Hors programme lycée/Vecteurs

1. Base non orthogonale :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ quelconque, on considère les trois points suivants définis par leurs coordonnées :

$A(5\,;-2)$; $B(-3\,;-1)$; $C(-5\,;3)$

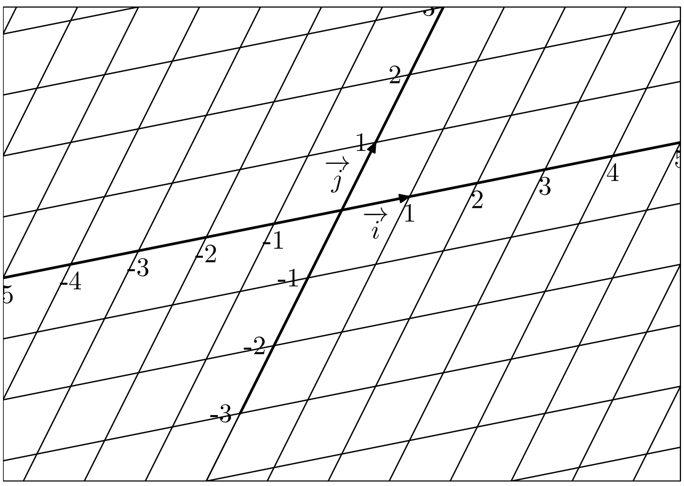
1. a. Déterminer les coordonnés du point M vérifiant la relation suivante : $7\cdot\overrightarrow{BM}=\dfrac{7}{3}\cdot\overrightarrow{CM}$

   b. Placer le point M dans le repère. Vérifier graphiquement que les trois points B, C et M sont alignés.

2. a. Déterminer les coordonnés du point G vérifiant la relation vectorielle : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

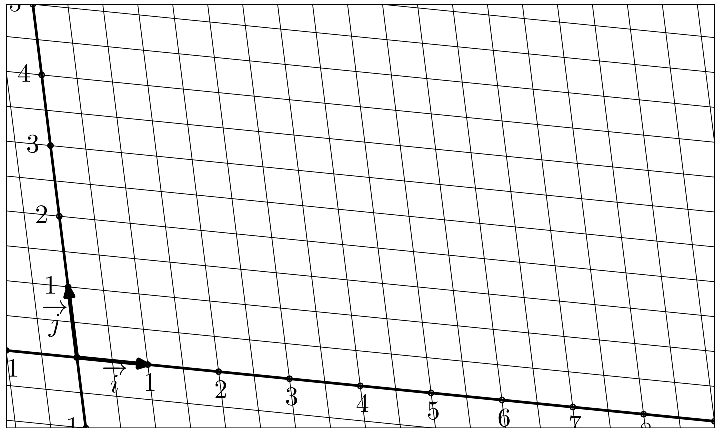
   b. Placer le point G dans le repère.

   c. Tracer les trois médianes du triangle ABC. Que remarque-t-on?



Exercice 2

On munit le plan d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ quelconque représenté ci-dessous :



1. Tracer un représentant de chacun des deux vecteurs : $\overrightarrow{u}(5\,;2)$; $\overrightarrow{v}(-3\,;-2)$

2. a. Tracer un représentant du vecteur $\overrightarrow{w}$ définie par : $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$

   b. Graphiquement, déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w}$.

   c. Comparer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w}$ relativement à celles des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

2. Repères choisis :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 3

Dans le plan, on considère un parallélogramme $ABCD$ et les deux points E et F définis par les relations :

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{5}{3}\cdot\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AF}=\dfrac{5}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$

1. Tracer une représentation de cette configuration.

2. On munit le plan du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$.

   a. Donner, sans justification, les coordonnées des points F, C et E.

   b. Démontrer que les points E, C et F sont alignés.

Exercice 4

On considère un trapèze $ABCD$ vérifiant l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$. Les droites (AC) et (BD) se coupent en M et les droites (AD) et (BC) se coupent en N.

1. a. Tracer une représentation de cette configuration.

   b. Emettre une conjecture quant à la position relative des points I, J, M, N?

On munit le plan du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$ quelconque :

2. Déterminer les coordonnées des points : A ; B ; D ; I ; C ; J

3. a. A quel axe appartient le point N ? En déduire l'abscisse du point N.

b. On note α l'unique nombre réel positif réalisant l'égalité :

$$DN = \alpha \cdot DA$$

A l'aide du théorème de Thalès, déterminer la valeur de α.

c. En déduire les coordonnées du point N.

4. a. Démontrer que : $AM = \dfrac{3}{4} \cdot AC$.

b. En déduire les coordonnées du point M.

5. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NJ}$, $\overrightarrow{NI}$ et $\overrightarrow{NM}$.

b. Confirmer la conjecture faite à la question 1. b. .

3. Autour du centre de gravité d'un triangle :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5

1. Dans le plan, placer trois points A, B, C non-alignés et le point I milieu du segment $[AB]$.

2. a. Placer le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{MC}$.

b. Placer le point N tel que : $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

3. a. Placer le point G centre de gravité du triangle ABC.

b. En utilisant la position du point G sur la médiane $[CI]$, établir l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

4. On munit le plan du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ quelconque.

a. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, C, I, M et N.

b. En utilisant l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}$ démontrer que le point G a pour coordonnées :

$$G\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$$

4. Manipulations algébriques :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 6

On considère un parallélogramme quelconque $ABCD$. On note I, J, K, L les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.

Etablir les deux relations suivantes :

a. $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{DC}$ b. $2 \cdot \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{JC}$

Exercice 7

1. Placer deux points A et B dans le plan.

2. On considère le point M définie par la relation

$$2 \cdot \overrightarrow{AM} - 3 \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$$

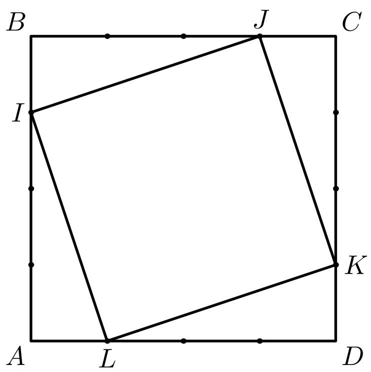
a. Donner une expression du vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Placer le point M dans le plan.

5. Repère choisi :

Exercice 8

On considère le carré $ABCD$ représenté ci-dessous :



Ses quatre côtés ont été partagés en quatre parts égales. On considère le quadrilatère $IJKL$ représenté dans la figure vérifiant :

$$BI = CJ = DK = AL = \frac{1}{4} \cdot AD$$

On considère le plan muni du repère $\left(A\,;D\,;B\right)$.

1. Donner les coordonnées des huit points de cette figure.

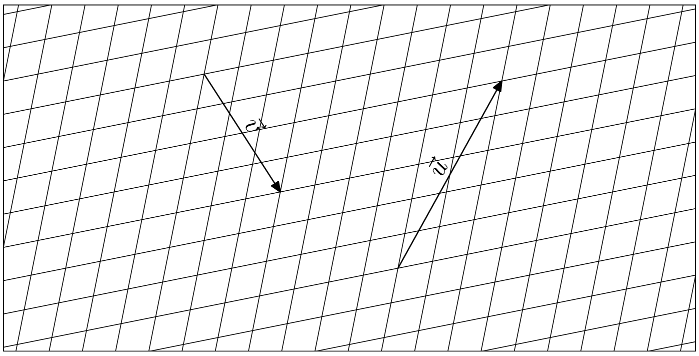
2. Démontrer que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

3. Démontrer que le parallélogramme $IJKL$ est un rectangle.

4. Démontrer que le rectangle $IJKL$ est un carré.

Exercice 9

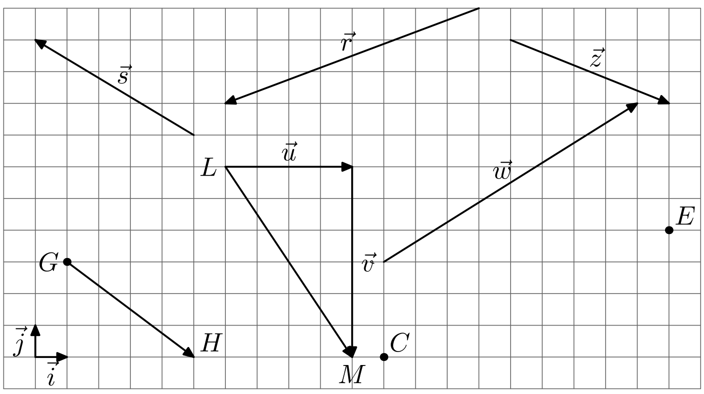
On considère, dans le plan, les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ci-dessous :



1. Tracer dans le quadrillage un représentant $\overrightarrow{w}$ de la somme $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.
2. Tracer dans le quadrillage un représentant $\overrightarrow{y}$ de la différence $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$.
3. Tracer dans le quadrillage un représentant $\overrightarrow{z}$ de la combinaison linéaire suivante : $2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$.

Exercice 10

1. a. Placer le point D tel que : $\overrightarrow{CD}=-3\cdot\overrightarrow{i}+2\cdot\overrightarrow{j}$.
   b. Placer le point F tel que : $\overrightarrow{EF}=-3\cdot\overrightarrow{i}-4\cdot\overrightarrow{j}$
2. Compléter l'égalité suivante :
   $\overrightarrow{GH}=\ldots\cdot\overrightarrow{i}+\ldots\cdot\overrightarrow{j}$
3. Compléter les pointillés suivants :
   a. $\overrightarrow{u}=\ldots\cdot\overrightarrow{i}$
   b. $\overrightarrow{v}=\ldots\cdot\overrightarrow{j}$
   c. $\overrightarrow{LM}=\ldots\cdot\overrightarrow{i}+\ldots\cdot\overrightarrow{j}$
   d. $\overrightarrow{w}=\ldots\cdot\overrightarrow{i}+\ldots\cdot\overrightarrow{j}$
   e. $\overrightarrow{z}=\ldots\cdot\overrightarrow{i}+\ldots\cdot\overrightarrow{j}$
   f. $\overrightarrow{r}=\ldots\cdot\overrightarrow{i}+\ldots\cdot\overrightarrow{j}$
   g. $\overrightarrow{s}=\ldots\cdot\overrightarrow{i}+\ldots\cdot\overrightarrow{j}$



Exercice 11

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires en précisant le coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$:
   a. $\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{u}=\dfrac{3}{4}\cdot\overrightarrow{v}$
   b. $3\cdot\overrightarrow{u}-2\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$
   c. $3\cdot\left(\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{0}$
   d. $-2\cdot\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)=2\cdot\overrightarrow{u}+3\cdot\overrightarrow{v}$
2. Parmi les couples de vecteurs ci-dessous, lesquels sont colinéaires entre eux. On précisera alors le coefficient de proportionnalité de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$:
   a. $\overrightarrow{u}\,(3\,;2)$ et $\overrightarrow{v}\,(9\,;4)$
   b. $\overrightarrow{u}\,(2\,;3)$ et $\overrightarrow{v}\,(4{,}2\,;6{,}3)$
   c. $\overrightarrow{u}\,(-1\,;2)$ et $\overrightarrow{v}\,(4\,;-8)$
   d. $\overrightarrow{u}\,(0{,}7\,;4{,}1)$ et $\overrightarrow{v}\,(-2{,}8\,;16{,}4)$
3. Pour deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires, comparer le coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{v}$ et de $\overrightarrow{u}$ relativement au coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$.

Exercice 12

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[DC]$.

Déterminer un vecteur résultant de chacune des expressions :

a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IJ}-\overrightarrow{DJ}$ b. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{JA}$ c. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AD}$

Exercice 13

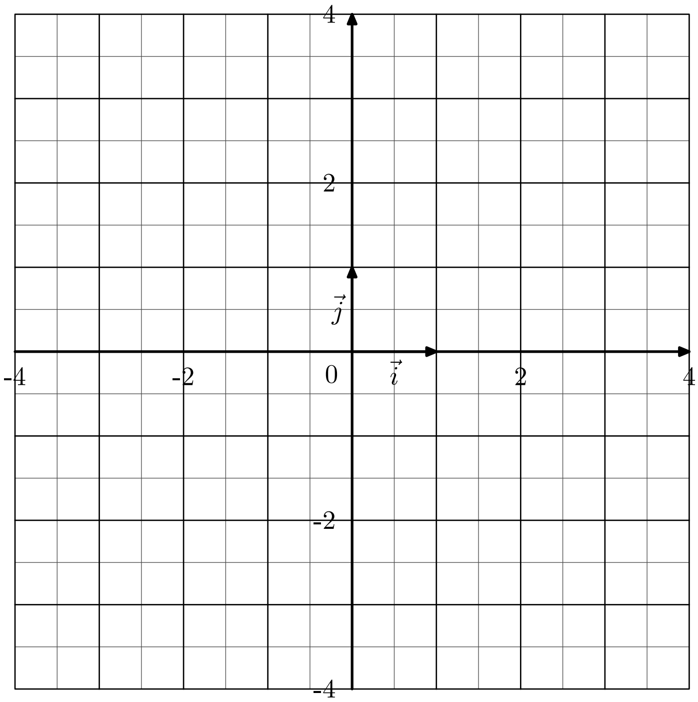
Soit A, B, C trois points du plan vérifiant la relation :

$$-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{5}{2}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}$$

Montrer que les points A, B, C sont alignés.

Exercice 14

On considère le plan muni d'un repère orthogonal :



1. Placer les points suivants :
   $A(-3\,;-3)$; $B(3\,;-1)$; $C(-1.5\,;1)$
2. a. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.
   b. Déterminer les coordonnées du point J milieu du segment $[AC]$.
   c. Placer sur la figure les points I et J ainsi que le centre de gravité G du triangle ABC.

d. Déterminer la longueur IC.

3. On considère le point $M(-0{,}5\,;-1)$ du plan

a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CI}$.

b. Montrer que les points C, M, I sont alignés.

c. En utilisant le coefficient de colinéarité entre les deux vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CM}$, en déduire que les points M et G sont confondus.

Indication :

On rappelle que le centre de gravité d'un triangle est le point de concourance des médianes du triangle.
Le centre de gravité d'un triangle possède la propriété métrique suivante :
"*Le centre de gravité est situé sur chaque médiane au $^2\!/_3$ de celle-ci en partant du sommet*"

Exercice 15

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, le cercle $\mathscr{C}$ de centre $K(2\,;1)$ et de rayon $2{,}5$, et le point $A\left(0\,;\dfrac{5}{2}\right)$

1. Montrer que le point A appartient au cercle $\mathscr{C}$.

2. Déterminer les coordonnées du point B, appartenant au cercle $\mathscr{C}$, diamétralement opposé au point A.

3. Soit $C\left(\dfrac{3}{2}\,;1-\sqrt{6}\right)$, justifier que le triangle ABC est rectangle en C.

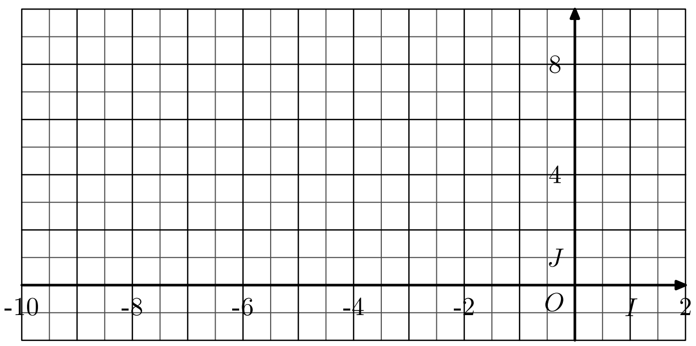
4. Déterminer les coordonnées d'un point du cercle $\mathscr{C}$, dont l'abscisse vaut $\dfrac{5}{2}$

7. *Vecteur et fonction affines :*

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 16

On considère le plan rapporté au repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$:



1. Placer les points $A(-7\,;1)$ et $B(1\,;7)$.

2. a. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$.
Démontrer que AOB est un triangle rectangle isocèle.

b. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle AOB.
Calculer les coordonnées de son centre S et de son rayon.

3. On note f la fonction affine définie par :
$f(-7)=1 \quad ; \quad f(1)=7$

a. Déterminer l'expression algébrique de f.

b. Dans le repère ci-dessus, donner la représentation graphique de la fonction f ?

9. *Exercices non-classés :*

Exercice 17

Dans un un repere $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on considère les points :

$$A(3\,;-5)\ ;\ B(-2\,;0)\ ;\ C(147\,;-13)\ ;\ D(-53\,;187)$$

Etablir que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.