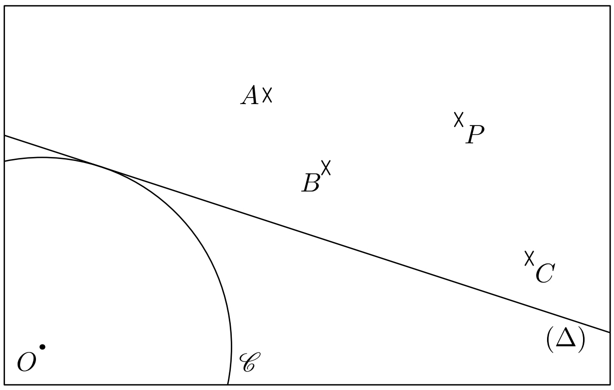
Seconde/Cercles et trigonométrie

1. Cercles et tangentes :

Exercice 1450

On considère la configuration donnée ci-dessous :



1. A l'aide de l'équerre, vérifier que la droite (Δ) est une tangente du cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

2. Tracer le cercle $\mathscr{C}'$ de centre P et tangent à la droite (Δ).
Par quel*(s)* point*(s)* passe*(ent)* de la figure, le cercle $\mathscr{C}'$ passe-t-il?.

Exercice 1094

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A un point situé à l'extérieur du cercle $\mathscr{C}$. On note $\mathscr{C}'$ le cercle ayant pour diamètre $[OA]$.

On note M et N les deux points d'intersection des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

1. Réaliser une figure représentant cette configuration.

2. Que peut-on dire de la droite (AM) relativement au cercle $\mathscr{C}$? Justifier votre affirmation.

Exercice 1093

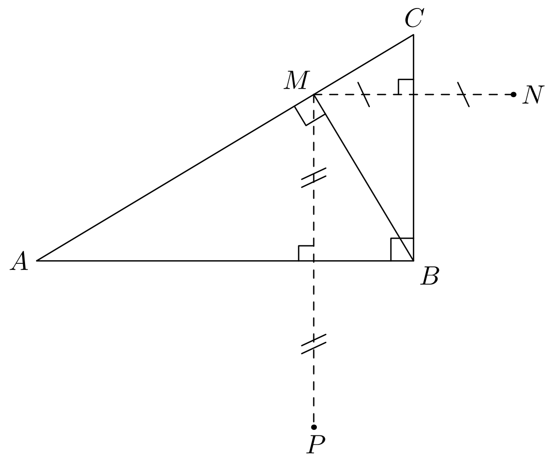
On considère la configuration suivante :

"*Soit (d) une droite et H un point de cette droite. $\mathscr{C}$ est un cercle tangent à la droite (d) ayant pour point de contact le point H.*"

Effectuer le tracé d'une telle configuration et indiquer une méthode de construction.

Exercice 2936

Dans le plan, on considère le triangle ABC rectangle en B et M un point du segment $[AC]$ tel que $\widehat{AMB}$ soit un angle droit ; les point N et P sont les symétriques du point M, respectivement par rapport aux droites (BC) et (AB) :

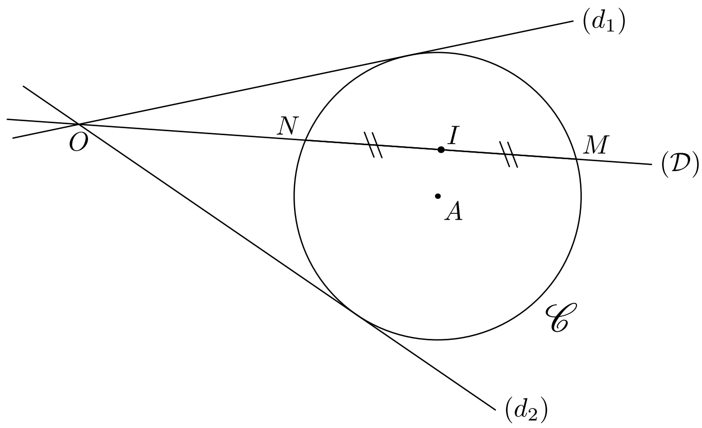


1. a. Justifier les égalités suivantes de longueurs :
$BM = BN = BP$
   b. Montrer que : $\widehat{PBN} = 180^o$.
   c. Justifier que le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[NP]$ admet la droite (AC) comme tangente au point M.

2. a. Démontrer que les points B, C, M, N sont cocycliques d'un cercle qu'on nommera $\mathscr{C}'$.
   b. Donner la position de la droite (AB) relativement au cercle $\mathscr{C}'$.

Exercice 1840

On considère un cercle $\mathscr{C}$, un point O et les deux droites (d_1) et (d_2) tangentes au cercle passant par le point O.



On considère une droite $(\mathcal{D})$ passant par O et comprise entre les droites (d_1) et (d_2) : on est libre de placer la droite $(\mathcal{D})$ a n'importe quel endroit mais assujetti à ces deux contraintes.

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble décrit par I lorsque la droite $(\mathcal{D})$ décrit l'ensemble des droites passant par O et comprise entre (d_1) et (d_2) :

1. a. Où se trouve le point I lorsque la droite $(\mathcal{D})$ est tel que les points M et N soient diamétralement opposés.
   b. Tracer la droite $(\mathcal{D})$ à trois endroits différents ainsi que le point I associé.

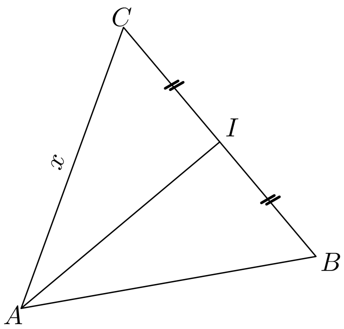
2. a. Faîtes une conjecture quant à l'ensemble de points décrit par le point I.

(b.) Etablir cette conjecture.

2. Rappels sur la trigonometrie :

Exercice 530

Soit ABC un triangle équilatéral dont la mesure des côtés vaut x.
On note I le milieu du segment $[BC]$.



1. Que représente la droite (AI) dans le triangle ABC?
2. Compléter le tableau ci-dessous :

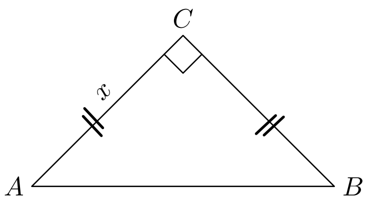
	$\widehat{CIA}$	$\widehat{CAB}$	$\widehat{CAI}$	$\widehat{ICA}$
Mesure en degré				

3. (a.) Donner la mesure du segment $[CI]$ en fonction de x.
   (b.) A l'aide du théorème de Pythagore, déterminer la mesure du segment $[AI]$ en fonction de x.
   (c.) Dans le triangle AIC, déterminer le sinus, le cosinus et la tangente des angles $\widehat{IAC}$ et $\widehat{ICA}$. Puis, compléter le tableau suivant :

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
60^o			
30^o			

Exercice 531

On considère le triangle rectangle-isocèle en C ci-contre. On note x la mesure du côté AC.



1. Compléter le tableau :

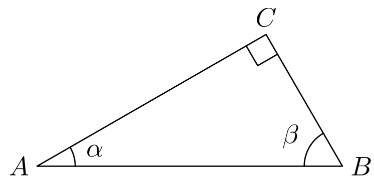
	$\widehat{ACB}$	$\widehat{CAB}$
Mesure en degré		

2. (a.) A l'aide du théorème de Pythagore, exprimer la mesure du côté $[AB]$ en fonction de x.
   (b.) Dans le triangle rectangle ABC, déterminer le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle $\widehat{CAB}$.
   (c.) Compléter le tableau :

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
45^o			

Exercice réservé 537

On considère un triangle ABC rectangle en C. On note :
$\alpha=\widehat{CAB}$; $\beta=\widehat{ABC}$

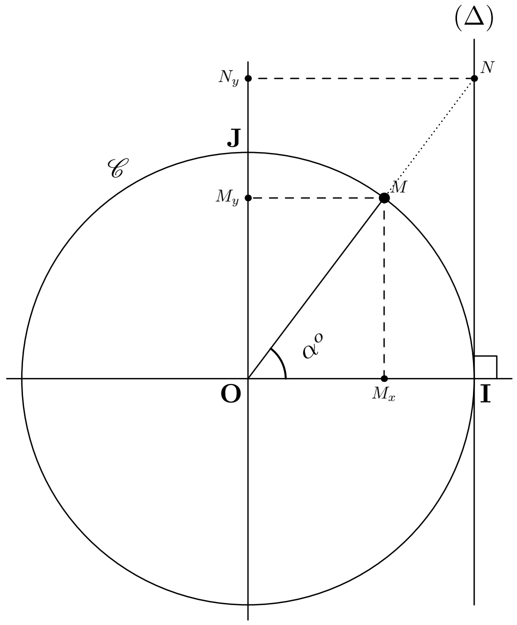


1. En fonction des mesures des côtés du triangle ABC :
   (a.) Exprimer les valeurs de $\cos\alpha$ et $\sin\beta$.
   (b.) Comparer les valeurs de $\tan\alpha$ et $\tan\beta$
2. Justifier que pour $\alpha\in[0;90]$, on a :
   - $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$
   - $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha}$
3. En exprimant $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ en fonction des mesures des côtés du triangle ABC et en utilisant le théorème de Pythagore, mettre en évidence la formule suivante :
   $$\left(\cos\alpha\right)^2+\left(\sin\alpha\right)^2=1$$

3. Introduction au cercle trigonométrique :

Exercice réservé 533

On considère le plan muni du repère orthonormé $(O;I;J)$.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et **de rayon 1** : ce cercle s'appelle le *cercle trigonométrique*.



On considère la tangente (Δ) au cercle $\mathscr{C}$ passant par le point I et perpendiculaire à l'axe des abscisses.

On place un point M sur le cercle $\mathscr{C}$, on note :

- On repère ce point par l'angle $\alpha = \widehat{IOM}$
- M_x le projeté orthogonal de M sur l'axe (OI) ;
- M_y le projeté orthogonal de M sur l'axe (OJ) ;

On repère ainsi le point M par l'angle qu'il définit : on note $M(\alpha)$, ou par ses coordonnées cartésiennes $M(M_x\,;M_y)$.

Le point N, s'il existe, est l'intersection de la droite (Δ) avec la droite (OM). On note :

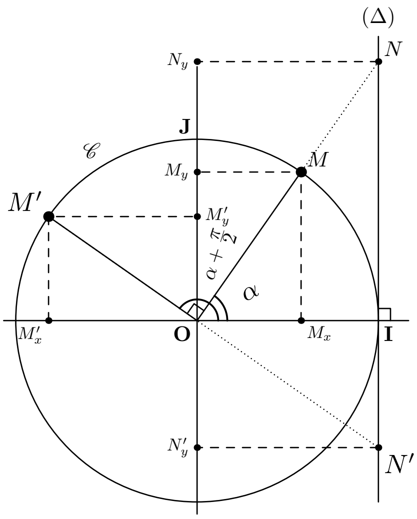
- N_y le projeté orthogonal de N sur (OJ) ;

1. On se place dans le triangle OMM_x :
   a. Quel est la nature du triangle OMM_x. Justifier.
   b. Etablir les égalités suivantes :
   $\cos\alpha = OM_x \quad ; \quad \sin\alpha = MM_x$
2. Dans le triangle ONI rectangle en I, établir l'égalité suivante :
   $\tan\alpha = NI$
3. Relativement à l'angle α, dire ce que représente les longueurs OM_x, OM_y et ON_y.
4. Aux vues du travail effectué précédemment, justifier l'égalité :
   $\big(\cos\alpha\big)^2 + \big(\sin\alpha\big)^2 = 1$

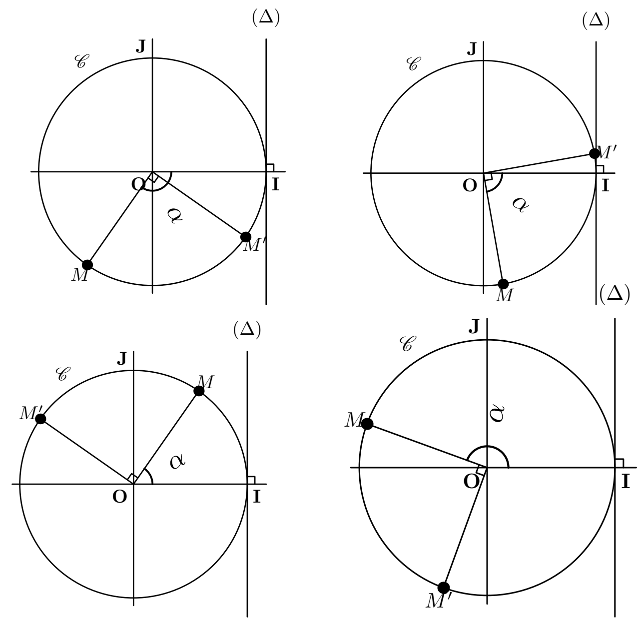
4. Relation entre cosinus et sinus :

Exercice réservé 528

Dans le plan munit d'un repère orthonormé et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère deux points $M(\alpha)$ et $M'\Big(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\Big)$ du cercle trigonométrique.



1. A l'aide des coordonnées des points figurant sur la figure, donner les valeurs du cosinus, sinus et tangente pour les angles α et $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$.
2. a. Par quel transformation, le triangle OMM_x a pour image le triangle $OM'M'_y$?
   b. En déduire les valeurs de $\cos\Big(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\Big)$ et $\sin\Big(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\Big)$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.
3. Nous allons déterminer le signe des différentes valeurs des fonctions trigonométriques pour les angles α et $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$. Ceci afin de s'assurer de la validité des formules trouvées à la question 2. quel que soit la valeur de l'angle α :



	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
$\alpha\in\Big]0\,;\dfrac{\pi}{2}\Big[$			
$\alpha\in\Big]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\Big[$			
$\alpha\in\Big]-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\Big[$			
$\alpha\in\Big]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\Big[$			

	$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$	$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$	$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$
$\alpha\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$			
$\alpha\in\left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$			
$\alpha\in\left]-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right[$			
$\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$			

On en déduit que :

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\tan\alpha.$$

Question subsidiaire :
Nous allons montrer d'une autre manière que :

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-1}{\tan\alpha}:$$

4. a. Exprimer ON en fonction de α.

   b. En utilisant le fait que $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, exprimer la valeur de ON' en fonction de α

   c. En déduire l'aire du triangle ONN'.

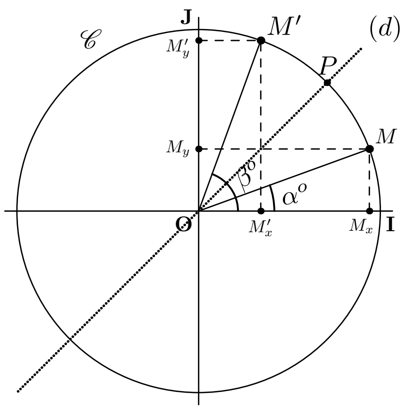
5. En utilisant le fait que (OI) est la hauteur du triangle ONN' issue de O, exprimer l'aire du triangle ONN' d'une autre façon.

6. Etablir la formule suivante :
$$IN'+\tan\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\times\frac{1}{\sin\alpha}$$

7. En déduire la relation : $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-1}{\tan\alpha}$.

Exercice réservé 529

Dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ trigonométrique : c'est à dire le cercle de centre O et de rayon 1.
On note les points M et M' respectivement repéré par les angles complémentaires α et β $\left(\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\right)$.
On note :
$M(\alpha)$ et $M'(\beta)$



On note (d) la bissectrice de l'angle $\widehat{JOI}$ et P le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec (d)

1. Dans cette question, nous allons montrer que les deux points M et M' sont symétriques relativement à la droite (d). Pour cela, notons N le symétrique du point M par rapport à la droite (d) :

   a. Justifier que le point N est un point du cercle $\mathscr{C}$.

   b. Donner la mesure de l'angle $\widehat{JON}$ en fonction de α.
   En déduire que le point N appartient à la demi-droite $[OM')$.

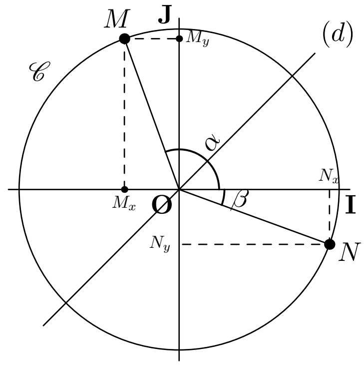
   c. Justifier que le symétrique de M relativement à la droite (d) est le point M'.

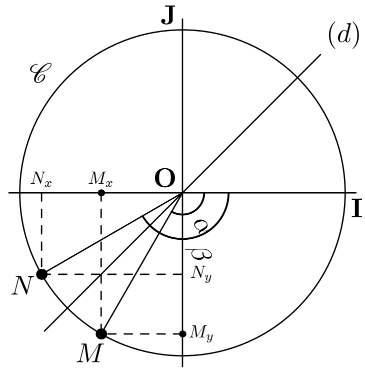
On note M_x *(resp.* M'_x*)* le projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et M_y *(resp.* M'_y*)* le projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées du point M *(resp.* M'*)*

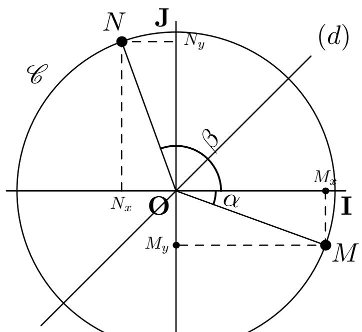
2. a. Etablir des liens entre les coordonnées des points M et M' dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

   b. En déduire les relations suivantes :
   $$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\quad;\quad\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Pour finir l'étude de comparaison du cosinus et du sinus de deux angles complémentaire, il faut aussi voir ce qui se passe si le point M se trouve sur un autre quadrant sur le cercle trigonométrique. On considère deux points M et N du cercle trigonométrique caractérisés respectivement par les angles α et β ainsi que leurs projetés orthogonaux respectifs sur les axes du repère :







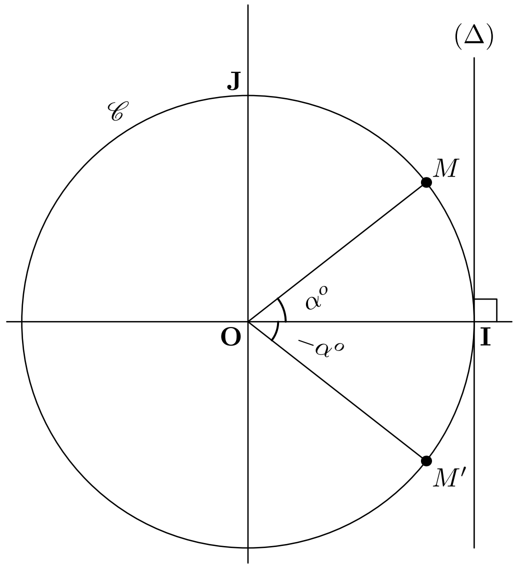
3. a. Pour chacune des trois figures ci-dessous, établir oralement la véracité de l'assertion ci-dessous :
   Les angles α et β sont complémentaire si, et seulement si, les points M et N sont symétriques relativement à la droite (d)

   b. Justifier que ceci nous suffit pour établir pour toute valeur de α, les égalités suivantes :
   $$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\quad;\quad\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

4. En déduire la relation liant $\tan\alpha$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Exercice réservé 538

On considère un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et le cercle trigonométrique de ce repère : c'est à dire le cercle de centre O et de rayon 1. La droite (Δ) est la tangente en I au cercle $\mathscr{C}$.



Soit α un nombre réel quelconque. On considère les points $M(\alpha)$ et $M'(-\alpha)$.

Un exemple de cette situation est donnée dans le graphique ci-contre.

1. Pour mettre en évidence, les différentes valeurs des fonctions trigonométriques associées aux angles α et $-\alpha$:
   a. Tracer le projeté orthogonal de M sur la droite (OI). Le nommer M_x.
   b. Tracer le projeté orthogonal de M sur la droite (OJ). Le nommer M_y.
   c. Nommer N le point d'intersection des droites (OM) et (Δ).
   Tracer le projeté orthogonal de N sur la droite (OJ). Le nommer N_y.
   d. Faîtes de même pour le point M'
2. a. Comparer les abscisses des points M et M'.
   b. En déduire une relation entre $\cos\alpha$ et $\cos(-\alpha)$?.
3. a. Comparer les ordonnées des points M et M'.
   b. En déduire une relation entre $\sin\alpha$ et $\sin(-\alpha)$?.
4. a. Comparer les ordonnées des points N et N'.
   b. En déduire une relation entre $\tan\alpha$ et $\tan(-\alpha)$?.

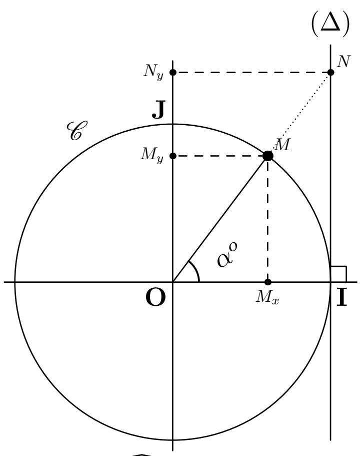
255. Exercices non-classés :

Exercice 2183

On considère le plan muni du repère orthonormé $(O;I;J)$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et **de rayon 1** : ce cercle s'appelle le *cercle trigonométrique*.

On considère la tangente (Δ) au cercle $\mathscr{C}$ passant par le point I et perpendiculaire à l'axe des abscisses.

On place un point M sur le cercle $\mathscr{C}$, on note :



- On repère ce point par l'angle $\alpha = \widehat{IOM}$
- M_x le projeté orthogonal de M sur l'axe (OI) ;
- M_y le projeté orthogonal de M sur l'axe (OJ) ;

On repère ainsi le point M par l'angle qu'il définit : on note $M(\alpha)$, ou par ses coordonnées cartésiennes $M(M_x\,;M_y)$.

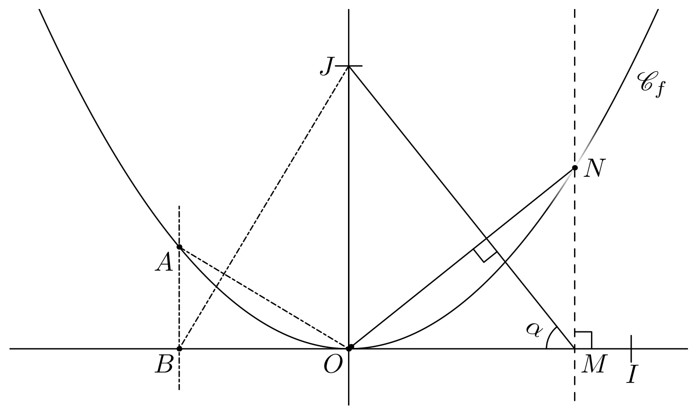
Le point N, s'il existe, est l'intersection de la droite (Δ) avec la droite (OM). On note :

- N_y le projeté orthogonal de N sur (OJ) ;

1. On se place dans le triangle OMM_x :
   a. Quel est la nature du triangle OMM_x. Justifier.
   b. Etablir les égalités suivantes :
   $\cos\alpha = OM_x \quad ; \quad \sin\alpha = MM_x$
2. Dans le triangle ONI rectangle en I, établir l'égalité suivante : $\tan\alpha = NI$
3. Relativement à l'angle α, dire ce que représente l'abscisse du point M, l'ordonnée du point M et l'ordonnée du point N.
4. Etablir l'identité : $\big(\cos\alpha\big)^2 + \big(\sin\alpha\big)^2 = 1$

Exercice réservé 2958

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction carré.



1. Soit M un point de l'axe des abscisses ayant pour abscisse x ; N est le point d'abscisse x appartenant à la perpendiculaire à la droite (JM) passant par le point O. Le but de cette question est de montrer que le point N appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$:
   a. Exprimer MQ en fonction de α et x.
   b. Justifier que l'angle $\widehat{JOQ}$ a pour mesure α.
   c. Exprimer QJ en fonction de α.
   d. Justifier l'égalité : $\tan\alpha = \dfrac{1}{x}$
   e. Montrer que : $MN = x^2$.
   f. Justifier que le point N appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$
2. Soit A un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x ; on note B

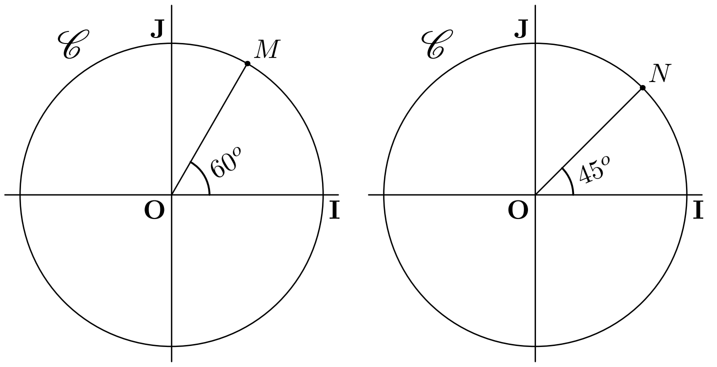
le projeté orthogonal du point A sur l'axe des abscisses.

a. Justifier que : $\widehat{OJB} = \widehat{AOB}$

b. En déduire que $\widehat{BCO}$ est un angle droit.

Exercice 3110

On considère les deux cercles trigonométriques ci-dessous :



1. Donner, dans le repère $(O\,;I\,;J)$, les coordonnées des points M et N.

2. Dans l'intervalle $]-180^o\,;180^o]$, résoudre leséquations suivantes :

   a. $\cos x = \dfrac{1}{2}$ b. $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c. $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

3. Dans l'intervalle $]-180^o\,;180^o]$, résoudre les équations suivantes :

   a. $\sin x = \dfrac{1}{2}$ b. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

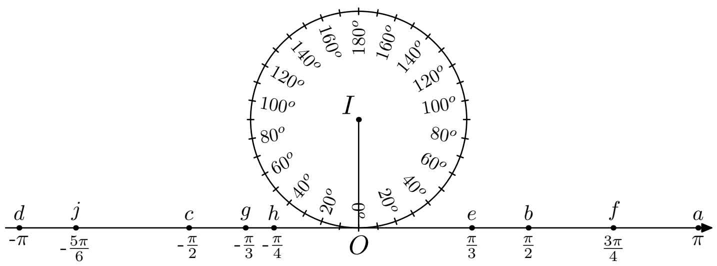
4. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de chacune des équations précédentes, si on cherche la mesure des angles dans l'ensemble $\mathbb{R}$?

Exercice 4920

On considère une droite graduée d'origine O sur laquelle est placé des points définis par leur abscisse :

$a\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big)$; $b(\pi)$; $c\Big(-\dfrac{\pi}{2}\Big)$; $d(-\pi)$; $e\Big(\dfrac{\pi}{3}\Big)$

$f\Big(\dfrac{3\pi}{4}\Big)$; $g\Big(-\dfrac{\pi}{3}\Big)$; $h\Big(-\dfrac{\pi}{4}\Big)$; $j\Big(-\dfrac{5\pi}{6}\Big)$



On considère le cercle $\mathscr{C}$ de rayon 1 placé sur la droite graduée comme l'indique la figure précédente.

1. a. Soit M un point de $\mathscr{C}$ tel que l'arc $\widehat{OM}$ mesure π.
   Donner la mesure de l'angle $\widehat{OIM}$

   b. Placer l'unique point A du cercle $\mathscr{C}$ tel que l'arc $\widehat{OA}$ ait pour longueur π.

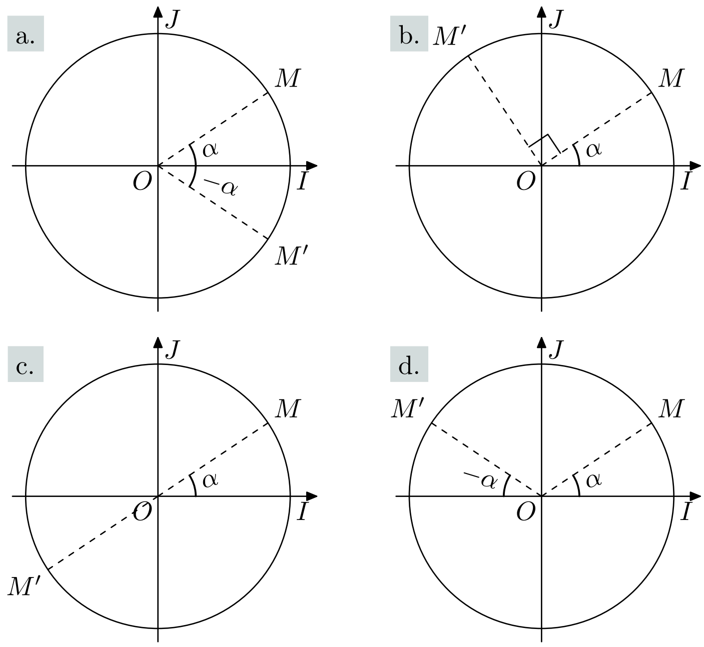
2. a. Soit M un point de $\mathscr{C}$ tel que l'arc $\widehat{OM}$ mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
   Donner la mesure de l'angle $\widehat{OIM}$

   b. Placer les deux points B et C appartenant au cercle $\mathscr{C}$ tel que les arcs $\widehat{OB}$ et $\widehat{OC}$ aient pour longueur $\dfrac{\pi}{2}$.

3. De même, placer les points E, F, G, H, J tels que les arcs $\widehat{OE}$, $\widehat{OF}$, $\widehat{OG}$, $\widehat{OH}$, $\widehat{OJ}$ aient respectivement la même longueur que l'abscisse des points e, f, g, h, j.

Exercice 6574

1. Dans les quatre cas suivants, un point M est placé sur le cercle trigonométrique repéré par un angle α. On rappelle qu'on note alors :
   $\widehat{IOM} = \alpha$ ou $M(\alpha)$.
   A partir de ce point M est placé un nouveau point M' :

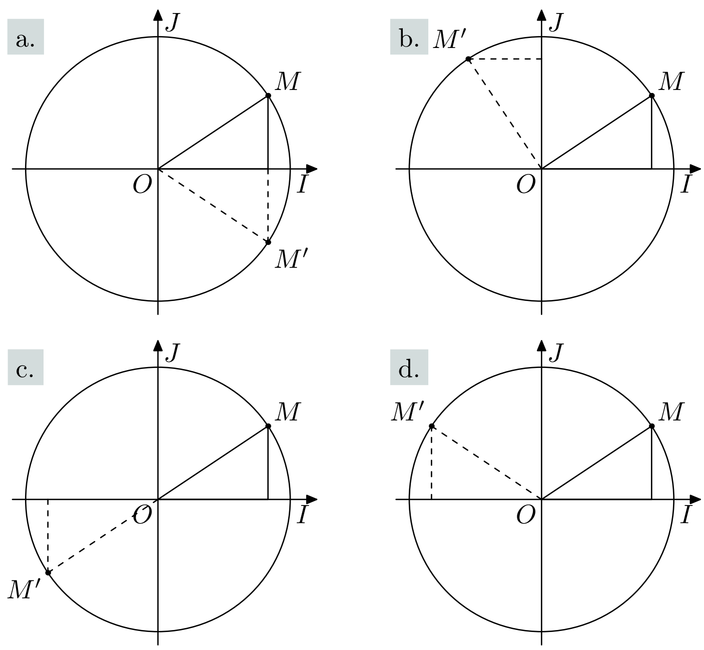


   Exprimer l'angle repérant le point M' en fonction de α.

2. Nous utiliserons la définition et les propriétés suivantes :

Définition :
Deux triangles sont **isométriques** si leurs côtés sont deux à deux de même mesure.

Proposition :
Si deux triangles ont un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement égaux alors ces deux triangles sont isométriques



   Justifier, dans chaque cas, que le triangle présenté en trait plein et le triangle présenté en pointillés sont isométriques.

3. Ouvrir le fichier "*angleAssocie.ggb*".
Modifier la position du point M et observer la relation entre les coordonnées du point M et M' dans chacun des cas.

4. Indiquer sur la figure les coordonnées du point M' en fonction des coordonnées $(x\,;y)$ du point M :