Hors programme lycée/Racines carrés

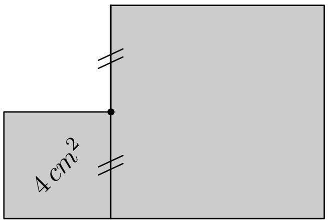
1. Introduction :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 1

Construire un carré dont l'aire est égale à la somme des aires des deux carrés représentés ci-contre.

Laisser apparentes toutes vos traces de recherche. Même si le travail n'est pas terminé, il en sera tenu compte dans la notation.



Exercice 2

1. Parmi les expressions ci-dessous, lesquelles définissent ou pas un nombre. Justifier votre réponse.

   a. $\dfrac{1}{3^2-9}$ b. $\sqrt{2}$ c. $\sqrt{-1}$

   d. $\sqrt{0}$ e. $\sqrt{(-1)^2}$ f. $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

2. Un élève affirme que : $\sqrt{20}=10$

   En utilisant seulement la définition de la racine carrée, justifier que son affirmation est fausse.

Exercice 3

Simplifier l'écriture des expressions suivantes :

a. $\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$ b. $\sqrt{\left(2+\sqrt{12}\right)^2-8\sqrt{3}}$

c. $\sqrt{(\pi-3)^2}$ d. $\sqrt{\sqrt{81}}$

e. $\sqrt{(-2)^2}$ f. $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

Exercice 4

1. Ecrire A sous forme de fraction irréductible.

   $$A=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}$$

2. a. Montrer que A est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-1} près.

   b. A est-il une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-2} près?

2. Relations multiplicatives :

(+3 exercices pour les enseignants)

Exercice 5

Sachant que $\sqrt{196}=14$, donner la valeur exacte des nombres exactes :

a. $\sqrt{1{,}96}$ b. $\sqrt{19600}$ c. $\sqrt{0{,}0196}$ d. $\sqrt{1960000}$

3. Simplifications additives :

Exercice 6

Ecrire B et C sous la forme, $a\sqrt{b}$, avec a et b nombres entiers *(b étant le plus petit possible).*

$$B=3\sqrt{5}-2\sqrt{45}+\sqrt{500} \quad ; \quad C=\left(\sqrt{3}+4\right)^2-19$$

4. Simplifications :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 7

Simplifier au maximum l'écriture des calculs suivants :

$$A=\sqrt{63}+4\sqrt{28}-9\sqrt{175} \quad ; \quad B=\frac{\sqrt{15}\times\sqrt{35}}{\sqrt{7}}$$

$$C=-\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{3}}+2\sqrt{8}-7\sqrt{72}$$

Exercice 8

Ecrire toutes les expressions sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b entier le plus petit possible :

a. $\sqrt{75}$ b. $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{16}}$

c. $\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ d. $\sqrt{2}+\sqrt{8}$

e. $5\sqrt{2}\times4\sqrt{18}$ f. $\sqrt{27}+3\sqrt{12}-5\sqrt{75}$

g. $7\sqrt{6}-3\sqrt{24}$ h. $\sqrt{10}\times\sqrt{18}+3\sqrt{5}$

6. Comparaison de nombres :

(+4 exercices pour les enseignants)

Exercice 9

Comparer sans l'aide de la calculatrice :

a. 6 et $\sqrt{33}$

b. $\sqrt{6}\times\sqrt{5}$ et 6

c. $10\sqrt{10}$ et 30

d. $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

e. $\sqrt{5+3}$ et $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

f. $2\sqrt{2}-3$ et $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$

Exercice 10

Sans l'aide de la calculatrice, effectuer la comparaison des couples de nombres proposées :

a. $2\sqrt{19}$ et $5\sqrt{3}$

b. $\dfrac{1}{\sqrt{35}}$ et $\dfrac{1}{6}$

c. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ et $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

d. $\sqrt{12}-\sqrt{7}$ et 5

e. $3\sqrt{5}+\sqrt{2}$ et $\sqrt{47+6\sqrt{10}}$

f. $\dfrac{6^{11}\times3\times4^{7}}{3^{12}}$ et $\sqrt{2^{50}}$

Exercice 11

Cet exercice doit être traité sans l'aide de la calculatrice :

1. On considère les deux nombres suivants :
$A=2\sqrt{3}$; $B=3\sqrt{2}$

a. Déterminer les valeurs exactes de A^2 et B^2.

b. Comparer les deux nombres A et B.

2. Comparer chaque couple de nombres ci-dessous :

a. 6 et $3\sqrt{6}$

b. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

c. $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{3}$

d. $2\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{8}$

Exercice 12

Sans l'usage de la calculatrice, comparer les couples de nombres ci-dessous :

a. $\sqrt{45}$ et 7

b. -3 et $-\sqrt{57}$

c. $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$

d. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ et $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

e. $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{\pi}$

f. $-\dfrac{1}{3}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Exercice 13

Comparer les couples de nombres suivants :

a. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

b. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$; $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

c. $\dfrac{5}{2}$; $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

d. $\dfrac{5\sqrt{8}}{4}$; $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

Exercice 14

Comparer les nombres suivants en justifiant votre méthode :

a. $\dfrac{1}{\sqrt{46}}$ et $\dfrac{1}{3\sqrt{5}}$

b. $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ et $\sqrt{35+12\sqrt{6}}$

c. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ et $\dfrac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$

d. $\sqrt{\dfrac{3^4\times12^2}{3^8\times4^4}}$ et $\dfrac{1}{36}$

7. Simplifications :

Exercice 15

On considère les nombres :

$$C=5\sqrt{3}+2\sqrt{27} \quad ; \quad D=3\sqrt{2}\times\sqrt{6}$$

Ecrire les nombres C et D sous la forme $a\sqrt{3}$, a étant un nombre entier.

Exercice 16

Effectuer les opérations suivantes en mettant le résultat sous la forme suivante $p\sqrt{q}$ où p est un entier relatif et q est un entier naturel le plus petit possible :

a. $\sqrt{500}$

b. $\sqrt{252}$

c. $\sqrt{6}\times\sqrt{48}$

d. $\sqrt{3^2+4^2}$

e. $5\sqrt{3}+2\sqrt{75}-3\sqrt{12}$

f. $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

Exercice 17

Donner la forme simplifiée de chacune des expressions suivantes :

a. $\sqrt{7\,500}$

b. $\sqrt{50}\times\sqrt{48}$

c. $\sqrt{45}+2\sqrt{500}-\sqrt{80}$

d. $2\sqrt{75}-\sqrt{48}$

e. $\dfrac{15\times10^4}{\sqrt{16\times10^{-6}}}$

f. $\sqrt{98}\times\sqrt{6}$

Exercice 18

Simplifier les calculs suivants :

a. $4\sqrt{2}+\sqrt{6}\times\sqrt{48}$

b. $\sqrt{27}+2\sqrt{12}-5\sqrt{75}$

c. $\dfrac{\sqrt{75}+\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$

d. $\dfrac{\sqrt{8}\times\sqrt{75}}{\sqrt{5}\times\sqrt{90}+\sqrt{24}\times\sqrt{12}}$

8. Racine carré, fractions, puissance :

(+6 exercices pour les enseignants)

Exercice 19

On donne :

$$A=\frac{7}{3}-\frac{2}{3}\div\frac{8}{7}\quad ;\quad B=\sqrt{12}-7\sqrt{3}-\sqrt{75}$$

$$C=\frac{0{,}3\times10^{2}\times5\times10^{-3}}{4\times10^{-4}}$$

1. Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Ecrire B sous la forme $a\sqrt{b}$, où a est une entier relatif et b un entier naturel le plus petit possible.
3. Calculer C et donner son écriture scientifique

Exercice 20

Les calculs intermédiaires doivent figurer sur la copie

1. Ecrire sous la forme $a\sqrt{3}$, a étant un entier, le nombre : $A=\sqrt{75}+4\sqrt{12}$
2. Prouver que :
   a. $\dfrac{2+\dfrac{3}{4}}{\dfrac{3}{4}-5}=-\dfrac{11}{17}$ b. $\dfrac{35\times10^{22}\times2\times\left(10^{-2}\right)^{6}}{42\times10^{10}}=\dfrac{5}{3}$

Exercice 21

On donne les nombres :

$$A=\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\times\frac{21}{8}\quad ;\quad B=\frac{3\times10^{2}\times1{,}8\times10^{-3}}{6\times10^{4}}$$

$$C=\sqrt{12}-5\sqrt{75}+2\sqrt{147}$$

1. Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
   Ecrire toutes les étapes du calcul.
2. a. Donner l'écriture décimale de B.
   b. Exprimer B en écriture scientifique.
3. Ecrire C sous la forme $a\sqrt{3}$, où a est un nombre entier.

Exercice 22

1. On donne : $A=\dfrac{\dfrac{2}{3}+3}{\dfrac{1}{3}+5}$
   Ecrire A sous la forme d'une fraction irréductible.
2. On donne : $B=2\sqrt{50}-3\sqrt{8}+7\sqrt{18}$
   Ecrire B sous la forme $a\sqrt{2}$, avec a un nombre entier.
3. On donne : $C=\dfrac{2{,}6\times10^{2}\times1{,}7\times10^{2}}{0{,}2\times10^{5}\times10^{3}}$
   Donner l'écriture scientifique de C.

Exercice 23

1. On considère les deux expression :

$$A=\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{2}\quad ;\quad B=\frac{16\times10^{-1}\times2}{\left(10^{3}\right)^{2}\times10^{-8}\times80}$$

   a. Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
   b. Vérifier que B est un nombre entier
   Ecrire les étapes du calcul.
   c. Brice affirme que "A est l'opposé de B".
   Est-ce vrai ? Justifier.
2. On considère les deux expressions :

$$C=2\sqrt{24}+\sqrt{96}-\sqrt{600}\quad ;\quad D=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)$$

   a. Mettre C sous la forme $a\sqrt{6}$, avec a entier relatif
   b. Développer et réduire D.

Exercice 24

1. On donne $A=\dfrac{3}{7}-\dfrac{15}{7}\div\dfrac{5}{24}$.
   Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
2. On donne :

$$B=\sqrt{300}-4\sqrt{27}+6\sqrt{3}\quad ;\quad C=\left(5+\sqrt{3}\right)^{2}$$

$$D=\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$$

   a. Ecrire B sous la forme $b\sqrt{3}$, où b est un nombre entier.
   b. Ecrire C sous la forme $e+f\sqrt{3}$, avec e et f entiers.
   c. Montrer que D est un nombre entier.

Exercice 25

1. Effectuer le calcul suivant : $A=1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{3+\dfrac{1}{3}}}$
2. Donner l'écriture du quotient suivant sous la forme $2^{m}\times3^{n}\times5^{p}\times7^{q}$ où m, n, p, q sont des entiers relatifs :

$$B=\frac{3\times15^{2}\times\left(2\times5^{3}\right)^{-2}}{7^{3}\times12^{4}}$$

3. Simplifier l'écriture des expressions suivantes :

$$C=\left(3\sqrt{2}+5\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)\quad ;\quad D=\frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$$

Exercice 26

On donne :

$$E=\frac{2}{3}+\frac{17}{2}\times\frac{4}{3}\quad ;\quad F=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{3}\times\sqrt{16}}{\sqrt{2}}$$

1. Démontrer que les nombres E et F sont égaux.
2. On donne $G=\left(10^{-1}+a\right)\times10^{2}$. Calculer le nombre a pour que l'égalité $E=G$ soit vraie.

9. *Expressions conjuguées :*

(+6 exercices pour les enseignants)

Exercice 27

1. Développer l'expression : $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$

2. Utiliser la question précédente pour simplifier l'expression :
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Exercice 28

1. a. Montrer que $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$ est un nombre entier.

   b. Pour simplifier l'écriture du quotient $\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, nous allons multiplié son numérateur et son dénominateur par $(2-\sqrt{3})$.

   Remarquer que le dénominateur a, alors, une valeur entière.

2. a. Montrer que $(2+3\sqrt{5})(2-3\sqrt{5})$ est un nombre entier relatif.

   b. Utiliser ce résultat pour écrire $\frac{\sqrt{5}-2}{2-3\sqrt{5}}$ avec un dénominateur entier.

3. Ecrire $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$ avec un dénominateur entier.

4. Ecrire $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ avec un dénominateur entier.

Exercice 29

Ecrire les expressions ci-dessous sans racines carrées au dénominateur :

a. $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$ b. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ c. $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}-4}$ d. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Exercice 30

Démontrer les égalités suivantes :

1. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=10$

2. $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$

   Rechercher l'expression simplifié de $(\sqrt{3}-1)^2$

3. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}}=\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

   avec $x\in\mathbb{R}_*^+$ *et* $y\in\mathbb{R}_*^+$ *tels que :* $x\neq y$.

Exercice 31

Etablir l'égalité : $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}=1$

Exercice 32

Simplifier l'écriture de chacun des expressions suivantes :

a. $\sqrt{63}-5\sqrt{7}+2\sqrt{2800}$ b. $(2\sqrt{3}+4\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

c. $\frac{2+\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ d. $\frac{\sqrt{5}-2}{1-\sqrt{2}}$

Exercice 33

Simplifier les écritures suivantes :

a. $\sqrt{175}-10\sqrt{112}+\sqrt{7}$

b. $(2\sqrt{2}-2)(\sqrt{200}+\sqrt{98}+\sqrt{18})$ c. $\frac{3\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}$

d. $\frac{\sqrt{27}-5}{\sqrt{3}-2}$ e. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Exercice 34

Comparer les nombres suivants en justifiant votre méthode :

a. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ et $\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ b. $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ et $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

c. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2}-1$ d. $\frac{15-\sqrt{2}}{14}$ et $\frac{14-\sqrt{2}}{15}$

11. *Racine carré et PGCD* :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 35

1. Déterminer le $PGCD$ des deux entiers 1323 et 243.

2. Donner la forme simplifiée de la fraction $\frac{\sqrt{1323}}{\sqrt{243}}$

Exercice 36

1. Déterminer le $PGCD$ des deux entiers 343 et 175.

2. Donner la forme simplifiée de la fraction $\frac{\sqrt{343}}{\sqrt{175}}$

Exercice 37

1. Déterminer le $PGCD$ des deux entiers 847 et 63.

2. Ecrire le nombre A sous la forme $a\sqrt{b}$:
   $A=\sqrt{847}+\sqrt{63}$

Exercice 38

1. Déterminer le $PGCD$ des deux entiers 567 et 175.

2. Ecrire le nombre A sous la forme $a\sqrt{b}$:
   $A=\sqrt{567}+\sqrt{175}$

Exercice 39

1. Sans calculer leur $PGCD$, dire pourquoi les entiers 648 et 972 ne sont pas premiers entre eux.

2. a. Calculer pgcd(972 ; 648).

   b. Prouver que : $\sqrt{648}+\sqrt{972}=18(\sqrt{3}+\sqrt{2})$