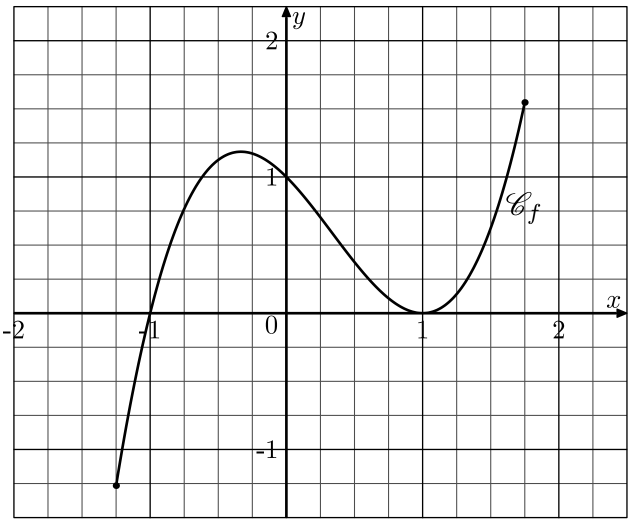
Première STMG/Nombre dérivée et fonction du troisième degré

1. Droite et tangente :

Exercice 7764

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1,25\,;1,75]$ par : $f(x)=x^3-x^2-x+1$

Dans le plan muni d'un repère représenté ci-dessous, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f :



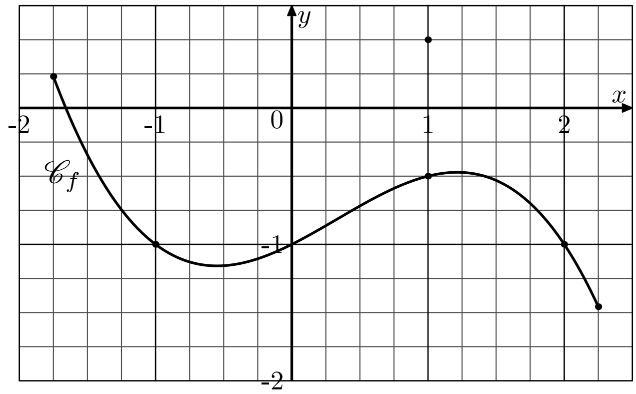
1. On considère la droite (d) d'équation : $y=-1,25\cdot x+1$
   a. Déterminer les coordonnées de deux points, choisis au hasard, de la droite (d).
   b. Tracer la droite (d) dans le repère.
2. On considère la droite (Δ) d'équation : $y=0,75\cdot x+1.5$

   Tracer la droite (Δ) dans le repère.
3. Compléter les phrases suivantes :
   a. La droite (d) est .... à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse ......
   b. La droite (Δ) est .... à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse ......

Exercice 7765

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1,75\,;2,25]$ par : $f(x)=x^3-x^2-x+1$

Dans le plan muni d'un repère représenté ci-dessous, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f :



1. On considère la droite (d) d'équation : $y=-1,5\cdot x+2$
   a. Déterminer les coordonnées de deux points, choisis au hasard, de la droite (d).
   b. Tracer la droite (d) dans le repère.
2. On considère la droite (Δ) d'équation : $y=0,25\cdot x-0.75$

   Tracer la droite (Δ) dans le repère.
3. Compléter les phrases suivantes :
   a. La droite (d) est .... à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse ......
   b. La droite (Δ) est .... à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse ......

2. Fonction dérivée du troisième degré :

Exercice 7864

Une fonction f polynômiale du troisième degré admet une expression de la forme :

$$f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$$

où a, b, c, d sont des nombres réels avec $a\neq 0$

La fonction f est dérivable pour tout nombre réel $(x\in\mathbb{R})$ et sa fonction dérivée f' admet pour expression :

$$f'(x)=3a\cdot x^2+2b\cdot x+c$$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous afin d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$f(x)=a{\cdot}x^3+b{\cdot}x^2+c{\cdot}x+d$	a	b	c	d	$f'(x)=3a{\cdot}x^2+2b{\cdot}x+c$
$3{\cdot}x^3+2{\cdot}x^2+x+5$					
$x^3-x^2+2{\cdot}x-4$					
$x^3-3{\cdot}x^2-x$					
$-2{\cdot}x^3+0{,}5{\cdot}x^2+2x-1$					
x^3+3x+5					
$-x^3-x^2$					

Exercice réservé 7766

Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner l'expression de sa fonction dérivée :

a. $f(x) = 2{\cdot}x^3 + x^2 + 4{\cdot}x + 1$

b. $g(x) = -x^3 + 2{\cdot}x^2 + x - 4$

c. $h(x) = -4{\cdot}x^3 + x + 1$

d. $j(x) = x^3 + 4{\cdot}x^2 + 1$

e. $k(x) = -3x^3 + x^2 - 3{\cdot}x - 4$

f. $\ell(x) = x^2 + 3{\cdot}x - 3$

Exercice 7767

1. On considère la fonction f définie pour tout nombre réel $(x{\in}\mathbb{R})$ par la relation :
$f(x) = 2{\cdot}x^3 - x^2 + 2{\cdot}x + 1$
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
   a. Déterminer les coordonnées du point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   b. On note (d) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   Déterminer le coefficient directeur de la tangente (d).
2. On considère la fonction f définie pour tout nombre réel $(x{\in}\mathbb{R})$ par la relation :
$g(x) = -x^3 + 2{\cdot}x^2 - x - 2$
On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
   a. Déterminer les coordonnées du point B de la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse -2.
   b. On note (Δ) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.
   Déterminer le coefficient directeur de la tangente (Δ).
3. A l'aide de la calculatrice, effectuer le tracé des courbes de ces deux fonctions. Que remarque-t-on?

3. Equation de la tangente :

Exercice 7590

Soit f une fonction polynômiale de degré 3 admettant pour expression :
$f(x) = a{\cdot}x^3 + b{\cdot}x + c{\cdot}x + d$
où les nombres a, b, c et d sont des nombres réels.

On appelle **fonction dérivée de la fonction f du troisième degré**, la fonction, notée f', dont l'expression est :
$f'(x) = 3{\cdot}a{\cdot}x^2 + 2{\cdot}b{\cdot}x + c$

$$f(x) = -\frac{2}{3}{\cdot}x^3 - 3{\cdot}x^2 + x + 10$$

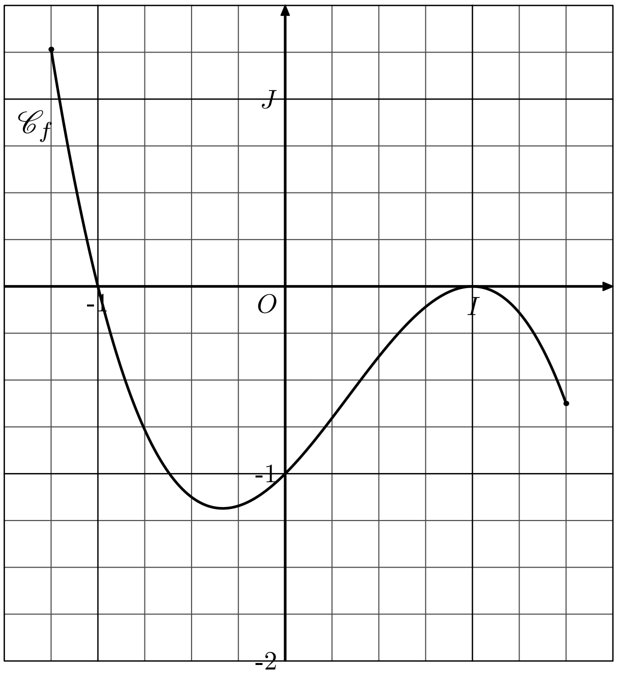
Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b. Donner la valeur de $f'(-3)$.
2. a. Donner les coordonnées du point A de $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse -3.
   b. Déterminer l'expression de la fonction affine g passant par le point de coordonnées $(-3\,;-2)$ et ayant 1 pour coefficient directeur.

Exercice 7774

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1{,}25\,;1{,}5]$ par la relation :
$f(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-dessous :

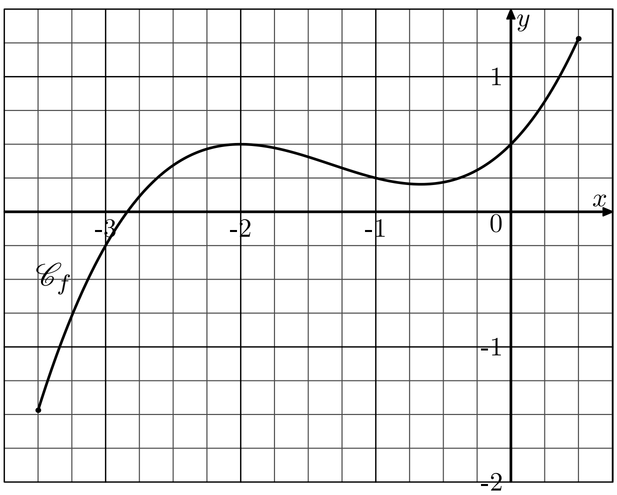


1. Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f a pour expression :
   $f'(x) = -3{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x + 1$
2. Déterminer l'image et le nombre dérivée de $-0{,}5$ par la fonction f.
3. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-0{,}5$.
   b. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

Exercice 7775

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-3{,}5\,;0{,}5\right]$ par la relation :
$f(x) = 0{,}25{\cdot}x^3 + x^2 + x + 0{,}5$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-dessous :

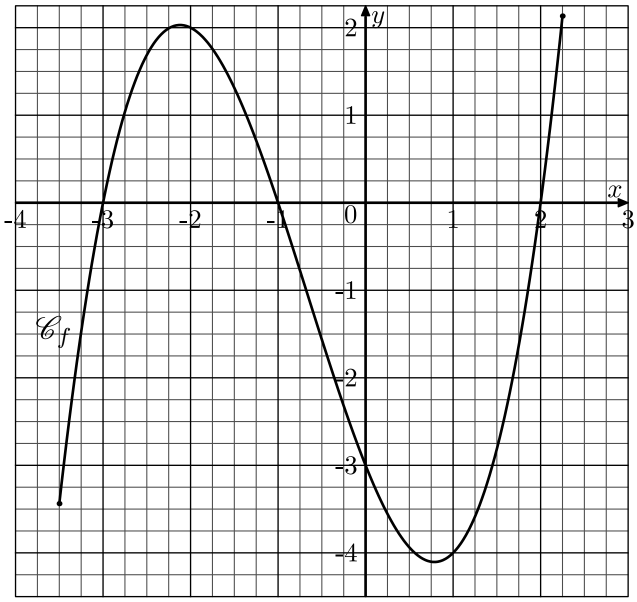


1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Déterminer les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$ par la fonction f.
3. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   b. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

Exercice réservé 7776

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-3{,}5\,;2{,}25\right]$ par la relation :
$f(x) = 0{,}5{\cdot}x^3 + x^2 - 2{,}5{\cdot}x - 3$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-dessous :



1. Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f a pour expression :
   $f'(x) = 1{,}5{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x - 2{,}5$
2. a. Déterminer les valeurs de $f(-2)$ et $f'(-2)$.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.
   c. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.
3. a. Déterminer les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T') à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   c. Tracer la tangente (T') dans le repère ci-dessus.

4. Tableau de variations :

Exercice réservé 7803

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-3\,;3\right]$ par l'expression :

$f(x) = 4{\cdot}x^3 + 3{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x + 1$

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2. a. Résoudre l'équation $12 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 6 = 0$

b. Dresser le tableau de signe de la fonction f' sur l'intervalle $[-3\,;3]$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;3]$.

Exercice 7804

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$ par l'expression :
$f(x) = -5 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 2$

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2. a. Résoudre l'équation $-15 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 3 = 0$

b. Dresser le tableau de signe de la fonction f' sur l'intervalle $[-2\,;4]$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;4]$.

Exercice réservé 7771

Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces.

Le montant des charges correspondant à la fabrication de x pièces, exprimé en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;25]$ par :
$C(x) = x^3 - 30 \cdot x^2 + 400 \cdot x + 100$

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière. Chaque pièce est vendue au prix de 247 euros.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en euros. Justifier que l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0\,;25]$ est :
$B(x) = -x^3 + 30 \cdot x^2 - 153 \cdot x - 100$

2. On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
Calculer $B'(x)$, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;25]$.

3. Justifier le tableau suivant :

x	0		3		17		$+\infty$
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. En déduire le tableau de variations complet de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;25]$.

5. Déterminer le nombre de pièce que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice maximal?

Exercice 7772

Une étude de l'INSEE a listé l'évolution en France des salaires nets annuels moyens de 1990 à 2010

En se servant des données de cette étude, on modélise l'évolution des salaires nets annuels moyens jusqu'en 2020 :

- Pour les hommes par la fonction h définie sur $[0\,;30]$ par :
$h(x) = 0{,}25 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 318 \cdot x + 17\,865$
- Pour les femmes par la fonction f définie sur $[0\,;30]$ par :
$f(x) = 0{,}6 \cdot x^3 - 13 \cdot x^2 + 470 \cdot x + 13\,324$

Ainsi, $h(0)$ désigne le salaire net annuel des hommes en 1990, $f(1)$ désigne le salaire net annuel des femmes en 1991, etc...

1. Calculer $h(15)$ et $f(15)$ puis interpréter les résultats.

2. Calculer l'écart des salaires nets annuels moyens prévus par ce modèle entre les hommes et les femmes en 2020.

3. Montrer que l'écart entre ces deux salaires peut être modélisé par la fonction g définie sur $[0\,;30]$ par :
$g(x) = -0{,}35 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 - 152 \cdot x + 4\,541$

4. On note g' la dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$.

5. Déterminer le signe de $g'(x)$ sur $[0\,;30]$.

6. Peut-on affirmer que l'écart entre les salaires nets annuels moyens des hommes et des femmes n'a fait que diminuer depuis 1990?

Exercice réservé 7773

Une entreprise produit et vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large ; on note x sa longueur exprimée en kilomètre, x étant un nombre compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euro de ce tissu est donné, en fonction de x, par :
$C(x) = 15 \cdot x^3 - 120 \cdot x^2 + 350 \cdot x + 1\,000$

Le cours du marché offre un prix de 530 € le kilomètre de tissu fabriqué par l'entreprise.
Pour tout $x \in [0\,;10]$, on note $R(x)$ la recette et $B(x)$ le bénéfice générés par la production et la vente de x kilomètres de tissu par l'entreprise.

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

2. Montrer que pour tout $x \in [0\,;10]$:
$B(x) = -15 \cdot x^3 + 120 \cdot x^2 + 180 \cdot x - 1\,000$

3. Déterminer $B'(x)$ pour $x \in [0\,;10]$ où B' désigne la fonction dérivée de B.

4. Etudier le signe de $B'(x)$ et en déduire les variations de la fonction B sur $[0\,;10]$.

5. a. Pour quelle longueur de tissu produit et vendu l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal?

b. Donner alors la valeur de ce bénéfice maximal?

Exercice 7825

Une entreprise fabrique des croquettes pour chiens. Chaque jour, elle en fabrique entre 0 et 80 tonnes. Le coût de fabrication, en euros, de x tonnes est modélisé par la fonction C définie par :
$C(x) = x^3 - 105 \cdot x^2 + 3700 \cdot x + 4000$

Une tonne de croquettes est vendue 1 900 €. La recette, pour x tonnes vendues, est donc donnée par une fonction R définie sur l'intervalle $[0\,;80]$.

1. a. Pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;80]$, donner l'expression de $R(x)$.

b. En déduire que le bénéfice réalisé par la vente de x tonnes de croquettes est donné par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;80]$ par :
$B(x) = -x^3 + 105 \cdot x^2 - 1800 \cdot x - 4000$

2. Calculer $B'(x)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B.

3. Justifier que le signe de $B'(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	0		10		60		80
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;80]$.

5. Quelle doit être la quantité de croquettes que l'entreprise doit vendre pour réaliser un bénéfice maximal?
Que vaut ce bénéfice?