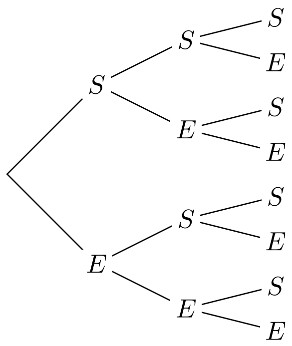
Première S/Bernoulli et loi binomiale

1. Répétitions indépendantes d'épreuves de Bernoulli :

Exercice 5382

On considère une épreuve admettant que deux issues : une nommé "*succès*" et noté S de probabilité 0,4 ; l'autre nommé "*échec*" et notée E.

On décide de répeter trois fois cette même épreuve. On obtient l'arbre de probabilité ci-contre.



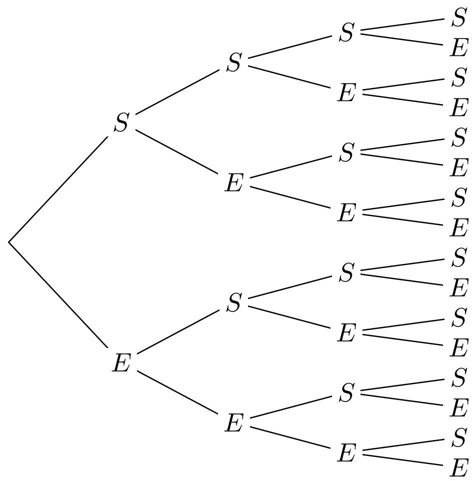
On suppose ces répétitions indépendantes entre elles.

1. Compléter cet arbre de probabilité?
2. a. Combien de chemins comportent 3 succès?
   b. Donner la probabilité d'obtenir trois succès à l'issue de cette expérience aléatoire?
3. a. Combien de chemins comportent 0 succès?
   b. Donner la probabilité de n'obtenir aucun succès à l'issue de cette expérience aléatoire?
4. a. Combien de chemins comportent 2 succès?
   b. Donner la probabilité d'obtenir exactement deux succès à l'issue de cette expérience aléatoire?

Exercice 5383

On considère une épreuve comportant que deux issues : une issue de probabilité 0,3 noté S ; l'autre issue est notée E.

On considère l'expérience aléatoire composée de quatre répétitions de l'épreuve précédente. Cette nouvelle expérience aléatoire est représentée par l'arbre de choix ci-dessous :



1. Combien d'évènements élémentaires composent cette expérience aléatoire?
2. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque évènement élémentaire, compte le nombre d'évènements S réalisés.

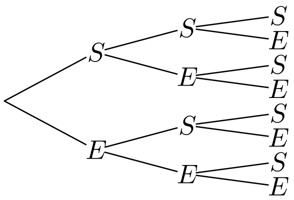
   Déterminer les probabilités suivantes arrondies au millième :

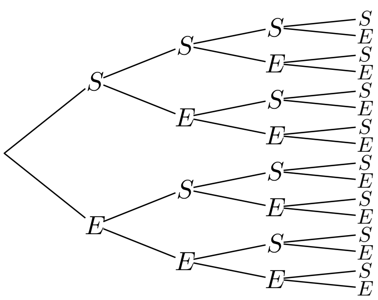
   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$

2. Coefficients binomiaux :

Exercice 5384

Voici les arbres de choix associés à la répétition d'une épreuve de Bernoulli respectivement 3 et 4 fois :





1. Pour la répétition trois fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3
Nombre d'issues				

2. Pour la répétition quatre fois de l'épreuve de Bernoulli, compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4
Nombre d'issues					

3. Y a-t-il une méthode pour obtenir le second tableau à partir du premier?

Exercice 5385

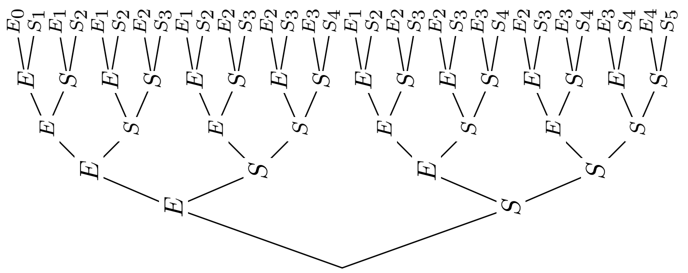
1. Reconstruire le triangle de Pascal jusqu'à $n=7$.
2. A l'aide du tableau de la question 1., donner les valeurs des coefficients binomiaux suivant :

   a. $\binom{5}{3}$ a. $\binom{4}{0}$ a. $\binom{4}{2}$ a. $\binom{7}{5}$
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants :

   a. $\binom{5}{3}$ a. $\binom{12}{5}$ a. $\binom{8}{6}$ a. $\binom{7}{2}$

Exercice 5203

La figure ci-dessous représente la répétition de cinq épreuves de Bernoulli où les deux issues sont S *(succès)* et E *(échec)*. Le nombre en indice sur le cinquième choix représente le nombre de succès réalisés dans le chemin choisi.



1. Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4	5
Nombre de chemins associés						

2. On considère la même épreuve de Bernoulli mais répétée six fois :

   a. Donner le nombre de chemins réalisant 4 succès lorsque l'on répète six fois une épreuve de Bernoulli *(on pourra compléter l'arbre de choix ou raisonner)*.

   b. Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de succès	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de chemins associés							

3. Loi binomiale :

Exercice 6064

Soit $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 15 et 0,35. C'est à dire : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(15\,;0{,}35)$

Déterminer la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=7)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$

Exercice 4323

Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. A chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

Déterminer la probabilité exacte pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie, puis sa valeur arrondie au dixième.

Exercice réservé 4157

Un urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise *(on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence)*

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Proposition : La probabilité de tirer exactemet 3 boules blanches est : $3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^7$

Exercice 4151

Une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres n et p où n est égal à 4 et p appartient à $\left]0\,;1\right[$.

Sans justification, indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

- **Proposition 1 :** si $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)=8\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$ alors $p=\dfrac{2}{3}$.
- **Proposition 2 :** si $p=\dfrac{1}{5}$ alors $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)=\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$.

4. Loi binomiale et évènements complémentaires :

Exercice 5387

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètre $n=15$ et $p=0{,}63$.

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer les coefficients binomiaux suivants :

   a. $\dbinom{15}{13}$ b. $\dbinom{15}{14}$ c. $\dbinom{15}{15}$

2. Déterminer la valeur exacte des probabilités suivantes, puis arrondie à 10^{-4} près :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=13)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=14)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=15)$

3. En déduire la valeur, arrondie à 10^{-4} près, de la probabilité de l'évènement $\left\{\mathcal{X}\leqslant12\right\}$.

Exercice réservé 5408

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 6 et 0,3.

1. Déterminer la valeur exacte des probabilités suivantes, puis arrondies au centième près :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$

2. En déduire la valeur, approchée millième près, de : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant2)$

Exercice 4213

Lors d'une épidémie chez des bovins, un test de cette maladie est mis en place. Une étude est faite sur ce troupeau et la probabilité que le test soit positif sur un animal de ce troupeau est de 0,058.

On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par $\mathcal{X}$?

2. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif? On donnera la valeur exacte et la valeur approchée au millième.

Exercice 4214

Un concours sportif est organisé, chaque année, pour relier deux villages le plus rapidement possible. Plusieurs moyens de déplacement sont possibles :

à vélo ; en roller ; à pied.

On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres. L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\dfrac{2}{3}$.

Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent "*non cycliste*". Donner également la valeur approchée au millième de cette probabilité.

Exercice réservé 4176

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huits stylos prélevés.

1. On admet que $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité des évènements suivants :

   a. A : "*il n'y a aucun stylo avec un défaut*" ;

   b. B : "*il y a au moins un stylo avec un défaut*" ;

   c. C : "*il y a exactement deux stylos avec un défaut*".

5. Loi binomiale et fonctions de répartition :

Exercice 8210

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètres 14 et 0,44 $(\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(14\,;0{,}44))$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,0002	0,003	0,02	0,073	0,186	0,365	0,576	0,765

k	8	9	10	11	12	13	14
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,895	0,963	0,99	0,998	0,999	0,999	1

1. a. Déterminer la probabilité de l'évènement $\{\mathcal{X}=5\}$.

   b. Donner la valeur de : $\mathcal{P}(\mathcal{X}=8)+\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$

2. Déterminer la valeur de la probabilité : $\mathcal{P}(\mathcal{X}>5)$

3. Répondre aux questions ci-dessous :

   a. Donner la probabilité que la variable $\mathcal{X}$ pour valeur au moins 7.

   b. Donner la probabilité que la variable $\mathcal{X}$ pour valeur au plus 7.

4. Déterminer les probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(3\leqslant\mathcal{X}\leqslant6)$ b. $\mathcal{P}(5\leqslant\mathcal{X}\leqslant10)$

6. Loi binomiale avec calculatrice : valeurs ponctuelles :

Exercice réservé 6065

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 7 et 0,6. C'est à dire : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(7\,;0{,}6)$

A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous, avec des valeurs arrondies au millième, afin d'obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x)$								

7. Loi binomiale avec calculatrice : valeurs cumulées :

Exercice 5407

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 20 et 0,2.

On répondra aux questions à l'aide de la calculatrice. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près :

1. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$

2. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 9)$

Exercice 5426

On suppose qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre $n=22$ et $p=0{,}37$

A l'aide de la calculatrice et sans justification, donner la probabilité de $\mathcal{P}(3\leqslant\mathcal{X}\leqslant 7)$ arrondie à 10^{-4} près.

Exercice réservé 5816

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes de thé vert chez un grossiste. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

Une étude réalisée sur les boites de thé vert du grossiste montre que 12 % des boîtes présentent des traces de pesticides dans leur thé.

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à ce prélèvement de 10 boites, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides. On donner la valeur exacte et la valeur arrondie à 10^{-4}.

3. Donner, au millième près, la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Exercice 5386

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre $n=5$ et $p=0{,}6$.

On arrondira les probabilités au millième près.

1. Donner la loi de la variable $\mathcal{X}$ sous la forme d'un tableau..

2. Déterminer les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 1)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}>1)$

8. Loi binomiale - problèmes :

Exercice 4153

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites *(A, B et C)*, une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot "*BBAAC*" signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. Combien y-a-t-il de mots-réponses possible à ce questionnaire?

2. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

a. E : "*le candidat a exactement une réponse exacte.*".

b. F : "*le candidat n'a aucune réponse exacte*".

c. G : "*le mot-réponse du candidat est un palindrome*". *(On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, "BACAB" est un palindrome)*

Exercice réservé 3748

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres.
Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b.

2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut b.
Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les évènements suivants :

- A : "*la montre tirée présente le défaut a*" ;
- B : "*la montre tirée présente le défaut b*" ;
- C : "*la montre tirée ne présente aucun des deux défauts*" ;
- D : "*la montre tirée présente un et un seul des deux défauts*".

La probabilité de l'évènement C est égale à 0,882.

1. Calculer la probabilité de l'évènement D.

2. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres.

On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.

Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b.

On définit l'évènement :
E : "*quatre montres au moins n'ont aucun défaut*".

Calculer la probabilité de l'évènement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice réservé 5448

Dans un établissement scolaire deux associations proposent des activités para-scolaire aux élèves : l'association sportive et l'association artistique, une étude a portée sur l'inscription des élèves à chacune de ces deux associations. Voici une partie de ses résultats :

- 42 % des élèves se sont inscrits à l'association sportive ;
- 35 % des élèves se sont inscrits à l'association artistique ;
- 32 % des élèves possédent une inscription aux deux associations.

1. On choisit au hasard un élève dans l'établissement. On considère les évènements suivants :
   - S : "*l'élève est inscrit à l'association sportive*" ;
   - A : "*l'élève est inscrit à l'association artistique*" ;

   a. D'après les données de l'énoncé, donner la valeur des probabilités suivantes :
   $\mathcal{P}(S)$; $\mathcal{P}(A)$; $\mathcal{P}(S \cap A)$

   b. Déterminer la probabilité de l'évènement :
   U : "*L'élève est inscrit dans au moins une des deux associations*"

   c. On considère l'évènement :
   E : "*L'élève est inscrit dans une et une seule de ces deux associations*".
   Montrer que la probabilité de cet évènement vérifie :
   $\mathcal{P}(E) = 0{,}13$

2. On forme des groupes de 32 élèves de cet établissement. On suppose que le choix des élèves s'effectue indépendant des élèves précédemment choisi et ne modifie pas la probabilité du groupe.

   On s'intéresse à la variable aléatoire $\mathcal{X}$ comptant le nombre d'élèves d'un tel groupe possédant l'inscription à une et une seule de ces associations.

   a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire $\mathcal{X}$?

   b. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins deux élèves de ce groupe qui aient une et une seule inscription dans une de ces deux associations.
   On arrondira les résultats à 10^{-4} *près.*

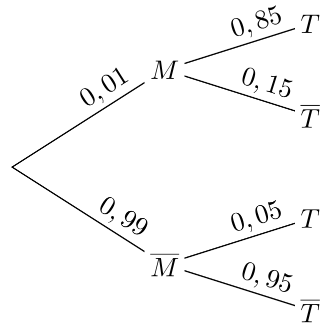
Exercice 5489

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux.

On note les évènements :

- M : "*l'animal est porteur de la maladie*" ;
- T : "*le test est positif*".

Voici l'arbre de probabilité obtenu après l'étude du cheptail :



1. Un animal est choisi au hasard.

   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif?

   b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

2. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par $\mathcal{X}$? Justifier.

   b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif? On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième près.

3. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subbissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

   a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ associant à un animal le coût à engager.

   b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager?

9. Espérance d'un loi binomiale :

Exercice 4168

On dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

1. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire $\mathcal{X}$?

2. Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2)$.

3. Donner l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice réservé 4194

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.

Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude. Soit $\mathcal{X}_i$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ième trajet et la valeur 0 sinon. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire définie par :
$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3 + \cdots + \mathcal{X}_{40}$

1. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

2. Dans cette partie, on suppose que : $p=\dfrac{1}{20}$.

   a. Calculer l'espérance mathématiques de $\mathcal{X}$.

   b. Calculer les probabilités :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$

   c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

Exercice 4215

Une usine produit des sacs. On suppose que la probabilité *(arrondie au centième)* qu'un sac soit défectueux est égale à 0,03.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Quelle est la probabilité de l'évènement "*au moins un sac est défectueux*"? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
   Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Exercice 4197

Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été, il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.

Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\dfrac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.

Une somme de 1 crédit *(la monnaie locale)* est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.

Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.

Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. Evidemment si les 13 groupes inscrits se présent, le 13^{e} groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédit à l'association.

Les probabilités demandées seront arrondies au 100^{e} le plus proche.

1. Quelle est la probabilité P_{13} qu'un jour donné, il n'y ait pas de désistement, c'est à dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade?

2. Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.
   Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.

3. Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :
   $$\Big(\sum_{k=0}^{13} k\cdot\binom{13}{k}\cdot\Big(\frac{7}{8}\Big)^k\cdot\Big(\frac{1}{8}\Big)^{13-k}\Big)-2\cdot P_{13}$$
   Calculer ce gain.

4. La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association?

10. Répartition de la distribution :

Exercice 5427

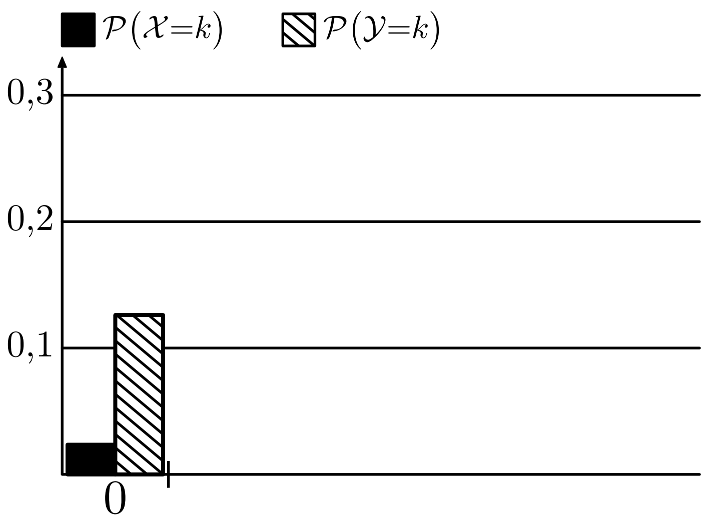
1. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}5$.

   Dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

2. On considère la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}3$.

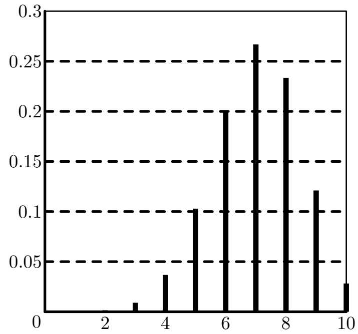
   Dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.

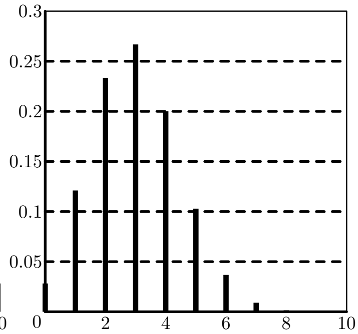
3. Dans le graphique ci-dessous, compléter les diagrammes en barre représentant la loi de chacun de ces variables aléatoires :



Exercice réservé 5428

Des deux représentations ci-dessous, laquelle représente une loi binomiale de paramètre $n=10$ et $p=0{,}3$:





11. Intervalle de confiance et de fluctuation :

Exercice 5435

On considère une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 9 et 0,3 : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(9\,;0{,}3)$

Le tableau ci-dessous donne des informations sur la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,04	0,196	0,463	0,73	0,901	0,975	0,996	1,0	1,0	1,0

Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a au moins 95 % de chance de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;5]$.

Exercice 5434

On considère une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre 9 et 0,5 : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(9\,;0{,}5)$

Le tableau ci-dessous donne des informations sur la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,002	0,02	0,09	0,254	0,5	0,746	0,91	0,98	0,998	1,0

1. Pour quelles valeurs de k a-t-on : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)>0{,}025$?
2. Pour quelles valeurs de k a-t-on : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)\geqslant 0{,}975$?
3. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ au moins 95 % de chance de prendre ses valeurs dans l'intervalle $[2\,;7]$.

Exercice 5436

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 30 et 0,32 : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(30\,;0{,}32)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0	0	0,001	0,005	0,018	0,049	0,11	0,208	0,341

k	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,494	0,645	0,774	0,871	0,934	0,97	0,988	0,995	0,999

k	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

1. Déterminer les plus petits entiers a et b tels que :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a) > 0{,}025$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}975$
2. Justifier que : $\mathcal{P}(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}95$
3. En notant $F=\dfrac{\mathcal{X}}{30}$ la variable aléatoire qui représente la fréquence aléatoire du succès. Justifier que :
   $\mathcal{P}\Big(\dfrac{a}{30}\leqslant F\leqslant\dfrac{b}{30}\Big) \geqslant 0{,}95$

Exercice réservé 5445

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètre 20 et 0,34 : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(20\,;0{,}34)$

On répondra aux questions sans justifier et à l'aide de la calculatrice.

1. Déterminer les deux plus petits entiers a et b vérifiant les inégalités :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a) > 0{,}025$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}975$
2. Déterminer l'intervalle de fluctuation J au seuil de 95 %

Exercice réservé 5438

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 100 et 0,81.

k	71	72	73	74	75	76	77	78	79
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,010	0,018	0,032	0,053	0,084	0,127	0,185	0,257	0,343

k	80	81	82	83	84	85	86	87	88
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	0,439	0,540	0,640	0,733	0,813	0,877	0,924	0,957	0,977

Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 %.

Exercice 5490

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 100 et 0,35 ($\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(100\,;0{,}35)$).

Les questions suivantes sont à traiter à l'aide de la calculatrice et les résultats doivent être donnés, si nécessaire, au millième près :

1. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=43)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 38)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 31)$
2. a. Déterminer la valeur des plus petits entiers a et b vérifiant les deux conditions suivantes :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a) > 0{,}025$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}975$
   b. Donner l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence associée à la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice 5446

Une société affirme que 80 % de ses clients sont satisfaits par ses produits.

1. Une association de consommateurs souhaite vérifier cette allégation et commande une étude portant sur 50 clients de cette société.

   a. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

   b. L'étude obtient un taux de satisfaction de 71 %. Selon cette étude, que peut-on dire de l'affirmation de la société au seuil de 5 %?

2. L'association renouvelle son étude qui porte cette fois sur 100 clients. Cette nouvelle étude obtient toujours un taux de satisfaction de 71 %.
Que peut-on dire de l'affirmation de la société au seuil de 5 %.

Exercice réservé 5449

On considère un jeu utilisant deux urnes contenant des boules de couleurs rouges et bleues indiscernables au toucher. On suppose les tirages dans les deux urnes indépendant l'un de l'autre. Voici la composition de chacune des urnes :

- L'urne A est composée de trois boules rouges et de deux boules bleues ;
- L'urne B est composée de 12 boules rouges et de 28 boules bleues.

Chaque participant doit retirer une boule dans l'urne A, puis une boule dans l'urne B.

1. a. Construire un arbre de probabilité représentant ce jeu.

   b. Montrer que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge a pour valeur $\dfrac{18}{25}$

2. On répète 20 fois ce jeu de manière indépendante. On considére la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui compte le nombre de jeu où au moins une boule rouge a été tirée.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire $\mathcal{X}$?

   b. Déterminer la probabilité de $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 18)$. Puis, donner la valeur approchée au millième de cette probabilité.

3. a. Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 % de la loi binomiale d'une variable aléatoire $\mathcal{Y}$ suivant une loi binomiale de paramètre 100 et $\dfrac{18}{25}$.

   b. Une étude statistique a portée sur la répétition 100 fois de ce jeu. La fréquence d'appartion de l'évènement "*au moins une boule rouge a été obtenue*" a été de 0,55. Doit-on rejeter cette étude avec un risque de 5 %?

Exercice 7851

Un agriculture conditionne ses tomates en fonction de leur taille *(calibre)*. A ses fournisseurs, il annonce que 40 % de ses tomates ont un calibre supérieur ou égal à 6 *(un diamètre supérieur à 47 mm)*.

L1	L2
0	2.2E-7
1	4.6E-6
2	4.7E-5
3	3.1E-4
4	0.0015
5	0.0057
6	0.0172
7	0.0435
8	0.094
9	0.1763
10	0.2915
11	0.4311
12	0.5785
13	0.7145
14	0.8246
15	0.9029
16	0.9519
17	0.9788
18	0.9917
19	0.9971
20	0.9991
21	0.9998
22	1
23	1
24	1
25	1
26	1
27	1
28	1
29	1
30	1
------	------

Se rendant dans l'exploitation, un fournisseur prélève 30 tomates et observent que, parmi elles, 10 tomates sont d'un calibre supérieur ou égal à 6.

Ci-contre est donnée la loi cumulative d'une variable aléatoire binomiale de paramètres 30 et 0,4.
On peut y extraire les résultats ci-dessous :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 10)\approx 0{,}2915 \quad ; \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 20)\approx 0{,}9991$

1. a. Déterminer la valeur du plus petit entier a réalisant la condition :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a) > 0{,}025$

   b. Déterminer la valeur du plus petit entier b réalisant la condition :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}975$

   c. En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence observée pour la variable aléatoire $\mathcal{X}$. *(on arrondira les bornes à 10^{-3})*

2. Que peut-on dire de l'observation du fournisseur?

12. Anciennes annales (programme antérieur à 2011) :

Exercice 3127

Un joueur dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et n boules vertes $(0\leqslant n\leqslant 10)$. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Le joueur tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évèments suivants :

   a. R : "*La boule tirée est rouge*" ;

   b. B : "*la boule tirée est blanche*" ;

   c. V : "*la boule tirée est verte*".

2. Le joueur décide de jouer une partie. Celle-ci se déroule de la manière indiquée ci-dessous.
Le joueur tire une boule de l'urne :
   - Si elle est rouge, il gagne 16 F ;
   - Si elle est blanche, il perd 12 F ;
   - Si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire une boule de l'urne ;
     - Si cette boule est rouge, il gagne 8 F ;
     - Si cette boule est blanche, il perd 2 F ;
     - Si cette boule est verte, il ne perd rien ni ne gagne rien.

   Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont indépendants. Au début de la partie, le joueur possède 12 F. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que le joueur possède à l'issue de la partie *(un tirage ou deux tirages selon le cas)*.

   a. Déterminer les valeurs prises par $\mathcal{X}$.

   b. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

   c. Montrer que l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$ a pour valeur : $E(\mathcal{X})=12+16\cdot\dfrac{n}{(n+7)^2}$.

3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par $f(x)=\dfrac{x}{(x+7)^2}$. Etudier les variations de f.

4. En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique $\mathcal{X}$ est maximale. Calculer cette valeur maximale *(on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible)*.

13. Loi géométrique tronquée :

Exercice 7422

On considère l'expérience aléatoire suivante qui consiste à lancer un dé 5 fois successivement *(et de manière indépendante)* et de noter le numéro de lancer où la face 6 est apparu la première fois.
Si la face 6 n'est pas apparu lors de ces 5 lancers alors on note 0.

1. Construire l'arbre de probabilité associé à cette expérience aléatoire.
2. On considère la variable aléatoire qui associe à chaque épreuve de l'expérience aléatoire associe le nombre noté.

   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

255. Exercices non-classés :

Exercice réservé 4624

Parmi dix personnes quelle est la probabilite qu'au moins deux personnes aient la même date d'anniversaires?

Exercice 7114

Les résultats approchés sont à arrondir au millième.

Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique.

On prélève au hasard 100 clés dans la production de la journée pour vérification. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 clés.

On admet que la probabilité qu'une clé USB prélevée au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est égale à 0,015.
On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de clés défectueuses de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer les probabilités $p(\mathcal{X}=0)$ et $p(\mathcal{X}=1)$.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux clés soient défectueuses.

