

   b. Déterminer la valeur exacte de ℓ.



Exercice 43

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$ par:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\big(3 - 2\ln x\big) + 1 \quad \text{si } x>0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\big(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\big)$.

Partie A

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f?

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. a. Etudier la dérivabilité de f en 0.

   b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$ et calculer $f'(x)$ pour $x>0$, f' désignant la fonction dérivée de f.

3. Etudier le sens de variations de f sur $[0\,;+\infty[$, puis dresser son tableau de variations.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Calculer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x=1$.

2. On considère la fonction $g:x\mapsto f(x)-2x-\frac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $\big]0\,;+\infty\big[$.

   a. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g. Etudier le sens de variations de g'. En déduire le signe de $g'(x)$ sur $\big]0\,;+\infty\big[$.

   b. Etudier le sens de variations de g.
   En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}$.

3. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{D}$ *(unité graphique*

2 cm)

Partie C

n est un entier naturel non nul.

1. Exprimer en fonction de n le réel : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \cdot \ln x \, dx$

   (on pourra utiliser une intégration par parties)

2. En déduire en fonction de l'entier n, l'aire $\mathscr{A}_n$ exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la tangente $\mathscr{D}$ et les deux droites d'équation $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$.

3. calculer $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \mathscr{A}_n$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 44

Partie A

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^t \, dt.$$

1. Montrer que la fonction $f : t \mapsto (2-t) \cdot e^t$ est une primitive de $g : (1-t) \cdot e^t$ sur $[0;1]$.
   En déduire la valeur de u_1.

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul :

   $$u_{n+1} = (n+1) \cdot u_n - 1 \qquad (R)$$

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par la deuxième calculatrice
1	7,1828182845E-01	7,1828182846E-01
2	4,3656365691E-01	4,3656365692E-01
3	3,0969097075E-01	3,0969097076E-01
4	2,3876388301E-01	2,3876388304E-01
5	1,9381941508E-01	1,9381941520E-01
6	1,6291649051E-01	1,6291649120E-01
7	1,4041543358E-01	1,4041543840E-01
8	1,2332346869E-01	1,2332350720E-01
9	1,0991121828E-01	1,0991156480E-01
10	9,9112182825E-02	9,9115648000E-01
11	9,0234011080E-02	9,0272128000E-02
12	8,2808132963E-02	8,3265536000E-02
13	7,6505728522E-02	8,2451968000E-02
14	7,1080199309E-02	1,5432755200E-01
15	6,6202989636E-02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E-02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E-03	3,3965641216E+02
18	-8,7016273909E-01	6,1128154189E+03
19	-1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	-3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	-7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	-1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	-3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	-8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	-2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice?

Partie C

Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \quad u_n = \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^t \, dt$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geqslant 0$.

2. a. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(1-t)^n e^t \leqslant e \times (1-t)^n$

   b. En déduire que pour tout n non nul : $u_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n) :

$$u_{n+1} = (n+1) \cdot u_n - 1$$

Etant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \quad ; \quad v_{n+1} = (n+1) \cdot v_n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n :
$v_n = u_n + (n!)\cdot(a+2-e)$
où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

2. Etudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a. *(On rappelle que* $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n! = +\infty$*)*

3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

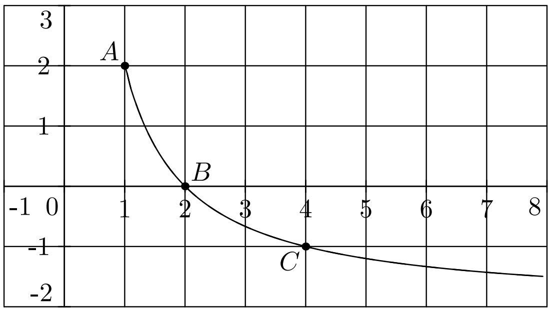
12. Exercices non-classés :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 45

Partie I

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[1;8]$, strictement décroissante, dont la représentation graphique $\mathscr{C}$ dans repère orthonormé est donnée ci-contre. La courbe $\mathscr{C}$ contient les points $A(1;2)$, $B(2;0)$ et $C(4;-1)$.



1. En utilisant la représentation graphique, donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

2. On suppose que, pour tout x de l'intervalle $[1;8]$ $f(x)$ s'écrit : $f(x) = -2 + \dfrac{4}{x}$

Retrouver par le calcul, le résultat du 1..

Partie II

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[1;8]$ par :

$F(x) = 5 - 2x + 4\ln(x)$.

1. Montrer que F a pour dérivée la fonction f de la partie **I**.

2. Etudier les variations de la fonction F sur l'intervalle $[1;8]$, puis dresser son tableau de variation.

3. $\mathscr{C}_F$ désigne la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthogonal d'unités graphiques : en abscisse $1\,cm$, en ordonnée $2\,cm$.

   a. Soit la droite Δ, tangente à la courbe $\mathscr{C}_F$ en son point d'abscisse 1. Montrer que le coefficient directeur de la droite Δ est égal à 2.

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}_F$ et la droite Δ.

Formulaire :
La dérivée de la fonction ln sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est la fonction qui, à x, associe $\dfrac{1}{x}$.