Terminale Option Experte/Nombres complexes et géométries

1. Module :

Exercice 1

Dans le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$, on considère les trois points A, B, C ayant pour affixe respectif a, b, c définis par :

$a=\sqrt{3}-\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}\quad;\quad b=-1-\mathrm{i}\quad;\quad c=1-3\cdot\mathrm{i}$

1. Etablir que : $\dfrac{a-b}{c-b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{i}$

2. Etablir que le triangle ABC est isocèle en B.

Exercice 2

Dans le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct, on considère les trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c définies par :

$a=-3+3\cdot\mathrm{i}\quad;\quad b=-\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}\quad;\quad c=\dfrac{5}{2}-\dfrac{5}{2}\cdot\mathrm{i}$

Etablir que le triangle ABC est isocèle en B.

2. Argument et mesure d'angles :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 3

Dans le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$, on considère les trois points A, B, C ayant pour affixe respectif a, b, c définis par :

$a=2\sqrt{3}+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}\quad;\quad b=1-2\cdot\mathrm{i}\quad;\quad c=3-\mathrm{i}$

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

Exercice 4

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
   $a=2\quad;\quad b=3+\mathrm{i}\sqrt{3}\quad;\quad c=2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

2. En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$.

3. Argument et orthogonalité :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct, on considère les points E, F, G et H d'affixes respectives :

$z_E=5-3\cdot\mathrm{i}\quad;\quad z_F=4+\mathrm{i}\cdot\left(-3+\sqrt{3}\right)$

$z_G=\mathrm{i}\quad;\quad z_H=-2\sqrt{3}-\mathrm{i}$

1. Etablir l'égalité : $\dfrac{z_F-z_E}{z_H-z_G}=-\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{i}$

2. En déduire que les droites (EF) et (GH) sont perpendiculaire.

Exercice 6

Le plan complexe est muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct. On prendra $2\,cm$ pour unité graphique. On appelle J le point d'affixe i.

1. On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives :
   $a=-3-\mathrm{i}\quad;\quad b=-2+4\cdot\mathrm{i}\quad;\quad c=3-\mathrm{i}\quad;\quad h=-2.$
   Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2. Montrer que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

3. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe $\dfrac{b-c}{h-a}$.
   En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

4. Argument et parallélisme :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 7

On considère le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_A = 4 - \sqrt{3}\cdot\mathrm{i}$; $z_B = \left(4-\sqrt{3}\right) + \mathrm{i}\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)$

$z_C = -1 + 2\cdot\mathrm{i}$; $z_D = 2\sqrt{3} - 1$

1. Etablir l'égalité : $\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = -\dfrac{1}{2}$
2. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

5. Nature d'un triangle :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 8

On munit le plan d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct.

On considère les deux points A et B d'affixes respectives :

$z_A = 2 + 2\cdot\mathrm{i}$; $z_B = 1 - \mathrm{i}$

1. Donner l'écriture trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{z_A}{z_B}$.
2. En déduire la nature du triangle OAB.

Exercice 9

Le plan complexe est muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct *(unité graphique 4 cm)*. Soit I le point d'affixe 1. On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OI]$ et on nomme son centre Ω.

On pose $a_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{i}$ et on note A_0 son image.

1. Montrer que le point A_0 appartient au cercle $\mathscr{C}$.
2. Soit B le point d'affixe b, avec $b = -1+2\cdot\mathrm{i}$, et B' le point d'affixe b' telle que $b' = a_0\cdot b$.
   a. Calculer b'.
   b. Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

Exercice 10

On considère le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct.

On considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$z_A = 1 + \mathrm{i}$; $z_B = 2 + \mathrm{i}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$; $z_C = \left(1-\sqrt{3}\right) + \mathrm{i}\cdot 2$

1. Déterminer l'écriture algébrique du quotient : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$
2. Déterminer le module et un argument du quotient précédent.
3. Etablir que le triangle ABC est rectangle isocèle.

Exercice 11

Le plan complexe est muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct d'unité graphique 2 *cm*

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = -2\cdot\mathrm{i}$; $z_B = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$; $z_C = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

1. a. Donner l'écriture exponentielle des nombres z_A, z_B et z_C.
   b. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.
   c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ, puis placer les points B et C.
2. a. Donner l'écriture algébrique du complexe $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$, puis son écriture exponentielle.
   b. En déduire la nature du triangle ABC.

6. Nature d'un quadrilatère :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 12

Dans le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives : $z_A = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$; $z_B = 1 - \mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$

$z_C = \sqrt{3} + \mathrm{i}$; $z_D = -1 + \mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$

1. Donner le module et un argument de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.
2. Construire à la règle et au compas les points A, B , C et D *(on prendra pour unité graphique 2 cm)*.
3. Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\dfrac{z_A}{z_B}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 13

On considère le plan muni du repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct et les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_A = -2+\mathrm{i}$; $z_B = -3\cdot\mathrm{i}$; $z_C = 3-2\cdot\mathrm{i}$; $z_D = 3+2\cdot\mathrm{i}$

1. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z défini par le quotient :
   $$Z = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$$
   b. En déduire l'écriture trigonométrique du complexe Z.
2. a. Justifier que le quadrilatère $ABCD$ a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur.
   b. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange?

7. Utilisation des équations cartésiennes :

Exercice 14

On considère le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé direct et les deux points C et D d'affixes respectifs c et d définis par : $c=1+\mathrm{i}$; $d=3-2\cdot\mathrm{i}$

Pour tout nombre complexe z différent de d, on note z_0 le nombre complexe défini par : $z_0=\dfrac{z-c}{z-d}$

1. En notant $a+\mathrm{i}\cdot b$, où $a,b\in\mathbb{R}$, l'écriture algébrique du nombre z, déterminer l'écriture algébrique du quotient z_0.
2. On souhaite caractériser l'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan d'affixe z, tels que le nombre z_0 soit un nombre réel.
   a. Déterminer une relation sur les nombres réels a et b afin que le nombre z_0 soit un nombre réel.
   b. Justifier que l'ensemble $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M du plan distinct de D tels que les points C, D, M soient alignés

Exercice 15

On considère le plan complexe muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé direct et les deux points C et D d'affixes respectifs c et d définis par : $c=2-\mathrm{i}$; $d=1+2\cdot\mathrm{i}$

Pour tout nombre complexe z différent de d, on note z_0 le nombre complexe défini par : $z_0=\dfrac{z-c}{z-d}$

1. En notant $a+\mathrm{i}\cdot b$, où $a,b\in\mathbb{R}$, l'écriture algébrique du nombre z, déterminer l'écriture algébrique du quotient z_0.
2. On souhaite caractériser l'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan d'affixe z, tels que le nombre z_0 soit un imaginaire pur.
   a. Déterminer une relation sur les nombres réels a et b afin que le nombre z_0 soit un imaginaire pur.
   b. Justifier que l'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point D.

8. Transformation du plan :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 16

Le plan complexe P est muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct, unité graphique $2\,cm$.

On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point $M'=F(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z'=z+\mathrm{i}-\frac{1}{z}$$

On considère les points A et B d'affixes respectives $a=\mathrm{i}$ et $b=e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' par F d'affixes respectives a' et b'.

1. Calculer a' et b'.
2. Placer les points A, A', B et B'.
3. Démontrer que : $\dfrac{-b}{b'-b}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\mathrm{i}$
4. En déduire la nature du triangle OBB'.

Exercice 17

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{e_1}\,;\,\overrightarrow{e_2}\right)$ orthonormé direct d'unité graphique $1\,cm$.

Soit A le point d'affixe $3\cdot\mathrm{i}$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=\dfrac{3\cdot\mathrm{i}\cdot z-7}{z-3\cdot\mathrm{i}}$

Recherche des points invariants par f.

1. Développer $(z-7\cdot\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$.
2. Montrer que f admet deux nombres invariants qui sont les affixes de deux points qu'on notera B et C.

Définition : soit f une fonction complexe *(de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$)*. On dit que le nombre z est un **invariant de la fonction f** si $f(z)=z$.

Exercice 18

Dans le plan complexe rapporté au repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct, on désigne par A le point d'affixes 1.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z\neq1$, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=\dfrac{1-z}{\overline{z}-1}$

1. Montrer que, pour tout nombre complexe $z\neq1$, $\dfrac{z'-z}{z-1}$ est réel.
2. Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?

9. Transformation du plan et image d'un ensemble :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 19

Le plan complexe P est muni d'un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ orthonormé direct. On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point $M'=F(M)$ d'affixe z' définie par : $z'=z+\mathrm{i}-\dfrac{1}{z}$

On note A le point d'affixe i et θ un réel.

1. On note A' l'image du point A par la transformation F. Déterminer l'affixe du point A'.
2. Démontrer que si $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\theta}$ alors $z'=\big(2\cdot\sin\theta+1\big)\cdot\mathrm{i}$
3. En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment $[A'C]$ où C a pour affixe -1.

10. Transformation du plan et image réciproque d'un ensemble :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 20

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ orthonormé direct, on considère la transformation f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z^2+\mathrm{i}\cdot\overline{z}+1-\mathrm{i}$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives :
   $3+2\cdot\mathrm{i}$; $-3\cdot\mathrm{i}$
   Déterminer l'image de ces deux points par la transformation f.
2. a. Soit M un point du plan. On note $a+\mathrm{i}\cdot b$ l'affixe du point M. Exprimer en fonction de a et de b la partie réelle et la partie imaginaire du point M'.
   b. Déterminer une condition sur a et b afin que le point M' appartienne à l'axe des réels.
   c. Déterminer une condition sur a et b afin que le point M' appartienne à l'axe des imaginaires.

Exercice 21

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ orthonormé direct. On considère les points :
$A(0\,;1)$; $B(2\,;-1)$

A tout point du plan M, différent de A et de B, d'affixe z, on associe un point M' d'affixe z' définie par la relation :
$$z' = \frac{z-2+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$$

1. Interpréter géométriquement la longueur OM' et l'angle $\big(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}\big)$ en utilisant les points A, B et M.
2. On considère le point $M(4\,;1)$. Déterminer l'écriture algébrique et exponentielle du nombre complexe z' associé à z.
3. Dans cette question, on souhaite caractériser l'ensemble des points M du plan tel que le point M' appartiennent à l'axe des ordonnées :
   a. On note $z=x+\mathrm{i}\cdot y$. Etablir la propriété suivante :
   "*z' est un imaginaire pur si* $x^2+y^2-2x-1=0$"
   b. Justifier que l'ensemble recherché est le cercle de diamètre $[AB]$.

11. Racine n-ièmes de l'unité :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 22

On s'intèresse à l'ensemble $\mathbb{U}_4$ défini par l'ensemble des solutions de l'équation : $z^4=1$

1. a. Factoriser l'expression z^4-1 en produit de facteurs premiers.
   b. Donner l'écriture algébrique, puis l'écriture exponentielle de l'ensemble $\mathbb{U}_4$.
2. On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ orthonormé direct et, pour $j\in\{0\,;1\,;2\,;3\}$, les points M_j d'affixes : $z_j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}\times j}$
   a. Montrer que les points M_j, pour $j\in\{0\,;1\,;2\,;3\}$, appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.
   b. Etablir, pour tout $j\in\{0\,;1\,;2\}$, l'égalité :
   $\widehat{M_jOM_{j+1}} = \dfrac{\pi}{2}$
   c. Préciser la nature du quadrilatère : $M_0M_1M_2M_3$

12. Cours :

Exercice 23

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C alors :
   - $\left|\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$
   - $\arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right) = \big(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\big) \quad (2\pi)$

2. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :
$z=\mathrm{e}^{i\cdot\theta}$ si, et seulement si, $|z|=1$ et $\arg(z)=\theta+2\cdot k\cdot\pi$ où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point m d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
$$z'-\omega=\mathrm{e}^{i\cdot\omega}\cdot(z-w)$$

Exercice 24

Le plan complexe est rapporté au repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$.

On rappelle que :
« Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a :
$|z|=\left\|\overrightarrow{w}\right\|$; $\arg(z)=\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{w}\right)$ ».

Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m\neq n$ et $m\neq p$.

1. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right)=\left(\overrightarrow{MN}\,;\overrightarrow{MP}\right)$

2. Interpréter géométriquement le nombre : $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.

Exercice 25

Dans le plan complexe muni du repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct, on considère les points M et M' distincts de O d'affixes respectives z et z'. On pose :
$z=x+\mathrm{i}\cdot y$; $z'=x'+\mathrm{i}\cdot y'$
où x, x', y, y' sont des nombres réels.

On rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z.

1. Exprimer le complexe $\overline{z}\cdot z'$ en fonction de x, x', y, y'.

2. a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $Re\left(z'\cdot\overline{z}\right)=0$.

   b. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si, et seulement si, $Im\left(z'\cdot\overline{z}\right)=0$

Exercice 26

Définition :
Pour n un entier naturel non-nul, on considère l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ième de l'unité. On dit qu'une racine ω est une **racine n-ième primitive de l'unité** si les puissances successives de ω *(c'est-à-dire ω, ω^2, ω^3,…,ω^n)* permettent de générer tous les éléments de $\mathbb{U}_n$.

Montrer que si n est un entier premier alors tout élément de $\mathbb{U}_n$ différent de 1 est une racine primitive n-ième de $\mathbb{U}_n$.

13. Suite :

Exercice 27

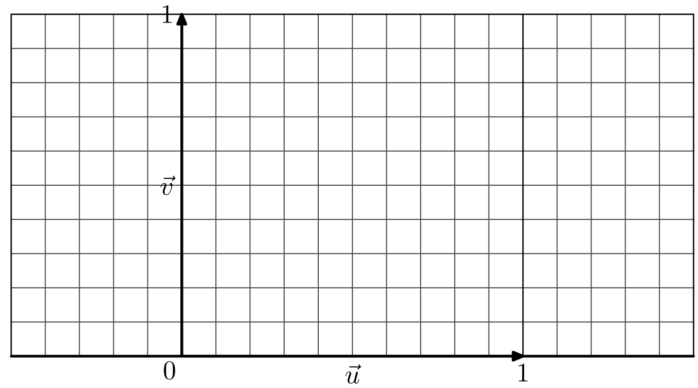
Le plan complexe est muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :
$$z_0=1 \quad ; \quad z_{n+1}=\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\right)\cdot z_n$$

1. Déterminer les affixes des poitns A_1 et A_2.

2. Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

3. On admet que, pour tout entier naturel n :
$$z_n=\left|z_n\right|\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{n\cdot\pi}{6}}$$

Placer les point A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 dans le repère ci-dessous :



15. Exercices non-classés :

Exercice 28

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$, on considère les points B et C d'affixes respectives $-\mathrm{i}$ et $7\cdot\mathrm{i}$.

Montrer que tout point M d'affixe z vérifiant :
$z=3\cdot\mathrm{i}+4\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\theta}$ où $\theta\in\mathbb{R}$
appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[BC]$.