

# Seconde/Fonctions de référence

## 1. Courbes représentatives :

### Exercice réservé 431

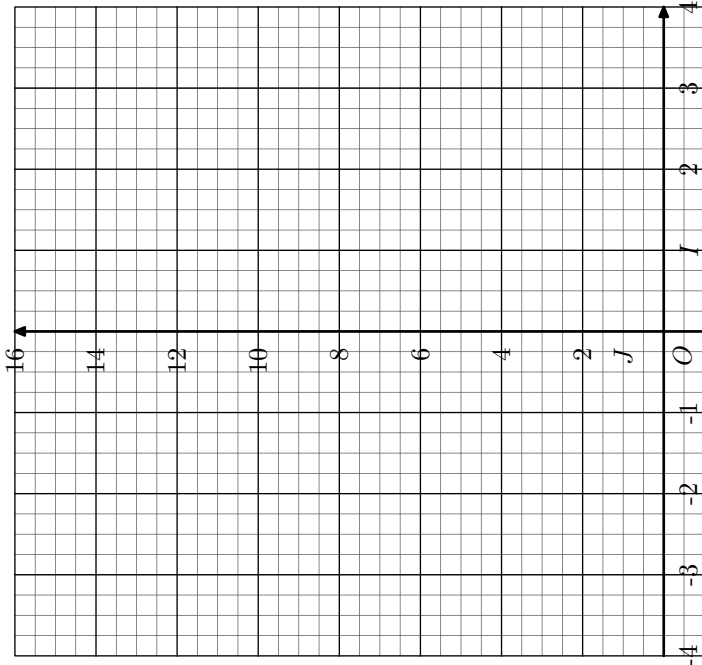
Nous allons étudier la fonction carré  $f$  définie par :

$$f : x \mapsto x^2$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction carré.
2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

$x$	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
$f(x)$											

3. On considère le repère orthogonal  $(O; I; J)$  ci-dessous. Tracer la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  dans ce repère :



4. Dresser un tableau de variations de la fonction  $f$  sur son ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$ .
5. Algébriquement, prouver la décroissance de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty; 0]$
6. La courbe représentative de la fonction  $f$  possède-t-elle un axe de symétrie ou un centre de symétrie?

### Exercice réservé 418

Nous allons étudier la fonction inverse  $g$  définie par :

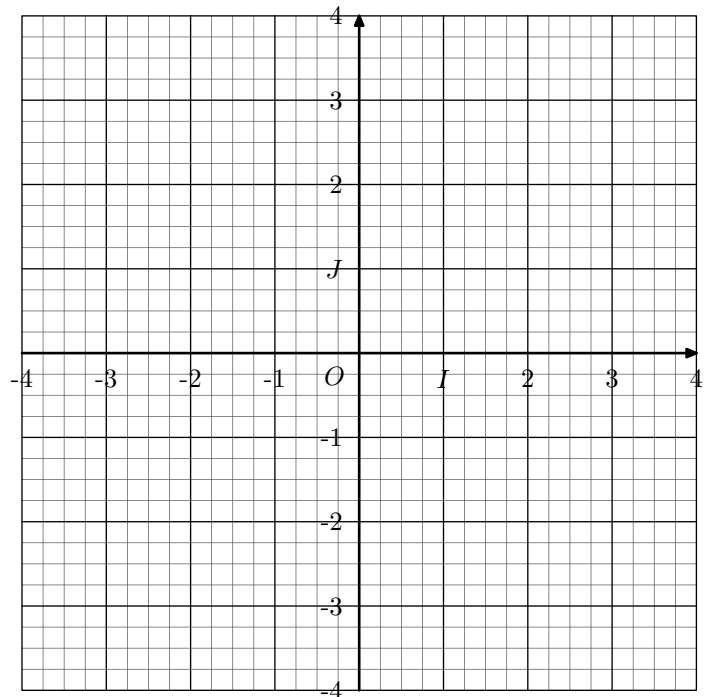
$$g : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction inverse.
2. Compléter le tableau ci-dessous avec les valeurs décimales arrondies au centième près :

$x$	-4	-3	-2	-1	-0,5	-0,25
$g(x)$						

$x$	0,25	0,5	1	2	3	4
$g(x)$						

3. Tracer la courbe représentative  $\mathcal{C}_g$  dans le repère ci-dessous :



4. Dresser un tableau de variations de la fonction  $g$  sur son ensemble de définition  $\mathcal{D}_g$ .
5. Algébriquement, prouver la décroissance de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$
6. La courbe représentative de la fonction  $g$  possède-t-elle un axe de symétrie ou un centre de symétrie?

## 2. Sens de variation et comparaisons :

### Exercice 4853

Soit  $f$  la fonction carré :

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

$x$	-10	$-\sqrt{5}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1+\sqrt{2}$
$f(x)$							

2. a. Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres négatifs et de leurs carrés?  
 b. Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres positifs et de leurs carrés?

#### Exercice 4854

1. Soit  $f$  la fonction qui, à tout nombre non-nul, renvoie son inverse.  
 Compléter le tableau avec les valeurs décimales des images arrondies au centième près :

$x$	-10	-3	-2	-0,5	0,2	0,75	2
$f(x)$							

2. a. Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres négatifs et de leurs inverses?  
 b. Que peut-on dire de la comparaison de deux nombres positifs et de leurs inverses?

#### Exercice 325

Cet exercice doit être traité sans l'aide de la calculatrice :

1. On considère les deux nombres suivants :  
 $A = 2\sqrt{3}$  ;  $B = 3\sqrt{2}$
- a. Déterminer les valeurs exactes de  $A^2$  et  $B^2$ .  
 b. Comparer les deux nombres  $A$  et  $B$ .

2. Comparer chaque couple de nombres ci-dessous :
- a. 6 et  $3\sqrt{6}$       b.  $\frac{1}{2\sqrt{3}}$  et  $\frac{1}{3\sqrt{2}}$   
 c.  $\frac{3}{\sqrt{2}}$  et  $\sqrt{3}$       d.  $2\sqrt{3}$  et  $2-\sqrt{8}$

### 3. Equations, inequations et sens de variation :

#### Exercice 4815

Résoudre les équations suivantes :

- a.  $(x+1)^2 = 4$       b.  $(x-2)^2 + 4 = 7$   
 c.  $(x+2)^2 + 5 = 2$       d.  $3 \cdot x^2 - 6 = 1$

#### Exercice 4816

Résoudre les inéquations suivantes :

- a.  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{5}$       b.  $\frac{1}{x} > \frac{3}{4}$       c.  $\frac{1}{x} < -\frac{1}{3}$       d.  $\frac{1}{x} < 2$

#### Exercice 4877

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par la relation :

$$f(x) = \frac{-4 \cdot x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

#### Exercice 342

Sans l'usage de la calculatrice, comparer les couples de nombres ci-dessous :

- a.  $\sqrt{45}$  et 7      b. -3 et  $-\sqrt{57}$       c.  $2\sqrt{3}$  et  $3\sqrt{2}$   
 d.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$  et  $\frac{\sqrt{5}}{10}$       e.  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{\pi}$       f.  $-\frac{1}{3}$  et  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

#### Exercice réservé 345

Sans l'aide de la calculatrice, comparer les couples de nombres suivants en justifiant votre démarche :

- a.  $7\sqrt{2}$  ; 9      b.  $-\frac{1}{\pi}$  ;  $-\frac{1}{4}$   
 c.  $\frac{1}{\sqrt{8}}$  ;  $\frac{1}{3}$       d.  $2\sqrt{7}$  ;  $5+\sqrt{3}$

#### Exercice réservé 328

Au cours de cet exercice, l'usage de la calculatrice est interdit :

1. a. Comparer les deux nombres 9 et  $5\sqrt{3}$ .  
 b. Laquel de ces deux écritures définit un nombre :  
 $\sqrt{5\sqrt{3}-9}$  ;  $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$
2. Parmi les écritures ci-dessous, lesquelles définissent un nombre?

- a.  $\sqrt{\sqrt{80}-9}$       b.  $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$       c.  $\sqrt{5-3\sqrt{3}}$

#### Exercice 4866

Comparer les couples de nombres suivants :

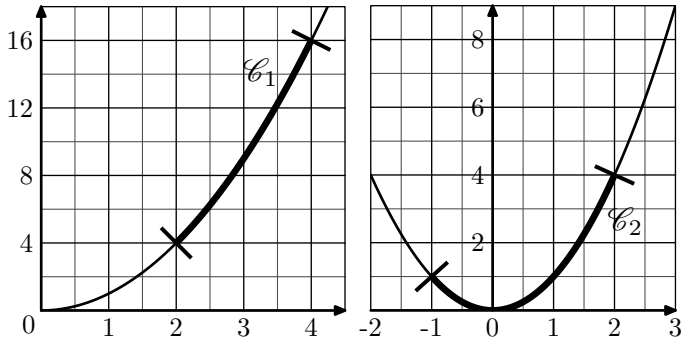
- a.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  ;  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$       b.  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$  ;  $\frac{5\sqrt{3}}{6}$   
 c.  $\frac{5}{2}$  ;  $\frac{4\sqrt{10}}{5}$       d.  $\frac{5\sqrt{8}}{4}$  ;  $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

1. Démontrer l'égalité suivante :  $f(x) = \frac{2}{x^2+1} - 4$
2. a. Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]-\infty; 0[$ .  
 b. Etablir le sens de variation sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  de la fonction  $f$ .  
 c. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  (on indiquera les valeurs des extrêmes locaux).
3. Déduire de la question précédente, la valeur maximale de la fonction  $f$ .
4. a. Déterminer algébriquement, les antécédents du nombre -3 par la fonction  $f$ .  
 b. Résoudre l'équation suivante :  $f(x) = -x - 2$

## 4. Images d'intervalles :

### Exercice 4817

Les deux graphiques ci-dessous présente deux parties  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  de la courbe représentative de la fonction carré :



1.
  - a. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les abscisses des points de la courbe  $\mathcal{C}_1$ .
  - b. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les ordonnées des points de la courbe  $\mathcal{C}_1$ .
  - c. En déduire l'image de l'intervalle  $[2; 4]$ .
2.
  - a. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les abscisses des points de la courbe  $\mathcal{C}_2$ .
  - b. Déterminer l'ensemble de nombres formé par tous les ordonnées des points de la courbe  $\mathcal{C}_2$ .
  - c. En déduire l'image de l'intervalle  $[-1; 2]$ .

### Exercice réservé 2831

1. Donner, sans justification, l'image des intervalles suivants par la fonction carré :

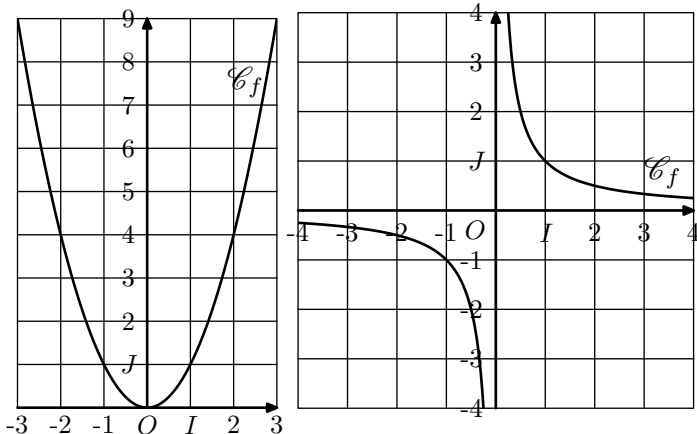
a.  $[\sqrt{3}; 5]$     b.  $]-\frac{1}{2}; -\frac{3}{7}[$     c.  $[-\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{7}{3}[$

2. Donner, sans justification, l'image des intervalles suivants par la fonction inverse :

a.  $[2; \frac{5}{2}]$     b.  $]0,0001; 1,5]$

### Exercice 2081

Dans des repère  $(O; I; J)$  orthormaux, sont données ci-dessous les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  représentatives respectivement de la fonction carrée et de la fonction inverse :



Compléter, sans justification, les assertions suivantes :

1. Si  $x \in [1; 3[$  alors  $x^2 \in \dots$
2. Si  $x \in ]-1; 2]$  alors  $x^2 \in \dots$
3. Si  $x \in ]2; 4]$  alors  $\frac{1}{x} \in \dots$
4. Si  $x \in ]0; 2]$  alors  $\frac{1}{x} \in \dots$
5. Si  $x \in ]-\infty; -\frac{1}{2}]$  alors  $\frac{1}{x} \in \dots$

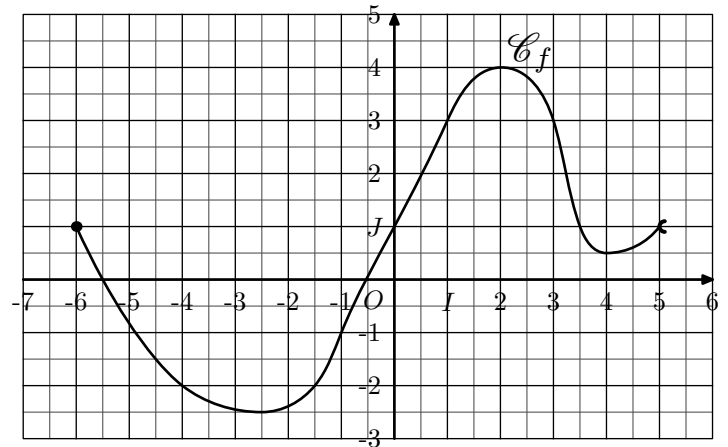
### Exercice 2729

On désigne par  $f$  la fonction carré. Dire si les assertions suivantes sont "vraies" ou "fausses". Dans le cas où une assertion est fausse, on citera un contre-exemple :

1. Si  $x > 1$  alors  $x^2 > 1$ .
2. Si  $x^2 > 1$  alors  $x > 1$ .
3. L'image de l'intervalle  $[-3; 4]$  par la fonction  $f$  est  $[9; 16]$ .
4. L'image de l'intervalle  $[-5; 1]$  par la fonction  $f$  est  $[0; 25]$ .
5.  $-4 < 1 \implies f(-4) < f(1)$ .
6. La fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 391

La courbe ci-dessous est la courbe représentative de la fonction  $f$ .



1. Donner l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
2. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
3. Donner, sans justification, les images par la fonction  $f$  des intervalles suivants :
 

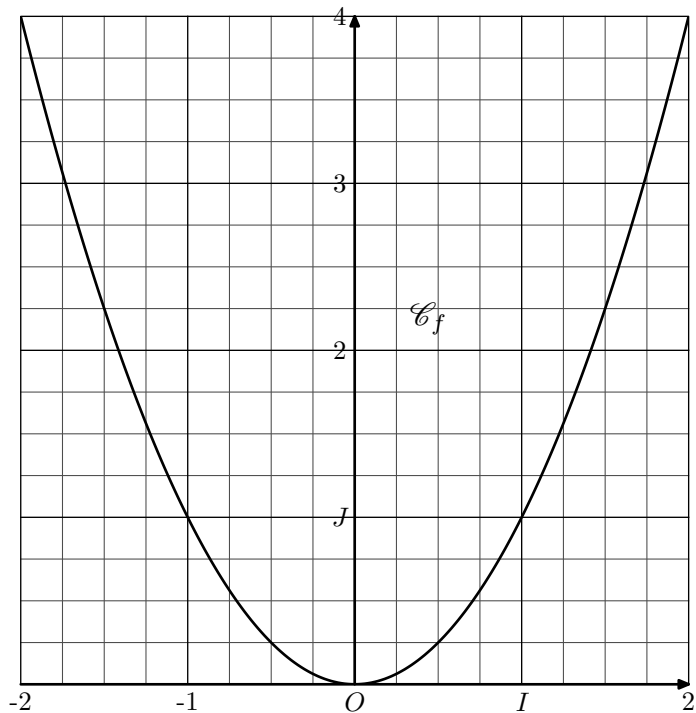
a.  $[-2, 5; 0]$     b.  $]1; 3]$     c.  $] -6; 5[$
4. Pour chaque question, donner sans justification l'ensemble des valeurs de  $x$  vérifiant l'encadrement suivant :
 

a.  $3 \leq f(x) \leq 4$     b.  $-3 \leq f(x) < 1$

## 5. Equations, inequations et courbes représentatives :

### Exercice réservé 416

On considère la fonction carré notée  $f$  dont la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  dans un repère  $(O; I; J)$  est donnée ci-dessous :



On répondra graphiquement et sans justification aux questions suivantes :

1. Donner un encadrement de l'image de  $x$  par la fonction  $f$  dans chacun des cas suivant :

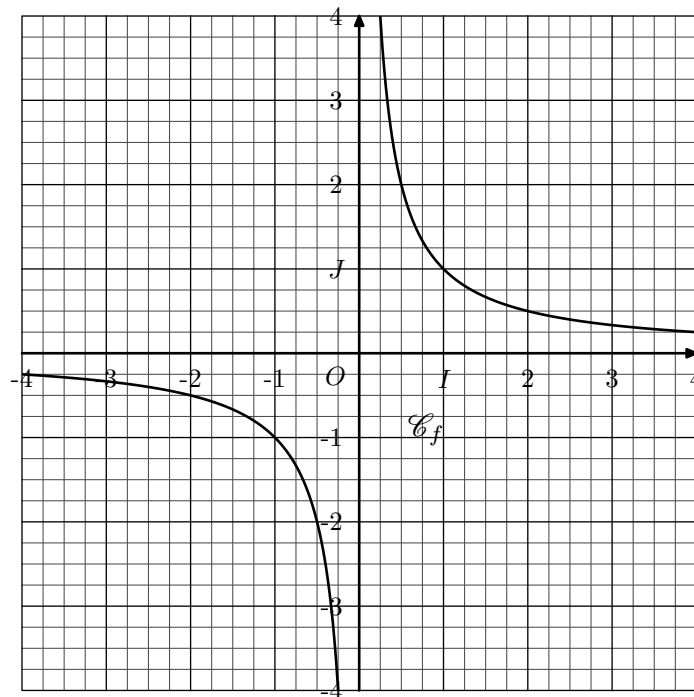
- a.  $x > 1$       b.  $x \leq -3$       c.  $-1 \leq x < 3$

2. Déterminer l'ensemble des solutions des équations et inéquations suivantes :

- a.  $x^2 = 2$       b.  $x^2 = 0$       c.  $x^2 = -1$   
 d.  $x^2 \geq 1$       e.  $x^2 < 3$       f.  $2 \leq x^2 \leq 4$

### Exercice 2818

On considère la fonction inverse notée  $f$  dont la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  dans un repère  $(O; I; J)$  est donnée ci-dessous :



On répondra graphiquement et sans justification aux questions suivantes :

1. Donner un encadrement de l'image de  $x$  par la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

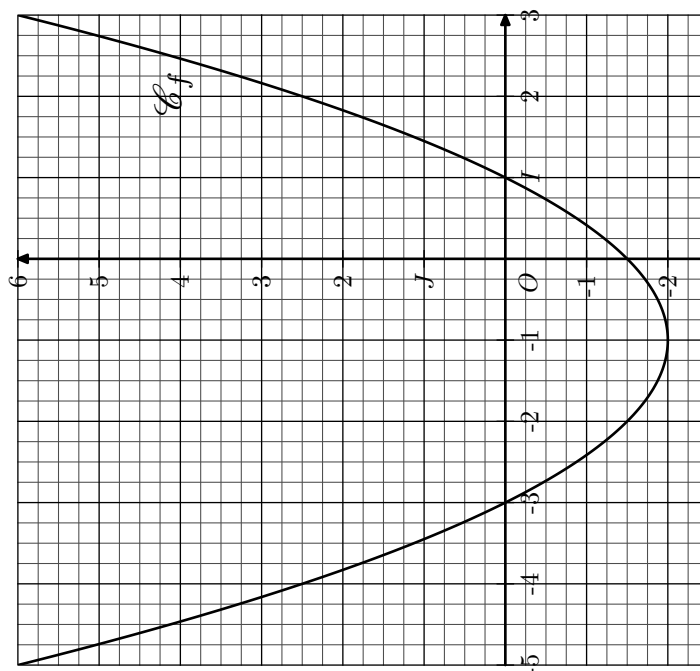
- a.  $x > 3$       b.  $x < -1$       c.  $0 < x < \frac{1}{2}$

2. Déterminer l'ensemble des solutions des équations et inéquations suivantes :

- a.  $\frac{1}{x} = 2$       b.  $\frac{1}{x} = 0$       c.  $\frac{1}{x} = -4$   
 d.  $\frac{1}{x} \geq 1$       e.  $\frac{1}{x} < -3$       f.  $\frac{1}{x} \leq 1$

### Exercice 2846

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-5; 3]$  dont la représentation est donnée ci-dessous :



Les questions suivantes doivent être traitées graphiquement et sans justification.

- Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- Dresser le tableau de signe de la fonction  $f$ .
- Résoudre l'inéquation:  $f(x) > \frac{5}{2}$
- Déterminer les images des intervalles suivants:
  - $[1; 3[$
  - $[-4; -2[$
  - $[-\frac{15}{4}; 1[$

### Exercice réservé 4865

- Comparer les couples de nombres suivants:

## 6. Encadrements et sens de variation :

### Exercice 350

Soit  $x$  un nombre réel ayant pour encadrement  $-1 < x \leq 3$ . Pour chaque question, déterminer un encadrement de l'expression littérale proposée:

- |                  |                      |                          |
|------------------|----------------------|--------------------------|
| a. $3x + 1$      | b. $-2x - 5$         | c. $\frac{1}{x+2}$       |
| d. $(x+1)^2 + 1$ | e. $\frac{1}{x^2+1}$ | f. $\frac{2}{(x-1)^2+1}$ |

### Exercice 338

Soit  $x$  un nombre réel tel que  $0 < x \leq 2$ . Donner les encadrements des nombres suivants:

- |            |             |              |                       |
|------------|-------------|--------------|-----------------------|
| a. $x + 2$ | b. $1 - 2x$ | c. $(x-2)^2$ | d. $-2 \cdot x^2 - 1$ |
|------------|-------------|--------------|-----------------------|

### Exercice 1904

Soit  $x$  un nombre réel:

- Supposons que  $1 < x \leq 3$ . Donner un encadrement de chacun des nombres suivants:
  - $x^2$
  - $1 - \frac{1}{x}$
  - $3 - 2x$

## 7. Sens de variations et fonctions composées :

### Exercice réservé 1941

- Soit  $a$  et  $b$  deux nombres appartenant à l'intervalle  $[-2; 0]$  tels que  $a < b$ .

Etablir la comparaison suivante:  $\frac{3}{a^2+1} < \frac{3}{b^2+1}$

- En déduire le sens de variation, sur l'intervalle  $[-2; 0]$ , de la fonction  $f$  définie par:  $f: x \mapsto \frac{3}{x^2+1}$

### Exercice réservé 2825

- Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ . On considère la fonction:  $g: x \mapsto -2 \cdot f(x) + 5$

- |  |  |
|--|--|
| a. $3\sqrt{3}$ ; 5                               | b. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ ; $\frac{1}{5}$ |
| c. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ; $\frac{3\sqrt{4}}{4}$ | d. $2 + \sqrt{5}$ ; 3                    |

- Donner, sans justification, les images des intervalles suivants par la fonction carré:
  - $]2; 3]$
  - $] -5; -1]$
  - $] -2; 4]$
- Donner, sans justification, les images des intervalles suivants par la fonction inverse:
  - $] -4; -1[$
  - $] 0; 5[$

- Supposons que  $-4 < x < 1$  et considérons  $y$  un nombre réel vérifiant l'encadrement  $2 < y < 4$ .
  - Donner un encadrement des expressions suivantes:  $x + y$  ;  $(x+4) \cdot y$
  - Justifier, par un contre-exemple, que l'encadrement ci-dessous est faux:  $-8 < x \cdot y < 4$

### Exercice réservé 412

A partir de l'encadrement  $2 \leq x \leq 4$ , en déduire les encadrements des expressions algébriques suivantes:

- |               |                      |                       |
|---------------|----------------------|-----------------------|
| a. $3x + 2$   | b. $x^2 + 1$         | c. $\frac{1}{x+2}$    |
| d. $(2x-6)^2$ | e. $(\frac{1}{x})^2$ | f. $\frac{x^2}{2x+1}$ |

### Exercice réservé 2832

Soit  $x$  un nombre vérifiant l'encadrement:  $3 < x \leq 5$

Déterminer un encadrement de chacune de ces expressions:

- |  |                        |
|--|------------------------|
| a. $2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot x - 3)^2 - 2$ | b. $\frac{1}{(2-x)^2}$ |
|--|------------------------|

- Si  $f$  est croissante, justifier que la fonction  $g$  est décroissante.
  - Si  $f$  est décroissante, justifier que la fonction  $g$  est croissante.
- On considère la fonction  $h$  définie par la relation:  $h(x) = -2x^2 + 5$   
Déduire, de la question précédente, que la fonction  $h$  est croissante sur  $\mathbb{R}_-$ .
  - Justifier chacune des assertions suivantes:
    - $j: x \mapsto 5 - \frac{2}{x}$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
    - $k: x \mapsto 2 \cdot (x+2)^2 - 5$  est croissante sur  $[-2; +\infty[$ .

**Exercice 2849**

On considère une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  dont voici le tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$
Variation de $f$	$+\infty$	$5$	$2$	$+\infty$

On considère la fonction  $g$  dont l'image d'un nombre  $x$  est définie par la relation :

$$g(x) = \frac{2}{f(x) - 1} + 3$$

1. Déterminer l'image des nombres  $-1$  et  $3$  par la fonction  $g$ .
2. Déterminer le sens de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]-\infty ; 3]$ .