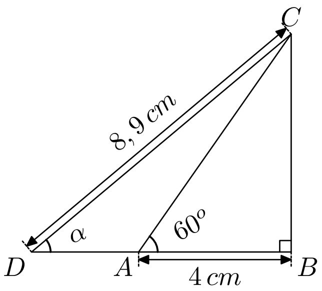
# Première S/Angles orientées

## 1. Rappels :

### Exercice 6038

On considère le triangle $ABC$ rectangle en $B$ représenté ci-dessous :

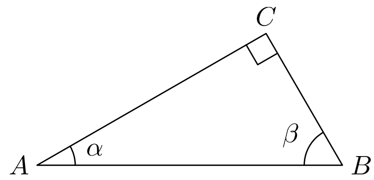



1. Déterminer la longueur du segment $[BC]$ arrondie au millimètre près.
2. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{CDB}$ arrondie au degré près.

### Exercice 2182

On considère un triangle $ABC$ rectangle en $C$. On note :

$\alpha=\widehat{CAB}$ ; $\beta=\widehat{ABC}$

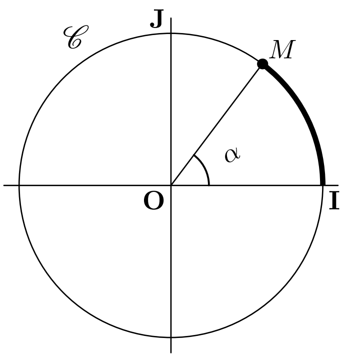



1. Justifier que les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CBA}$ sont deux angles complémentaires.
2. a. A l'aide des longueurs des côtés du triangle $ABC$, exprimer les valeurs de $\cos\alpha$ et $\sin\beta$.
   b. En déduire l'égalité : $\cos\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$
3. a. A l'aide des longueurs des côtés du triangle $ABC$, exprimer les valeurs de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$
   b. En déduire l'égalité : $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{1}{\tan\alpha}$
4. Etablir l'égalité : $\left(\cos\alpha\right)^2+\left(\sin\alpha\right)^2=1$

## 2. Radians :

### Exercice réservé 534

Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère un cercle de centre $O$ et de rayon 1 *(ce cercle passe par les points $I$ et $J$)*.
Un point $M$ du cercle est repéré par la mesure de l'angle $\widehat{MOI}$




1. a. Donner la mesure de la circonférence du cercle.
   b. Compléter le tableau suivant :

| Valeur de $\alpha$ | 0 | 360 | 180 | 90 |
|---|---|---|---|---|
| Longueur de l'arc $\widehat{IM}$ | | | | |

   c. Que peut-on dire du tableau ci-dessus?
2. A l'aide de la proportionnalité, compléter le tableau ci-dessous :

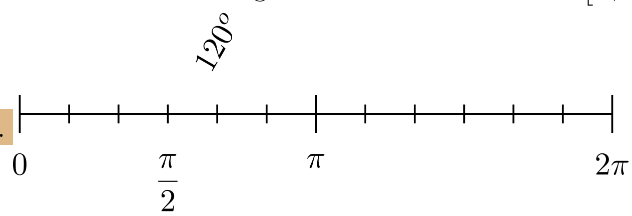
| Valeur de $\alpha$ | 36 | 45 | 60 | 30 |
|---|---|---|---|---|
| Longueur de l'arc $\widehat{IM}$ | | | | |

### Exercice réservé 2203

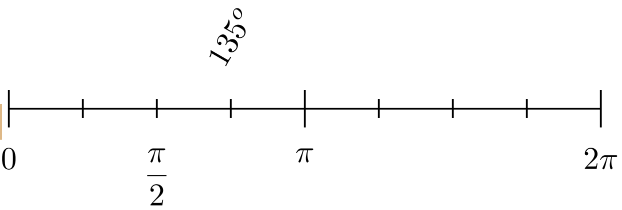
1. Déterminer la mesure exacte en radian des angles suivants :
   a. $90^o$ b. $60^o$ c. $45^o$
   d. $30^o$ e. $72^o$ f. $1^o$
2. Déterminer la mesure exacte en degré des angles suivants :
   a. $\dfrac{\pi}{2}$ rad b. $\dfrac{\pi}{3}$ rad c. $\dfrac{\pi}{6}$ rad
   d. $\dfrac{3\cdot\pi}{5}$ rad e. $\dfrac{\pi}{12}$ rad f. $\dfrac{3\cdot\pi}{4}$ rad
3. Compléter les pointillés ci-dessous avec les valeurs adéquates, approchées au millième près :
   a. $66^o\approx\ldots$ rad b. $137^o\approx\ldots$ rad
   c. $2\,\text{rad}\approx\ldots^o$ d. $0{,}69\,\text{rad}\approx\ldots^o$

### Exercice 2721

Ci-dessous sont représentées deux droites graduées représentant les mesures d'un angle en radian sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

1. 

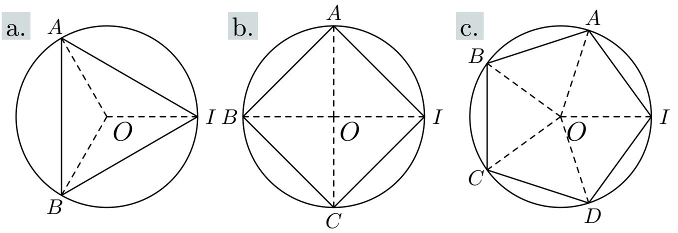

 

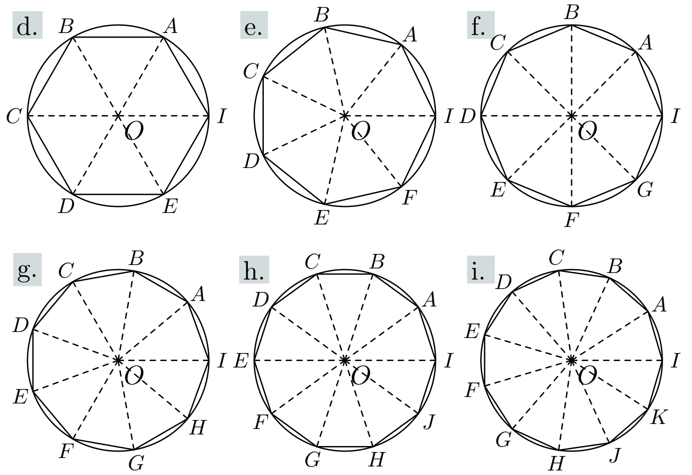
2. 


Compléter la graduation du bas *(représentant une mesure d'angle en radian)*, puis compléter les valeurs du haut représentant la conversion correspondante en degré :

**Exercice 2188**

On a représenté ci-dessous les neufs premiers polygones réguliers inscrit dans le cercle trigonométrique.



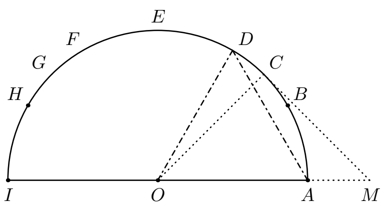

1. Donner la mesure, en radians, de l'angle au centre séparant deux sommets consécutifs de chacun de ces polygones :

2. Nommer chacun de ces polygones.

## 3. Angles remarquables :

**Exercice 7550**

On considère la figure ci-dessous, où $\mathscr{C}$ est un demi-cercle de centre $O$ et admettant le segment $[IA]$ pour diamètre :




Les autres points présents sur cette figure appartiennent au demi-cercle $\mathscr{C}$ et vérifient les propriétés suivantes :

- Le triangle $OAD$ est un triangle équilatéral ;
- Le triangle $OCM$ est un triangle rectangle isocèle en $C$ ;
- Le triangle $AEO$ est un triangle rectangle en $O$ ;
- La demi-droite $[OB)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{DOA}$ ;
- Le point $F$ est le symétrique du point $D$ par rapport à la droite $(EO)$ ;
- Les mesures des angles $\widehat{AOG}$ et $\widehat{AOC}$ sont supplémentaires ;
- Le point $H$ est le point d'intersection du demi-cercle $\mathscr{C}$ avec la droite parallèle à la droite $(AI)$ et passant par le point $B$.

Donner la mesure exacte des angles ci-dessous en radian :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a. $\widehat{AOB}$ | b. $\widehat{AOC}$ | c. $\widehat{AOD}$ | d. $\widehat{AOE}$ |
| e. $\widehat{AOF}$ | f. $\widehat{AOG}$ | g. $\widehat{AOH}$ | h. $\widehat{AOI}$ |

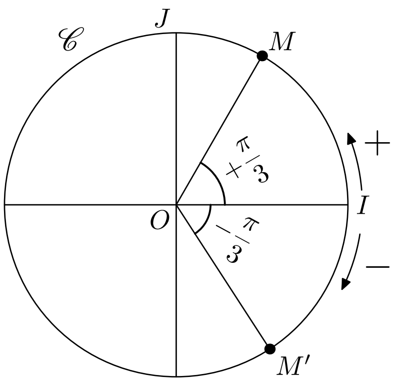
## 4. Angles orientés :

**Exercice 810**

Dans le plan muni d'un repère orthonomal $(O\,;I\,;J)$, on considère le cercle de centre $O$ et de rayon 1 appelé **cercle trigonométrique**.

Tout point $M$ définit un angle géométrique $\widehat{IOM}$.

Le sens de parcours du cercle trigonométrique permet de caractériser tout point du cercle par son angle géométrique :




- l'angle est positif si l'arc $\widehat{IM}$ est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
- l'angle est négatif si l'arc $\widehat{IM}$ est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre.

Dans la représentation ci-dessus :

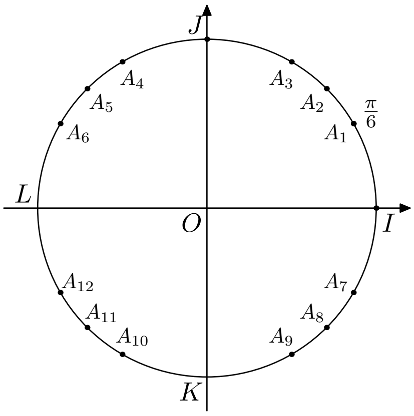
- On a : $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)=+\frac{\pi}{3}$ rad

  Dans le cercle trigonométrique, on note $M\left(+\frac{\pi}{3}\right)$.
- On a : $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM'}\right)=-\frac{\pi}{3}$ rad

  Dans le cercle trigonométrique, on note $M'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

1. Dans la figure ci-dessous, les points $A_i$ définissent un angle orienté $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA_i}\right)$ ayant une mesure "*remarquable*".
Pour chacun des points, indiquer la mesure de l'angle associérajouter le signe permettant de repérer chaque point marqué du cercle trigonométrique :




2. Dans le cercle trigonométrique ci-dessus, placer sur cette figure les points $N$, $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$ réalisant les mesures suivantes :

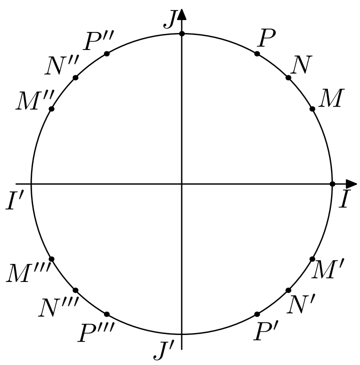
a. $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON}\right) = -\frac{\pi}{4}$ rad    b. $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP}\right) = \frac{5\pi}{6}$ rad

c. $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OQ}\right) = -\frac{2\pi}{3}$ rad    d. $\left(\overrightarrow{OK};\overrightarrow{OR}\right) = -\frac{\pi}{4}$ rad

e. $\left(\overrightarrow{OK};\overrightarrow{OS}\right) = \frac{\pi}{6}$ rad    f. $\left(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OT}\right) = -\frac{\pi}{4}$ rad

## Exercice 5464

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère le cercle trigonométrique représenté ci-dessous sur lequel est placé plusieurs points :
Les points $M$, $N$, $P$ vérifient les mesures suivantes :
$\widehat{IOM} = 30^o$ ; $\widehat{ION} = 45^o$
$\widehat{IOP} = 60^o$




1. Donner la mesure des angles repérant les points $M$, $N$, $P$ en radians.

2. Les points $M'$, $N'$, $P'$ sont respectivement les symétriques des points $M$, $N$, $P$ par rapport à l'axe $(OI)$ :

a. Que peut-on dire de $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'}\right)$?

b. Donner la mesure en radians des angles suivants :
$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON'}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP'}\right)$

3. Les points $M''$, $N''$ et $P''$ sont respectivement les symétriques des points $M$, $N$, $P$ par rapport à l'axe $(OJ)$ :

a. Que peut-on dire de $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM''}\right)$?

b. Donner la mesure en radians des angles suivants :
$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM''}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON''}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP''}\right)$

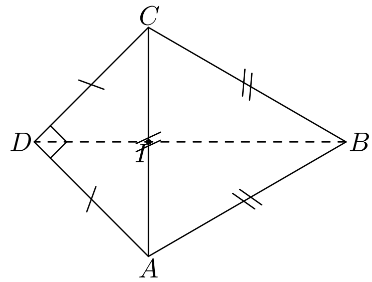
4. Les points $M'''$, $N'''$ et $P'''$ sont respectivement les symétriques des points $M$, $N$, $P$ par rapport à l'axe $(OJ)$ :

a. Quelle relation algébrique vérifie les deux angles :
$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'''}\right)$

b. Donner la mesure en radians des angles suivants :
$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'''}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON''}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP''}\right)$

## Exercice 5465

On considère le quadrilatère $ABCD$ représenté ci-dessous qui est constitué de deux triangles $ABC$ et $ACD$ respectivement équilatéral et isocèle rectangle en $D$.

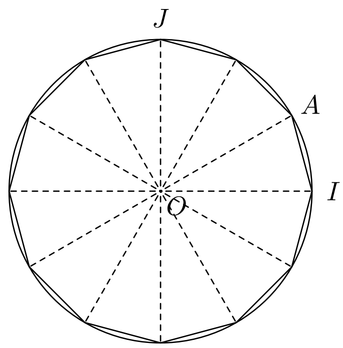



A l'aide des points de cette figure et pour chaque question, donner un angle orienté réalisant les mesures suivantes :

a. $\frac{\pi}{3}$ rad    b. $-\frac{\pi}{4}$ rad    c. $-\frac{\pi}{6}$ rad    d. $\frac{7\pi}{12}$ rad

## Exercice 2153

On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ ci-dessous où est inscrit un dodécagone *(polygone régulier à 12 côtés)*




1. Déterminer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)$

2. Placer sur le cercle $\mathscr{C}$ les points $M$, $N$, $P$ tels que :

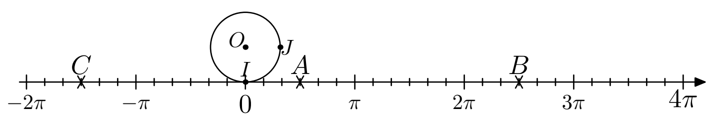
a. $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right) = \frac{2\pi}{3}$ rad    b. $\left(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{ON}\right) = -\frac{\pi}{6}$ rad

c. $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OP}\right) = -\frac{\pi}{2}$ rad    c. $\left(\overrightarrow{OQ};\overrightarrow{OJ}\right) = -\frac{5\pi}{6}$ rad

# 5. Mesures principales :

## Exercice réservé 2189

On considère la droite graduée suivante sur lequel est posé le cercle trigonométrique *(cercle de rayon 1)*.
Le point $I$ *(unité des abscisses)* est placé sur l'origine de la droite graduée.




On fait rouler le cercle sur l'ensemble de la droite graduée.

1. Indiquer les différentes positions possibles du point $I$ sur la droite.

2. Justifier que les points $A$, $B$, $C$ de la droite graduée

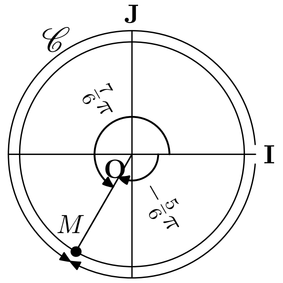
représente le même point du cercle trigonométrique.

## Exercice réservé 2200

1. a. Que pouvez-vous dire des points du cercle trigonométrique repérés par les angles :
$50^o$ ; $410^o$ ; $3650^o$ ; $-310^o$

b. Même question pour les angles :
$\frac{\pi}{3}$ rad ; $-\frac{5\pi}{3}$ rad ; $\frac{7\pi}{3}$ rad

Ainsi, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, tous les angles de l'ensemble $\{\alpha+2k\cdot\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ définissent un même point sur le cercle trigonométrique.




La figure ci-contre montre que le point $M$ peut être repéré par les deux angles :
$M\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ ; $M\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$

L'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ s'appelle l'**intervalle des mesures principales** et a un longueur de $2\pi$. On admet que, pour tout $\alpha\cdot\mathbb{R}$, il existe un seul élément de l'ensemble $\{\alpha+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

2. a. Compléter par *oui* ou *non* le tableau ci-dessous :

| Angle | $-\frac{3}{7}\pi$ | $-\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{7}{8}\pi$ | $\frac{57}{4}\pi$ | $-\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| appartient à $]-\pi\,;\pi]$ | | | | | |

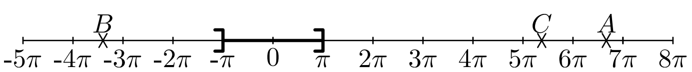
b. Lequel des nombres ci-dessous appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$?
$\frac{9\pi}{2}-4\pi$ ; $\frac{9\pi}{2}-2\pi$ ; $\frac{9\pi}{2}$ ; $\frac{9\pi}{2}+2\pi$ ; $\frac{9\pi}{2}+4\pi$

c. Lequel des nombres ci-dessous appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$?
$-\frac{5\pi}{3}-2\pi$ ; $-\frac{5\pi}{3}$ ; $-\frac{5\pi}{3}+2\pi$ ; $-\frac{5\pi}{3}+4\pi$

d. Soit $\mathcal{E}=\left\{\frac{5\pi}{4}+2k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$. Donner l'unique élément de l'ensemble $\mathcal{E}$ appartenant à l'intervalle des mesures principales.

## Exercice 2738

On considère la droite graduée ci-dessous où sont placés les points $A\left(\frac{20}{3}\pi\right)$, $B\left(-\frac{17}{5}\pi\right)$ et $C\left(\frac{43}{8}\pi\right)$.




1. a. Graphiquement, déterminer le nombre de fois dont on doit enlever $2\cdot\pi$ à l'abscisse du point $A$ afin d'obtenir la mesure principale de ce nombre?

b. En déduire la mesure principale de $\frac{20}{3}$.

2. Déterminer la mesure principale des abscisses des points $B$ et $C$.

## Exercice réservé 535

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$. On désigne par $M$ et $N$ deux points du cercle trigonométrique.

1. Parmi les mesures d'angles ci-dessous, lesquelles appartiennent à l'intervalle des mesures principales :

a. $\frac{5\pi}{3}$ b. $-\frac{7\pi}{4}$ c. $\frac{-2\pi}{3}$ d. $1{,}1\pi$

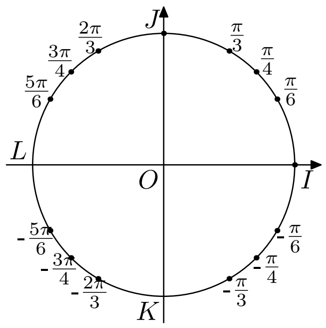
2. Déterminer la mesure principale des angles définis par les points $M$, $N$, $P$ et $Q$ ci-dessous, puis placer chacun de ces points sur le cercle trigonométrique ci-contre :

a. $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\frac{7\pi}{3}$

b. $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON}\right)=-\frac{15\pi}{4}$

c. $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OP}\right)=\frac{5\pi}{3}$

d. $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OQ}\right)=\frac{19\pi}{6}$




## Exercice 2201

Déterminer la mesure principale des angles orientés de mesure suivante :

a. $\frac{9\pi}{4}$ b. $\frac{192\pi}{6}$ c. $-\frac{5\pi}{4}$

d. $-\frac{33\pi}{2}$ e. $\frac{16\pi}{7}$ f. $\frac{52\pi}{3}$

## Exercice réservé 2242

1. Donner la mesure principale des angles suivants :

a. $\frac{15\pi}{7}$ b. $\frac{13\pi}{9}$ c. $\frac{173\pi}{12}$

d. $\frac{165\pi}{7}$ e. $-\frac{64\pi}{15}$ f. $-\frac{429\pi}{33}$

2. Voici deux intervalles de mesures d'angles orientés :
$I=\left[\frac{2\pi}{3}\,;\frac{7\pi}{3}\right]$ ; $J=\left[\frac{7\pi}{3}\,;\frac{35\pi}{8}\right]$

Déterminer l'écriture de chacun de ces ensembles en utilisant les mesures principales d'angles orientées.

## Exercice 2737

1. On se propose, dans cette question, de déterminer la mesure principale de l'angle $\alpha=\frac{73}{5}\pi$ :

a. Soit $k$ un entier relatif réalisant l'encadrement suivant :
$-\pi < \frac{73}{5}\pi+2\cdot k\cdot\pi \leqslant \pi$
Réaliser un encadrement de $k$ à l'aide de l'encadrement ci-dessus.

b. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'unique nombre entier $k$ réalisant cet encadrement.

c. En déduire la mesure principale de l'angle $\alpha$.

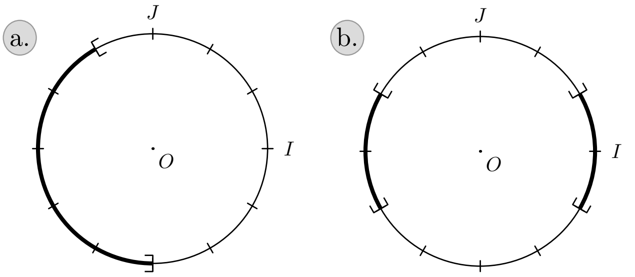
2. De la même manière, déterminer la mesure principale des angles suivants :

a. $-\frac{29}{3}\pi$ b. $-\frac{27}{4}\pi$ c. $\frac{70}{9}\pi$

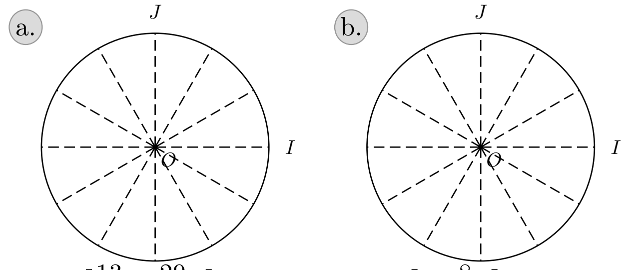
## Exercice 2799

1. Donner, sous forme de réunions d'intervalles, l'ensemble formé par les mesures principales des angles repérant les points surlignés du cercle trigonométrique :




**2.** Pour chaque question, surligner l'ensemble des points ayant pour angle orienté l'ensemble précisé sous le cercle trigonométrique :




a. $\left[\frac{13\pi}{3};\frac{29\pi}{6}\right]$ b. $\left[\frac{\pi}{2};\frac{8\pi}{3}\right]$

**Exercice réservé 2269**

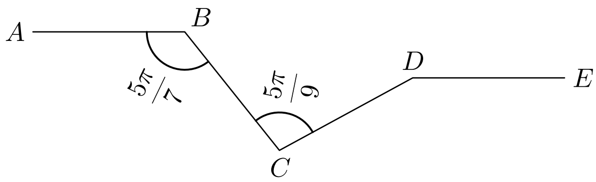
Déterminer la mesure principale des angles orientés suivant :

a. $\frac{254\pi}{5}$ b. $-\frac{70\pi}{3}$ c. $\frac{92\pi}{7}$

## 6. Angles oriéntés et algèbre :

**Exercice réservé 2798**

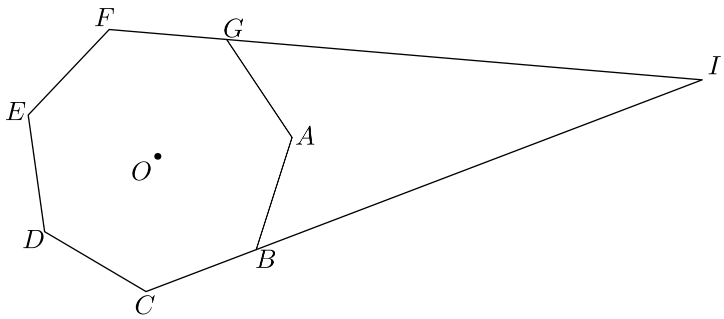
Sur le dessin ci-dessous, est représentée une ligne brisée $ABCDE$ dont les angles géométriques $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ ont été indiqués.




Les droites $(AB)$ et $(DE)$ sont parallèles. Déterminer la mesure principale de l'angle orientée $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}\right)$.

**Exercice réservé 2268**

On considère l'heptagone régulier $ABCDEFG$ de centre $O$.




Le point $I$ est le point d'intersection des droites $(BC)$ et $(FG)$.

**1.** Donner, en justifiant votre démarche, la mesure des angles orientées suivant *(on passera dans un premier temps par l'angle géométrique)* :

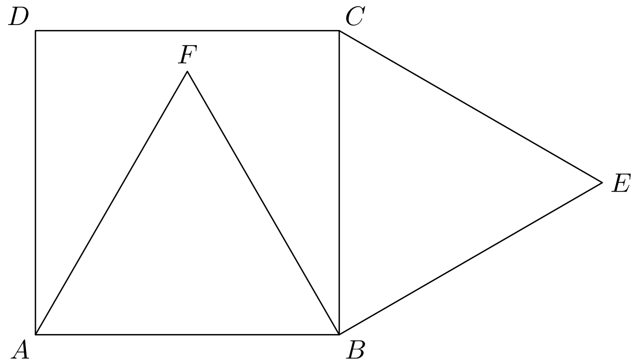
a. $\left(\overrightarrow{OG};\overrightarrow{OB}\right)$ b. $\left(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AB}\right)$ c. $\left(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CD}\right)$

**2.** Déterminer, avec l'aide de la relation de Chasles, la mesure des angles orientés suivant :

a. $\left(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{CB}\right)$ b. $\left(\overrightarrow{IG};\overrightarrow{IB}\right)$

**Exercice 2233**

On considère le carré $ABCD$.
Soit le point $E$ extérieur au carré tel que $BCE$ soit équilatéral.
Soit $F$ le point intérieur au carré tel que le triangle $ABF$ soit équilatéral.




On souhaite montrer que les points $D$, $F$ et $E$ sont alignés.

**1.** a. Donner la mesure des deux angles orientés suivants : $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AD}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{DF};\overrightarrow{DA}\right)$

b. En déduire la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DF}\right)$.

**2.** a. Donner la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CE}\right)$.

b. En déduire la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}\right)$.

**3.** En déduire que les points $D$, $F$ et $E$ sont alignés.

Les questions suivantes ont pour objectif d'utiliser la relation de Chasles.

**4.** Détermmminer la mesure des angles orientés :

a. $\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{CF}\right)$ b. $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{CE}\right)$

## 255. Exercices non-classés :

## Exercice réservé 2271

Voici un tableau de quelques angles orientés et leurs rapports trigonométriques associés :

| $\alpha$ | $0$ | $\frac{\pi}{10}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ | $0$ |
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ | $1$ |
| $\tan x$ | $0$ | $\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ | $\times$ |

$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

## Exercice réservé 2817

Faire un exercice du style

1. Justifier que les intervalles suivants repèrent les mêmes points sur un cercle trigonométrique :

   $[-\frac{19\pi}{6} ; -\frac{11\pi}{4}[$

   $[\frac{5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{4}[$

2. Chercher l'intrus

   $[-\frac{19\pi}{6} ; -\frac{11\pi}{4}[$

   $[\frac{5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{4}[$

   $[\frac{-7\pi}{6} ; -\frac{3\pi}{4}[$

   $[\frac{5\pi}{6} ; -\frac{3\pi}{4}[$

3. Utiliser les questions précédentes pour représenter l'intervalle

   $[-\frac{19\pi}{6} ; -\frac{11\pi}{4}[$