

Terminale Spécialité/Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Chapitre à finir

1. Répétitions indépendantes d'épreuves de Bernoulli :

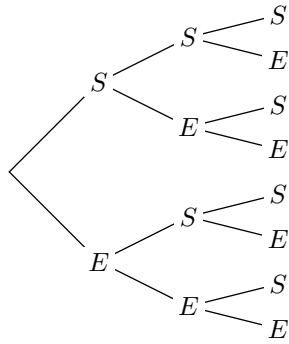
Exercice 1



On considère une épreuve admettant que deux issues : une nommée "succès" et noté S de probabilité 0,4 ; l'autre nommée "échec" et notée E .

On décide de répéter trois fois cette même épreuve. On obtient l'arbre de probabilité ci-contre.

On suppose ces répétitions indépendantes entre elles.



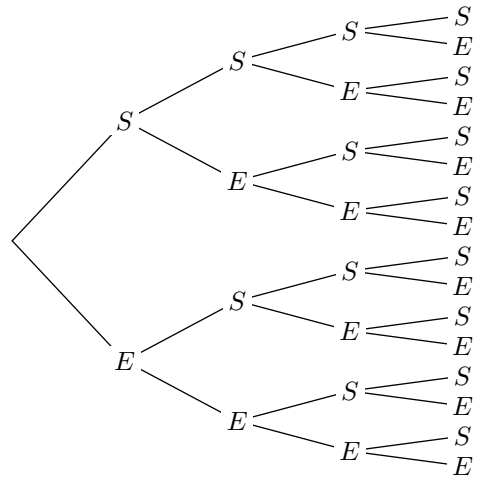
1. Compléter cet arbre de probabilité?
2. a. Combien de chemins comportent 3 succès?
b. Donner la probabilité d'obtenir trois succès à l'issue de cette expérience aléatoire?
3. a. Combien de chemins comportent 0 succès?
b. Donner la probabilité de n'obtenir aucun succès à l'issue de cette expérience aléatoire?
4. a. Combien de chemins comportent 2 succès?
b. Donner la probabilité d'obtenir exactement deux succès à l'issue de cette expérience aléatoire?

Exercice 2



On considère une épreuve comportant que deux issues : une issue de probabilité 0,3 noté S ; l'autre issue est notée E .

On considère l'expérience aléatoire composée de quatre répétitions de l'épreuve précédente. Cette nouvelle expérience aléatoire est représentée par l'arbre de choix ci-dessous :



1. Combien d'évènements élémentaires composent cette expérience aléatoire?
2. On note \mathcal{X} la variable aléatoire qui, à chaque évènement élémentaire, compte le nombre d'évènements S réalisés.

Déterminer les probabilités suivantes arrondies au millième :

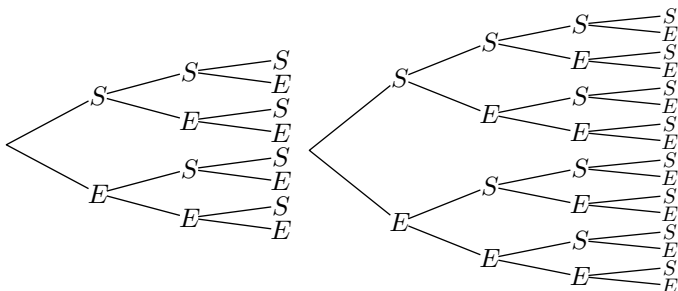
- a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$

2. Coefficients binomiaux :

Exercice 3



Voici les arbres de choix associés à la répétition d'une épreuve de Bernoulli respectivement 3 et 4 fois :



1. Pour la répétition trois fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3
Nombre d'issues				

2. Pour la répétition quatre fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4
Nombre d'issues					

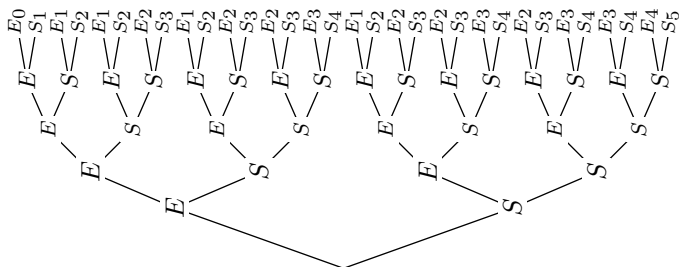
3. Y a-t-il une méthode pour obtenir le second tableau à partir du premier?

Exercice 4



La figure ci-dessous représente la répétition de cinq épreuves de Bernoulli où les deux issues sont S (succès) et E (échec). Le nombre en indice sur le cinquième choix représente le nom-

bre de succès réalisés dans le chemin choisi.



1. Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4	5
Nombre de chemins associés						

2. On considère la même épreuve de Bernoulli mais répétée six fois :

- Donner le nombre de chemins réalisant 4 succès lorsque l'on répète six fois une épreuve de Bernoulli (on pourra compléter l'arbre de choix ou raisonner).
- Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de chemins associés							

3. Loi binomiale :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 5



Soit \mathcal{X} suivant une loi binomiale de paramètre 15 et 0,35. C'est à dire : $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(15; 0,35)$

Déterminer la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millièmè des probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=7)$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$

Exercice 6



Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. A chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et in-

dépendants.

Déterminer la probabilité exacte pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie, puis sa valeur arrondie au centièmè.

Exercice 7



Une variable aléatoire \mathcal{X} suit une loi binomiale de paramètres n et p où n est égal à 4 et p appartient à $]0; 1[$.

Sans justification, indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

- Proposition 1 :** si $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = 8 \cdot \mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$ alors $p = \frac{2}{3}$.
- Proposition 2 :** si $p = \frac{1}{5}$ alors $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$.

4. Loi binomiale et évènements complémentaires :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 8



On considère une variable aléatoire \mathcal{X} suivant la loi binomiale de paramètre $n=15$ et $p=0,63$.

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer les coefficients binomiaux suivants :

- $\binom{15}{13}$
- $\binom{15}{14}$
- $\binom{15}{15}$

2. Déterminer la valeur exacte des probabilités suivantes, puis arrondie à 10^{-4} près :

- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=13)$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=14)$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=15)$

3. En déduire la valeur, arrondie à 10^{-4} près, de la probabilité de l'évènement $\{\mathcal{X} \leq 12\}$.

Exercice 9



Lors d'une épidémie chez des bovins, un test de cette maladie est mis en place. Une étude est faite sur ce troupeau et la probabilité que le test soit positif sur un animal de ce Troupeau Spécialité / Schéma de Bernoulli et loi binomiale / page 2

troupeau est de 0,058.

On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note \mathcal{X} la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

- Quelle est la loi de probabilité suivie par \mathcal{X} ?
- Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ? On donnera la valeur exacte et la valeur approchée au millièmè.

Exercice 10



Un concours sportif est organisé, chaque année, pour relier deux villages le plus rapidement possible. Plusieurs moyens de déplacement sont possibles : à vélo ; en roller ; à pied.

On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres. L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vain-

queur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\frac{2}{3}$.

Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années

l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent "non cycliste". Donner également la valeur approchée au millièmme de cette probabilité.

5. Loi binomiale et fonctions de répartition :

Exercice 11



On considère une variable aléatoire \mathcal{X} suivant la loi binomiale de paramètres 14 et 0,44 ($\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(14; 0,44)$).

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq k)$	0,0002	0,003	0,02	0,073	0,186	0,365	0,576	0,765

k	8	9	10	11	12	13	14
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq k)$	0,895	0,963	0,99	0,998	0,999	0,999	1

1. a. Déterminer la probabilité de l'évènement $\{\mathcal{X}=5\}$.

- b. Donner la valeur de: $\mathcal{P}(\mathcal{X}=8) + \mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$

2. Déterminer la valeur de la probabilité: $\mathcal{P}(\mathcal{X} > 5)$

3. Répondre aux questions ci-dessous:

- a. Donner la probabilité que la variable \mathcal{X} pour valeur au moins 7.

- b. Donner la probabilité que la variable \mathcal{X} pour valeur au plus 7.

4. Déterminer les probabilités suivantes:

- a. $\mathcal{P}(3 \leq \mathcal{X} \leq 6)$ b. $\mathcal{P}(5 \leq \mathcal{X} \leq 10)$

7. Loi binomiale avec calculatrice: valeurs cumulées :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 12



On considère une variable aléatoire \mathcal{X} suivant une loi binomiale de paramètre 20 et 0,2.

On répondra aux questions à l'aide de la calculatrice. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près:

1. Déterminer la valeur des probabilités suivantes:

- a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$

2. Déterminer la valeur des probabilités suivantes:

- a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 9)$

Exercice 13



On suppose qu'une variable aléatoire \mathcal{X} suit une loi binomiale de paramètre $n=22$ et $p=0,37$

A l'aide de la calculatrice et sans justification, donner la probabilité de $\mathcal{P}(3 \leq \mathcal{X} \leq 7)$ arrondie à 10^{-4} près.

Exercice 14



On considère une variable aléatoire \mathcal{X} suivant une loi binomiale de paramètre $n=5$ et $p=0,6$.

On arrondira les probabilités au millièmme près.

1. Donner la loi de la variable \mathcal{X} sous la forme d'un tableau..

2. Déterminer les probabilités suivantes:

- a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 1)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} > 1)$

8. Loi binomiale - problèmes :

(+2 exercices pour les enseignants)

Exercice 15



On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A , B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot "BBAAC" signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. Combien y-a-t-il de mots-réponses possible à ce questionnaire?

2. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

Calculer la probabilité des évènements suivants:

- a. E : "le candidat a exactement une réponse exacte".

- b. F : "le candidat n'a aucune réponse exacte".

- c. G : "le mot-réponse du candidat est un palindrome".
(On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche: par exemple, "BACAB" est un palindrome)

Exercice 16



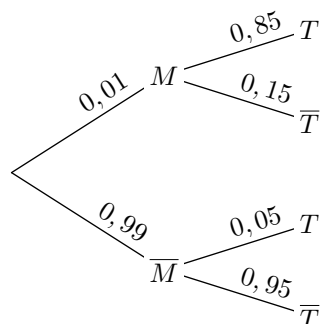
Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal,

on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux.

On note les événements :

- M : "l'animal est porteur de la maladie" ;
- T : "le test est positif".

Voici l'arbre de probabilité obtenu après l'étude du cheptail :



1. Un animal est choisi au hasard.
 - a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif?
 - b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.
2. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépen-

dantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note \mathcal{X} la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

- a. Quelle est la loi de probabilité suivie par \mathcal{X} ? Justifier.
 - b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif? On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième près.
3. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

- a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire \mathcal{Z} associant à un animal le coût à engager.
- b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager?

9. Espérance d'un loi binomiale :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 17



On dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par \mathcal{X} la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

1. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire \mathcal{X} ?
2. Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$.
3. Donner l'espérance de la variable aléatoire \mathcal{X} .

Exercice 18



Une usine produit des sacs. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à 0,03.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire \mathcal{X} qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire \mathcal{X} suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement "au moins un sac est défectueux"? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.
3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléa-

toire \mathcal{X} .

Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Exercice 19



Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été, il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.

Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\frac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.

Une somme de 1 crédit (la monnaie locale) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.

Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.

Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. Evidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le 13^e groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédit à l'association.

Les probabilités demandées seront arrondies au 100^e le plus proche.

1. Quelle est la probabilité P_{13} qu'un jour donné, il n'y ait pas de désistement, c'est à dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade?
2. Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.
Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.

3. Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :

$$\left(\sum_{k=0}^{13} k \cdot \binom{13}{k} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{13-k} \right) - 2 \cdot P_{13}$$
 Calculer ce gain.
4. La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association?

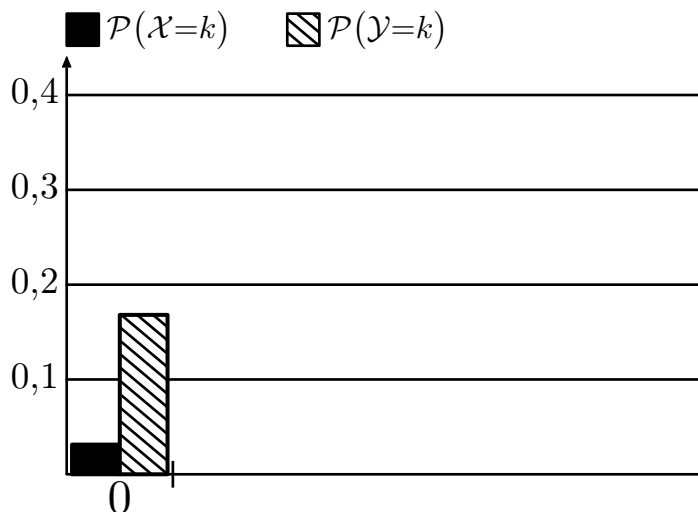
10. Répartition de la distribution :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 20



1. On considère la variable aléatoire \mathcal{X} suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,5$.
Dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire \mathcal{X} .
2. On considère la variable aléatoire \mathcal{Y} suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,3$.
Dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire \mathcal{Y} .
3. Dans le graphique ci-dessous, compléter les diagrammes en barre représentant la loi de chacun de ces variables aléatoires :



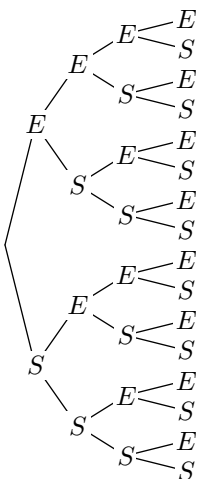
11. Rappels: loi binomiale :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 21



La figure ci-contre représente la répétition de quatre épreuves de Bernoulli où les deux issues sont S (succès) et E (échec). On suppose connu les probabilités suivantes : $\mathcal{P}(S) = \frac{1}{3}$; $\mathcal{P}(E) = \frac{2}{3}$. On considère la variable aléatoire \mathcal{X} qui compte le nombre de succès réalisés après la répétition de ces quatre épreuves de Bernoulli.



1. a. Combien d'évènements élémentaires comprend l'évènement $\{\mathcal{X}=3\}$?
b. Soit $\omega \in \{\mathcal{X}=3\}$, montrer que :

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{2}{81}$$

c. Justifier que : $\mathcal{P}(\mathcal{X}=3) = \frac{8}{81}$

2. a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire \mathcal{X} .
b. Compléter le tableau ci-dessous afin de donner la loi de probabilité de la variable aléatoire \mathcal{X} :

x					
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x)$					

Exercice 22



On répondra aux questions suivantes en utilisant la calculatrice :

1. Donner la valeur des coefficients binomiaux suivant :

a. $\binom{15}{3}$ b. $\binom{24}{3}$ c. $\binom{54}{12}$ d. $\binom{51}{51}$
2. Soit \mathcal{X} une variable aléatoire telle que $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(15; 0,3)$.
Donner les valeurs approchées au centième des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=8)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=12)$
3. Soit \mathcal{X} une variable aléatoire telle que $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(52; 0,3)$.
Donner les valeurs approchées au centième des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 9)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 15)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 23)$

Exercice 23



On répète 10 fois et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0,3$.

A cette expérience, on associe la variable \mathcal{X} qui associe à chaque issue de cette expérience le nombre de succès.

1. Déterminer les probabilités suivantes :
 $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $\{\mathcal{X} \geq 3\}$.

Exercice 24

Un examen est basé sur un QCM comportant 5 questions où chaque question propose quatre choix de réponse parmi lesquelles une seule réponse est correcte.

Un élève décide de compléter de manière aléatoire et indépendante chacune des questions du questionnaire.

1. Quelle est la probabilité de répondre correctement à une question?

On note \mathcal{X} la variable aléatoire comptant le nombre de réponses correctes contenues dans le formulaire rempli.

2. Déterminer les probabilités suivantes arrondies au millièème près :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leq 3)$

3. A l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité, arrondie au millièème, que l'élève ait au plus 2 réponses justes.

Exercice 25

Dans un jeu, on convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire et la probabilité d'obtenir une boule

noire est $\frac{3}{8}$.

Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note \mathcal{X} la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

1. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millièème.
2. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millièème.
3. On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5
$\mathcal{P}(\mathcal{X}<k)$	0,0091	0,0637	0,2110	0,4467	0,6943

k	6	7	8	9	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X}<k)$	0,8725	0,9616	0,9922	0,9990	0,9999

Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'évènement : "la personne gagne au moins N parties".

A partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évènement est-elle inférieure à $\frac{1}{10}$?

12. Probabilités conditionnelles et loi binomiale :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 26

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.

Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.
 - a. Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit

sans défaut est égale à 0,875.

- b. Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3} .
2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus.

Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3} .

13. Arbres non symétriques :

(+1 exercice pour les enseignants)

Exercice 27

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.

Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1. On note :
 - A_1 l'évènement "la personne est absente lors du premier appel" ;
 - R_1 l'évènement "la personne accepte de répondre au

questionnaire lors du premier appel".

Quelle est la probabilité de R_1 ?

2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et, alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.

Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

- A_2 l'évènement "la personne est absente lors du second appel" ;
- R_2 l'évènement "la personne accepte de répondre au

questionnaire lors du second appel” ;

- R l'évènement “la personne accepte de répondre au questionnaire”.

Montrer que la probabilité de R est 0,176 (On pourra

utiliser un arbre).

3. Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité pour que la réponse ait eu lieu lors du premier appel?

16. Exercices non-classés :

Exercice 28



Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02.

Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,0494.
2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A . Soit \mathcal{X} la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.
 - a. Définir la loi de \mathcal{X} .
 - b. Calculer l'espérance mathématique de \mathcal{X} . Pour l'entreprise, quelle interprétation peut-on faire de cette espérance?