# Première S/Etude des dérivées

## 1. Nombre dérivé et sens de variation :

**Exercice 6061**

Voici le tableau de variations d'un fonction $f$ définie sur $[-4\,;4[$.

| $x$ | $-4$ | | $-2$ | | $-1$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | $-2$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $-1$ ‖ |

Déterminer le signe du nombre dérivée de la fonction $f$ en 1.

**Exercice 6062**

On considère une fonction $f$ dont on donne ci-dessous le tableau de signe de sa fonction dérivée :

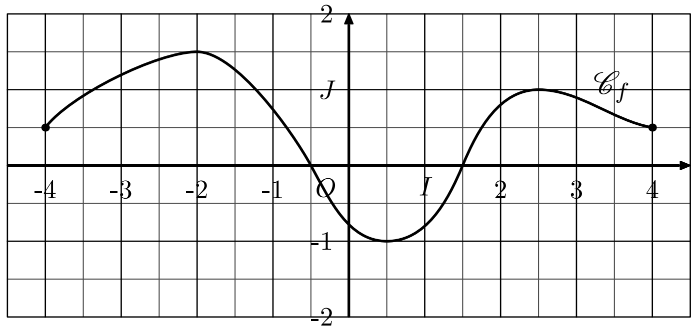
| $x$ | $-5$ | | $-2$ | | $1$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

On considère la tangente $(T)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Quel est le sens de variation de la tangente $(T)$?

**Exercice 4730**

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé ci-dessous :




On répondra à l'ensemble des questions de cet exercice en se référant au graphique ci-dessus.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $[-4\,;4]$.

2. a. On considère la tangente $(T_1)$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-3$. Donner le signe du coefficient directeur de la tangente $(T_1)$.

   b. On considère la tangente $(T_2)$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. Donner le signe du coefficient directeur de la tangente $(T_2)$.

   c. On considère la tangente $(T_3)$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-2$. Donner le signe du coefficient directeur de la tangente $(T_3)$.

3. a. Quel est le signe du nombre dérivée de la fonction $f$ en $x=-1$?

   b. Quel est le signe du nombre dérivée de la fonction $f$ en $x=2$?

   c. Quel est le signe du nombre dérivée de la fonction $f$ en $x=2{,}5$?

4. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. Dresser le tableau de signe de la fonction $f'$.

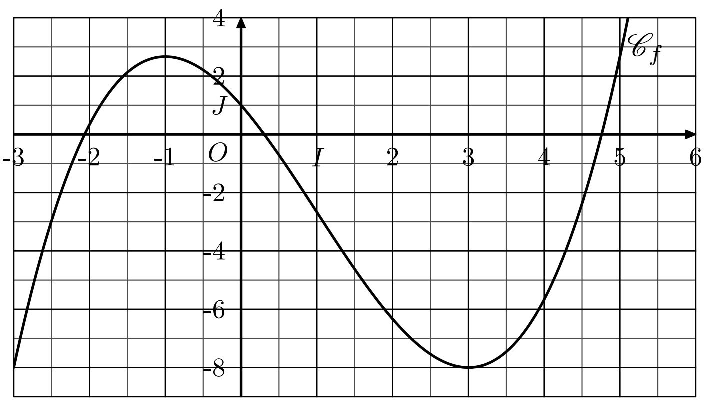
## 2. Dérivée et sens de variation :

**Exercice 5230**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - x^2 - 3x + 1$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ est donnée dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal ci-dessous :




1. Graphiquement, dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-3\,;6]$. *(on n'indiquera pas les valeurs des images)*

2. a. Déterminer l'expression de la fonction $f'$.

b. Dresser le tableau de signe de la fonction $f'$ sur $\mathbb{R}$.

3. Que remarque-t-on?

## Exercice réservé 2326

On considère la fonction $f$ dont l'image de $x$ est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x^2+2x+1}$$

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction $f$ est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée $f'$ de la fonction $f$.

3. a. Déterminer le tableau de signe de $f'$ sur $\mathbb{R}$..

b. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
On admettra les deux limites suivantes :
$$\lim_{h\mapsto -\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{h\mapsto +\infty} f(x) = 0$$

4. En déduire les extrémums de la fonction $f$.

## Exercice 6666

On considère la fonction $f$ dont l'image d'un nombre $x$ est définie par la relation :
$$f(x) = \frac{-x^2-3\cdot x+1}{x-1}$$

1. Donner l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de la fonction $f$.

2. Déterminer l'expression de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$.

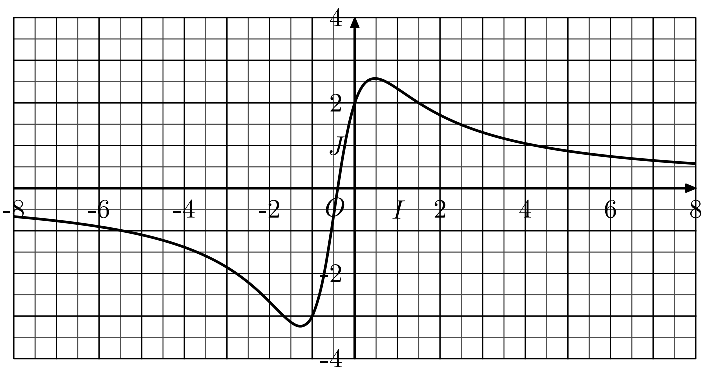
3. Etablir le tableau de signe de la fonction $f'$ sur $\mathcal{D}_f$.

4. En déduire le tableau de variations de la fonction $f$ sur $\mathcal{D}_f$.
*(on ne complétera pas les valeurs du tableau ...)*

## Exercice réservé 5347

On considère la fonction $f$ dont l'image d'un nombre $x$ est définie par la relation :
$$f(x) = \frac{5\cdot x+2}{x^2+x+1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f$ donnée ci-dessous :




1. Donner l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de la fonction $f$.

2. a. Justifier que la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ admet pour expression :
$$f'(x) = \frac{-5\cdot x^2-4\cdot x+3}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

b. Etablir le tableau de signe de la fonction $f'$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction $f$. *(on indiquera les valeurs des extrémums arrondies au dixième près)*

3. a. Déterminer l'équation de la tangente $(T)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b. Tracer la tangente $(T)$ dans le repère ci-dessus.

c. Algébriquement, étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $(T)$.

## Exercice 2668

On considère la fonction définie par la relation suivante :

$$f : x \longmapsto \left(5x^2+5x-4\right)\cdot\sqrt{x}$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de la fonction $f$.

2. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de $f$.

b. Dresser le tableau de signe de la fonction $f'$.

3. Donner le tableau de variations de la fonction $f$.
On admet les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = +\infty$$

## Exercice 2842

On considère la fonction $f$ définie par :

$$f : x \longmapsto \sqrt{x}\cdot\left(-5x^2-5x-1\right)+\frac{1}{2}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f$.

2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée $f$.

3. Dresser le tableau de variations complet de la fonction $f$.
On admet la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = -\infty$

4. a. Justifier que la fonction $f$ s'annule une seule fois sur son ensemble de définition.

b. Justifier, à l'aide de valeur approchée, que la fonction $f$ s'annule entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{15}{100}$.

## *3. Fonction et fonction dérivée :*

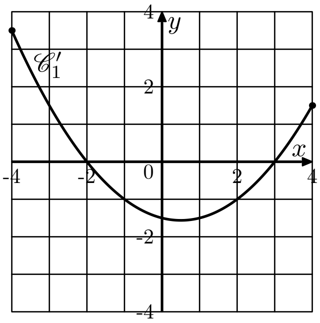
 

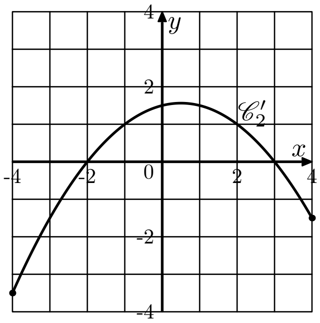
## Exercice 7748

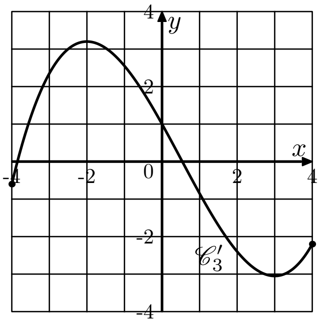
On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;4]$ et dont on connait les propriétés suivantes :

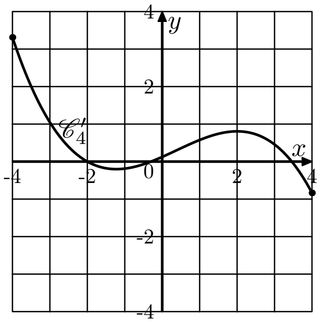
- la fonction $f$ admet un maximum en $-2$ sur l'intervalle $[-3\,;0]$.
- la fonction $f$ admet un minimum en 3 sur l'intervalle $[1\,;4]$.

Parmi les quatre courbes représentatives ci-dessous, une seule est la courbe représentative de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$.



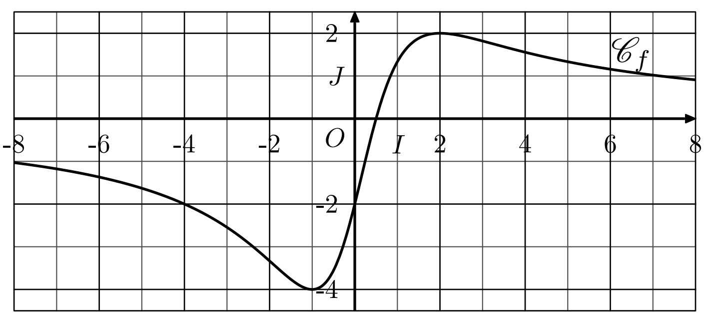




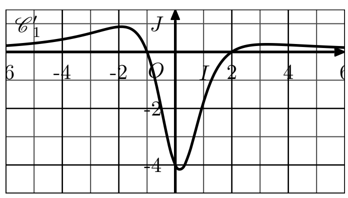


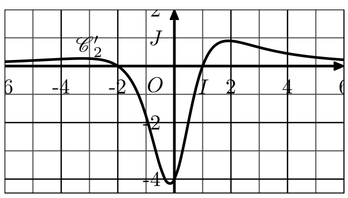

## Exercice 5020

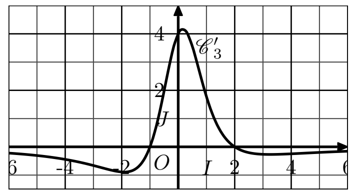
On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui admet dans le repère $(O\,;I\,;J)$ la courbe $\mathscr{C}_f$ pour représentation :

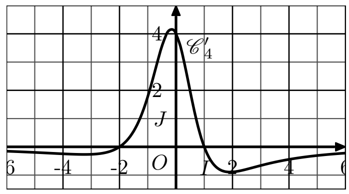



Parmi les quatre courbes $\mathscr{C}'_1$, $\mathscr{C}'_2$, $\mathscr{C}'_3$ et $\mathscr{C}'_4$ présentées ci-dessous, déterminer la courbe représentative de la fonction $f'$, dérivée de la fonction $f$. Justifier votre choix :



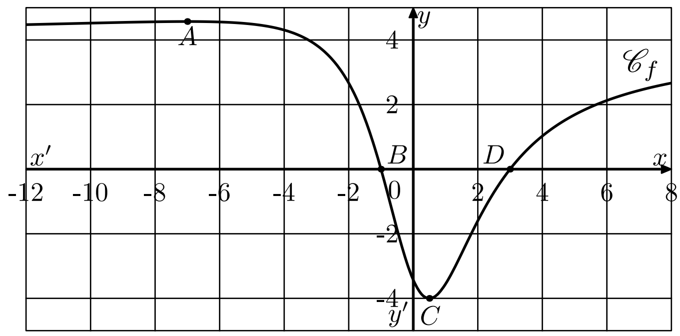







## Exercice 5731

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé :

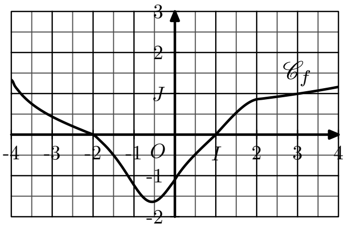


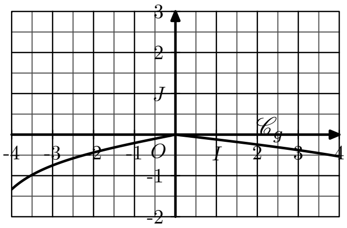

- La courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes horizontales aux points $A$ et $C$ d'abscisses respectives $-7$ et $\dfrac{1}{2}$ ;
- La courbe $\mathscr{C}_f$ intercepte l'axe des abscisses aux points $B$ et $D$ de coordonnées respectives $(-1\,;0)$ et $(3\,;0)$.

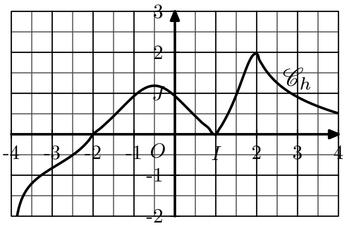
1. On considère la fonction $g$ qui admet pour dérivée la fonction $f$ $(g'=f)$. Dresser le tableau de variations de la fonction $g$.
2. On considère la fonction $h$ qui est la dérivée de la fonction $f$ $(f'=h)$. Dresser le tableau de signe de la fonction $h$.

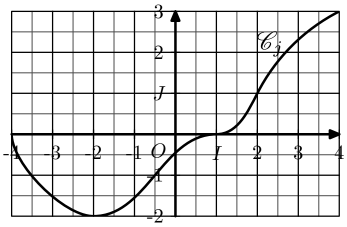
## Exercice réservé 2926

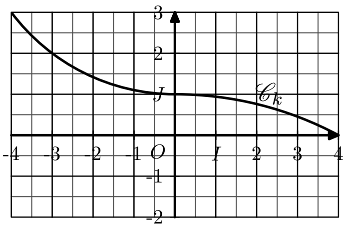
On considère les six fonctions $f$, $g$, $h$, $j$, $k$, $l$ définies sur $[-4\,;4]$ dont les courbes représentatives sont données ci-dessous :

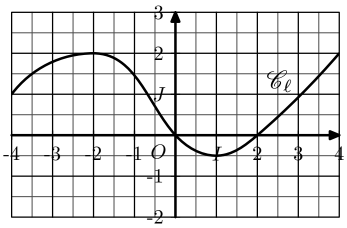













Associer à trois de ces fonctions leurs trois dérivées correspondantes.

## *4. Extrémum :*

### Exercice réservé 5278

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{3x-4}{x^2+1}$$

1. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée $f'$.

   b. Dresser le tableau de signe de la fonction $f'$.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
   On admettra les deux limites suivantes :
   $$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0$$

3. La fonction $f$ admet-elle des extrémums ? Si oui, préciser leurs caractéristiques.

### Exercice 2964

On considère la fonction $f$ définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x^2-2x-2}{2x^2+x+1}$$

1. Justifier que la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a. Etablir que la fonction dérivée $f'$ admet l'expression suivante :
   $$f'(x) = \frac{7x^2+14x}{\left(2x^2+x+1\right)^2}$$

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
   On admet les deux limites suivantes :
   $$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = \frac{3}{2} \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \frac{3}{2}$$

3. En déduire que la fonction $f$ admet pour minorant le nombre $-2$ et pour majorant le nombre $2$.

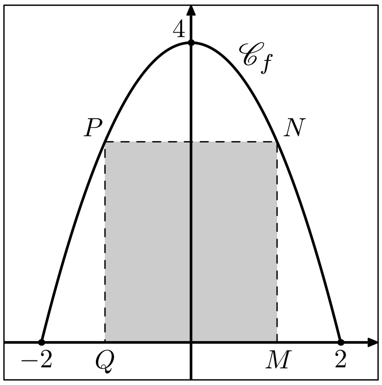
## *5. Modélisation :*

### Exercice réservé 5279

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = 4 - x^2$$

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,J)$ :




Le point $M$ est un point de l'axe des abscisses de coordonnées $(x\,;0)$ où $x\in[0\,;2]$. A partir du point $M$, on construit le rectangle $MNPQ$ dont les côtés sont parallèles aux axes.

Déterminer la position du point $M$ afin que l'aire du rectangle $MNPQ$ soit maximale.

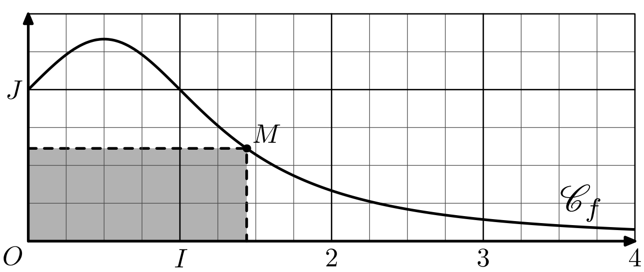
*Dans cet exercice, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

### Exercice 5244

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ :




On considère un point $M$ appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x$ et on construit comme l'indique la figure ci-dessus un rectangle où les points $O$ et $M$ sont des sommets de celui-ci.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ce rectangle en fonction de la valeur de $x$.

1. Donner l'expression de la fonction $\mathcal{A}$.

2. a. Déterminer l'expression de la fonction $\mathcal{A}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{A}$.

   b. Dresser le tableau de signe de la fonction $\mathcal{A}'$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.

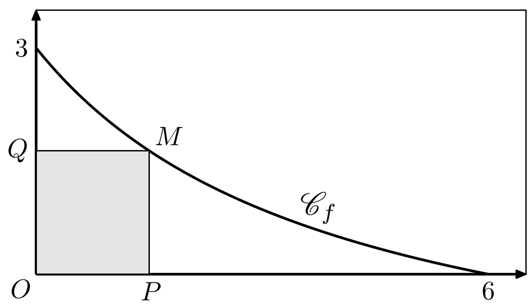
3. Quel est la position du point $M$ afin que l'aire du rectangle soit maximale ?

### Exercice réservé 5348

On considère la fonction $f$ définie sur $[0\,;6]$ par :

$$f(x) = \frac{12-2x}{x+4}$$

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ :




Soit $M$ un point de la courbe $\mathscr{C}_f$. On considère les points $P$ et $Q$ appartenant respectivement à l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées de sorte à ce que le quadrilatère $OPMQ$ soit un rectangle.

Déterminer la position du point $M$ afin que l'aire du rectangle $OPMQ$ soit maximale.

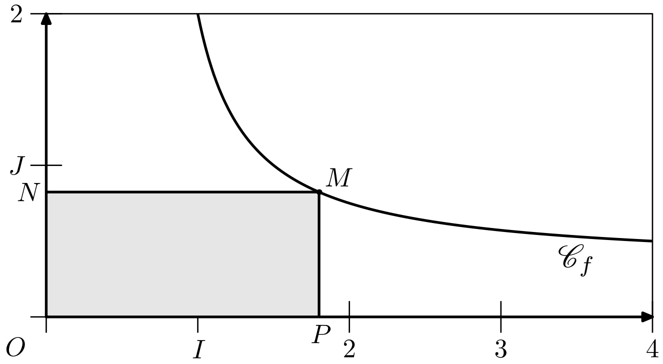
 

## Exercice 2828

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $\left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$$

La représenation $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



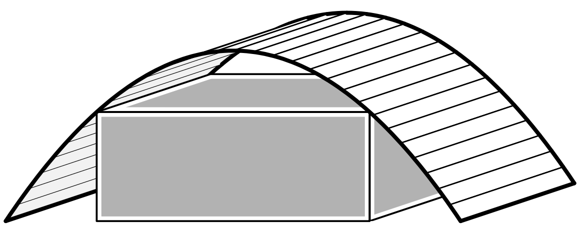

On considère un point $M$ appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$ et le rectangle $MNOP$ construit à partir du point $O$ et $M$ et dont les côtés sont parallèles aux axes.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $MNOP$ où $x$ est l'abscisse du point $M$. Le but de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de $x$, l'aire $\mathcal{A}(x)$ est minimale.

1. Donner l'expression de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de $x$.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de $\mathcal{A}$.
3. Etablir le sens de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
4. En déduire la position du point $M$ afin que l'aire du rectangle $MNOP$ soit minimale.

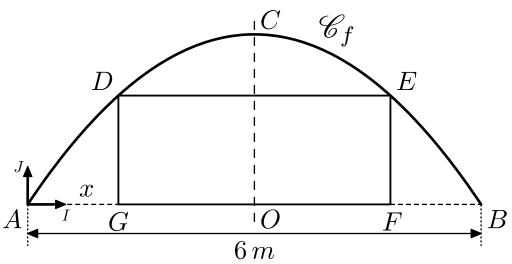
## Exercice 5243

Sous un hangar, dont le toit est de forme "*parabolique*", on souhaite installer une habitation de forme parallélépipédique. Le dessin ci-dessous illustre le problème :



On suppose l'habitat s'étalant sur toute la longueur du hangar. Le but de cet exercice est de déterminer les dimensions de la façade de cet habitat afin d'en maximaliser le volume.

On modélise ce problème par la figure ci-dessous :




Le rectangle $DEFG$ admet la droite $(CO)$ pour axe de symétrie. On note $x$ la mesure de la longueur $AG$.

Dans le repère $(A\,;I\,;J)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $[0\,;6]$ par la relation :

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^2 + \frac{3}{2}\cdot x$$

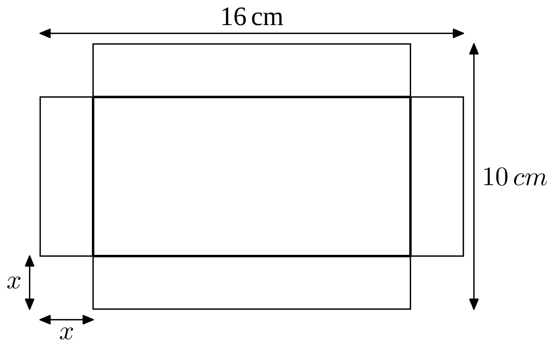
On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $DEFG$ en fonction de $x$.

1. Le point $G$ appartenant au segment $[AO]$, quelles sont les valeurs possibles pour la variable $x$ exprimée en mètre?
2. Démontrer que pour $x \in [0\,;3]$ :
$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\cdot x^3 - \frac{9}{2}\cdot x^2 + 9\cdot x$$
3. a. Déterminer le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $[0\,;3]$.

   b. En déduire la valeur de $x$ pour laquelle l'aire du rectangle $DEFG$ est maximale.

## Exercice réservé 5245

On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en *cm*.




1. a. Quelles valeurs peut prendre la variable $x$ dans ce problème?

   b. Donner l'expression du volume $\mathcal{V}$ en fonction de la valeur de $x$.
2. a. Déterminer l'expression de la fonction $\mathcal{V}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{V}$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{V}$.

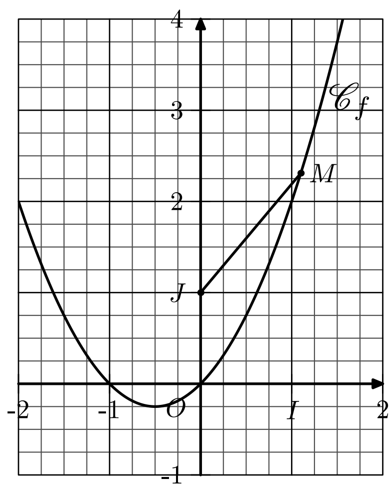
   c. Justifier que la fonction $\mathcal{V}$ admet une valeur maximale sur l'intervalle $[0\,;5]$.
3. Quelle est le volume maximale qu'on obtenir avec ce type de boite?

## Exercice 5246

On considère la fonction $f$ définie par la relation :

$$f(x) = x^2 + x$$

La représentation graphique est donnée ci-contre :




On considère le point $J$ de coordonnée $(0\,;1)$ et $M$ un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Déterminer la position du point $M$ pour laquel la longueur $JM$ est minimale.

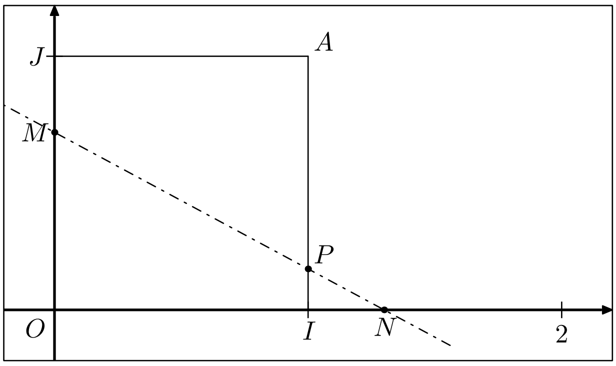
*Au cours de l'exercice, on utilisera la factorisation :*

$$4x^3 + 6x^2 - 2 = 2(x+1)^2(2x-1)$$

**Exercice 6667**

On considère la plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé représenté ci-dessous :




Le point $A$ a pour coordonnées $A(1\,;1)$.

Pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, on considère les deux points $M$ et $N$ définis par :

- $M\in[OJ]$ ; $JM=x$
- $N\in[OI)$ ; $N\notin[OI]$ ; $IN=x$

Le point $P$ est définit par l'intersection des droites $(MN)$ et $(AI)$.

Déterminer la valeur de $x$ afin que l'ordonnée du point $P$ soit maximale.

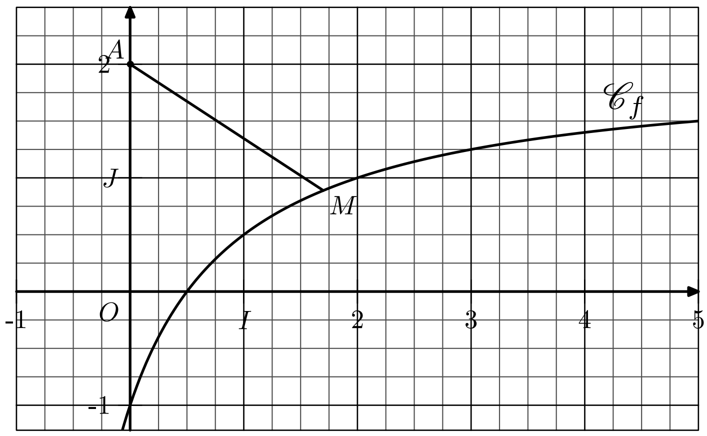
## 6. Avec un logiciel de calcul formel :

**Exercice réservé 5247**

On considère la fonction $f$ définie par la relation :

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$$

La représentation graphique est donnée ci-dessous :




On considère le point $A$ de coordonnée $(0\,;2)$ et $M$ un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Déterminer la position du point $M$ pour laquel la longueur $AM$ est minimale.

## 255. Exercices non-classés :

**Exercice réservé 2617**

Refaire entierement cet exercice, il est pique d'un autre cite :

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-2}$$

f passe par (0 ;5) et sa tangente est horizontalle

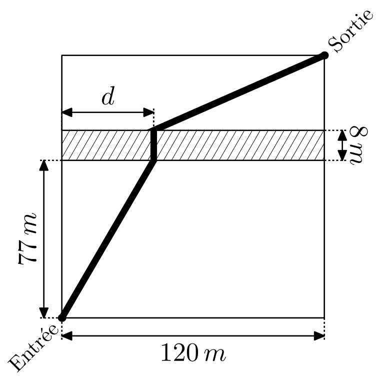
au point d'abscisse 1 coeff directeur de -3

determiner f.

**Exercice 8215**

La ville "*Promenade*" souhaite emmenager un terrain de forme carré traversé par une rivière traversant latéralement le terrain.

La figure ci-dessous représente le terrain et la rivière est la partie hachurée :




A quelle distance $d$ doit-on placer le pont pour que la distance parcourue par un visiteur soit minimale?