Hors programme lycée/Probabilité

1. Dénombrement et équiprobabilité : *(+4 exercices pour les enseignants)*

Exercice 1

Une expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

♡	♢	♠	♣
As	As	As	As
R	R	R	R
D	D	D	D
V	V	V	V
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7

1. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   - A : *“La carte tirée est un pique”* ;
   - B : *“La carte tirée est une figure”* ;
   - C : *“La carte tirée est noire”* ;
   - D : *“La carte tirée est le valet”* ;

2. Déterminer les probabilités des évènements suivants :

   a. $A\cap B$ b. $A\cap C$ c. $A\cup B$ d. $B\cup C$

   e. $C\cap D$ f. $C\cup D$ g. $C\cap\overline{D}$ h. $\overline{C}\cup\overline{D}$

Exercice 2

On considère un jeu de 32 cartes représenté ci-contre. On tire au hasard une carte dans ce jeu et on considère les évènements ci-dessous :

♡	♢	♠	♣
As	As	As	As
R	R	R	R
D	D	D	D
V	V	V	V
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7

- A : *“la carte tirée est un carreau”*
- B : *“La carte tirée est une figure”*
- C : *“La carte tirée porte le nombre 8 ou 9”*

Déterminer les probabilités ci-dessous :

a. $\mathcal{P}(\overline{C})$ b. $\mathcal{P}(A\cap C)$

c. $\mathcal{P}(A\cup\overline{B})$ d. $\mathcal{P}(B\cap\overline{C})$

Exercice 3

Partie A

1. Déterminer les 20 diviseurs poistifs de 240.
2. Dans le tableau ci-dessous, parmi ces 20 entiers rangés dans l'ordre croissant, on a coché les multiples de 10

   Reproduire et compléter le tableau, en cochant les multiples de 2 et de 5

Diviseurs de 240								10				20		30	40		60	80	120	240
Multiples de 10								×				×		×	×		×	×	×	×
Diviseurs de 2																				
Diviseurs de 5																				

Partie B

On étudie l'épreuve aléatoire qui consiste à tirer au hasard un nombre parmi les 20 diviseurs de 240.

1. Quelle est la probabilité de tirer le nombre 2? le nombre 7?
2. On considère les événements suivants :
   - A : “On tire un multiple de 10”
   - B : “On tire un multiple de 2”
   - C : “On tire un multiple de 5”

   Déterminer les probabilités $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(C)$ des événements A, B, C.
3. On refait cette épreuve aléatoire quatre fois de suite dans les mêmes conditions.

   a. Quelle est la probabilité de tirer 4 fois de suite un multiple de 10?

   b. Quelle est la probabilité de ne jamais tirer un multiple de 10?

   c. Quelle est la probabilité de tirer qu moins une fois un multiple de 10?

   d. Pour tout naturel n compris entre 1 et 4, on note A_n l'événement :
   “*Obtenir un multiple de 10 pour la première fois au n-ième tirage*”
   Calculer les probabilités $\mathcal{P}(A_2)$, $\mathcal{P}(A_3)$ et $\mathcal{P}(A_4)$ des événements A_2, A_x, A_4.

2. Adequation d'une loi de probabilité : *(+2 exercices pour les enseignants)*

Exercice 4

Une étude s'intéresse aux achats faits par des internatutes par l'intermédiare d'internet. Sur 1 000 internautes ayant acheté ce matériel, on a établi la statistique suivante :

	Sites européens	Site canadien	Site indien
Effectif d'acheteurs	335	310	355

1. On note respectivement f_1, f_2 et f_3 les fréquences associés aux effectifs précédents. On pose :
   $$d^2=\sum_{k=1}^{k=3}\Big(f_k-\frac{1}{3}\Big)^2.$$
   Calculer d^2 puis $1000{\cdot}d^2$.
2. On simule 3 000 fois l'expérience consistant à tirer un nombre au hasard parmi $\{1\,;2\,;3\}$ avec équiprobabilité. Pour chacune de ces simulations, on obtient une valeur

de $1000 \cdot d^2$. Voici les résultats :

Min.	Premier décile	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Neuvième décile	Max.
0,000 5	0,076 3	0,211 1	0,488 45	0,940 1	1,5104	5,925 6

Au risque de 10 %, peut-on considérer que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable.

Exercice 5

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier ; on souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré. Pour cela, on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face est cachée ; on obtient les résultats suivants :

Face i	1	2	3	4
Effectif n_i	34	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face n_i et d^2_{obs} le réel :
$$\sum_{i=1}^{4} \left(f_i - \frac{1}{4} \right)^2$$

On simule ensuite 1 000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble $\{1;2;3;4\}$ puis, pour chaque simulation, on calcule :

$$d^2 = \sum_{i=1}^{4} \left(F_i - \frac{1}{4} \right)^2$$

où F_i est la fréquence d'apparition du nombre i. Le 9^{e} décile de la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 est égale à 0,009 8.

Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré?

3. Autres tirages : successifs avec remise :

Exercice 6

On dispose de 26 cartes où sont écrites les 26 lettres de l'alphabet. On tire successivement et avec remise trois cartes de ce jeu. On suppose les différents tirages indépendants entre eux.

1. Combien de mots de trois lettres peut-on ainsi former?

2. a. Déterminer la probabilité de l'évènement :
   A_1 : "*Le mot commence par la lettre B*".

   b. Déterminer la probabilité de l'évènement :
   A_2 : "*La seconde lettre du mot est la lettre B*".

3. a. Déterminer la probabilité de l'évènement :
   B_1 : "*La première lettre du mot est la seule lettre B*"

   b. Quelle est la probabilité de l'évènement :
   C : "*Le mot contient une seule fois la lettre B*".

5. Autres tirages : simultanés :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 7

On donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à 10^{-3} près.

Un enfant met 10 billes rouges et 3 billes vertes dans une boîte cubique.

Dans ce jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle $\mathcal{X}$ la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

1. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

2. Calculer l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$.

Exercice 8

Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher. On extrait simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge?

6. Autres tirages :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 9

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un entier pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.

On appelle :

- N l'évènement : "*la boule noire figure parmi les boules tirées*" ;

- G l'évènement : "*le joueur gagne*".

1. Déterminer la probabilité de l'évènement N.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\dfrac{3}{10}$. On pourra s'aide d'un arbre pondéré.
3. Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire?

Exercice 10

Une urne contient cinq boules bleues, numérotées de 1 à 5, quatre boules vertes numérotées de 1 à 4 et une boule rouge portant le numéro 1.
Ces boules étant indiscernables au toucher, dans chacune des deux parties, les différentes éventualités sont équiprobables.

Note : Les probabilités demandées seront présentées sous forme de fractions irréductibles

Partie 1 : tirages simultanés

On tire simultanément deux boules

1. Calculer le nombre de tirages possibles.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules vertes
3. Calculer la probabilité d'obternir deux boules de la même couleur
4. Calculer la probabilité d'obternir au moins une boule bleue.

Partie 2 : tirages successifs

On tire une boule, on note son numéro, puis sans remettre cette première boule tirée dans l'urne, on tire une autre boule et on note aussi son numéro. Avec ces deux numéros ainsi obtenus, on forme un entier naturel comportant deux chiffres. Le premier numéro tiré est pris comme chiffre des dizaines et le second comme chiffre des unités.

1. Calculer le nombre de tirages possibles.
2. Calculer la probabilité d'obtenir l'entier 24.