Seconde/Fonctions homographiques

1. Fonctions homographiques :

Exercice 419

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{x+1}{x-2}$$

1. a. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
   b. Déterminer l'image de 3 par la fonction f.
   c. Déterminer les antécédents, pour la fonction f, des nombres -1 et 0.
   d. Justifier que 1 n'admet pas d'antécédent par la fonction f.
2. Etablir pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{2\}$, l'égalité suivante :
$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1$$

Exercice réservé 407

On considère la fonction f définie par : $f : x \longmapsto \dfrac{3x+1}{x-3}$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{3\}$, on a :
$$\frac{3x+1}{x-3} = 3 + \frac{10}{x-3}$$
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;3[$.

Exercice réservé 429

On considère la fonction f définie par :

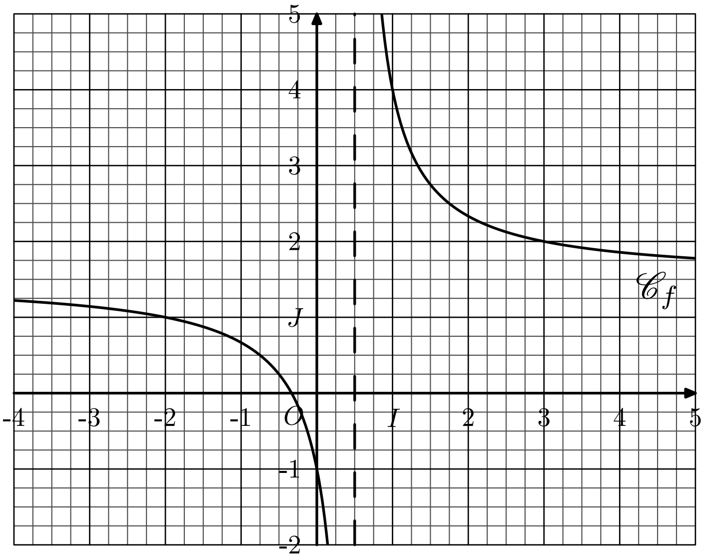
$$f : x \longmapsto \frac{2x-1}{x+1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f
2. Montrer l'égalité suivante : $\dfrac{2x-1}{x+1} = 2 + \dfrac{-3}{x+1}$
3. Montrer la croissance de la fonction f sur $]-\infty\,;-1[$ et ainsi que sur $]-1\,;+\infty[$
4. Montrer algébriquement que 2 n'admet pas d'antécédent par la fonction x.

Exercice 424

On considère la fonction : $f : x \longmapsto \dfrac{3x+1}{2x-1}$

1. a. Etablir l'égalité suivante :
$$\frac{3x+1}{2x-1} = \frac{5}{4x-2} + \frac{3}{2}$$
   b. Etablir la décroissance de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$.
2. On représente, dans le repère orthonormé ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f :



   a. Graphiquement, déterminer une valeur approchée de l'antécédent du nombre 3 par la fonction f.
   b. Algébriquement, rechercher l'antécédent du nombre 3 par la fonction f.
   c. Graphiquement, déterminer les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 3$

Exercice 427

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f : x \longmapsto \frac{2-6x}{1-2x}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer la valeur des réels a et b vérifiant :
$$\frac{2-6x}{1-2x} = \frac{a}{1-2x} + b$$
3. En déduire que la fonction f est décroissante sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

Exercice réservé 4868

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{6 \cdot x - 7}{3 - 2 \cdot x}$

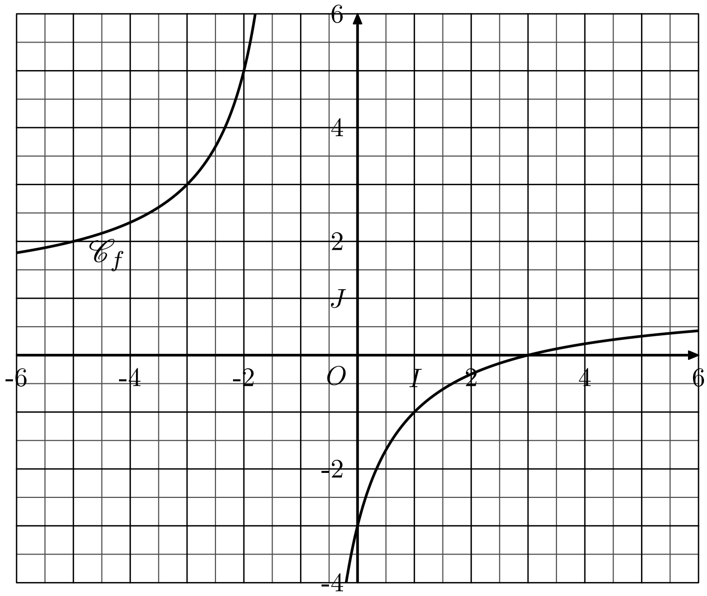
1. Etablir l'égalité suivante : $f(x) = -3 + \dfrac{2}{3 - 2 \cdot x}$
2. Etablir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$.
3. Déterminer l'ensemble des antécédents de 1 par la fonction f.
4. Résoudre l'équation : $f(x) = 2 \cdot x$

Exercice 6052

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par la relation :

$f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$

Dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ donné ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



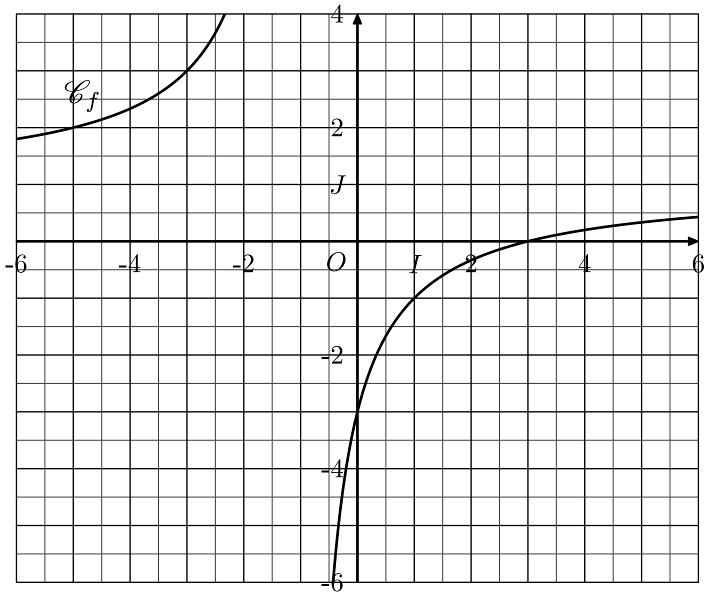
1. a. Déterminer les coordonnées des deux points A et B de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse respective -2 et 3.
   b. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
   c. Tracer, dans le repère, la droite (AB).
2. On considère la droite (Δ) ayant pour équation réduite : (Δ): $y = -2x-3$
   a. Déterminer algébriquement les solutions de l'équation :
      $f(x) \geqslant -2x-3$
   b. En déduire la positition relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ relativement à la droite (Δ).
   c. Tracer la droite (Δ) dans le repère.

Exercice 6053

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par la relation :

$f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$

Dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ donné ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



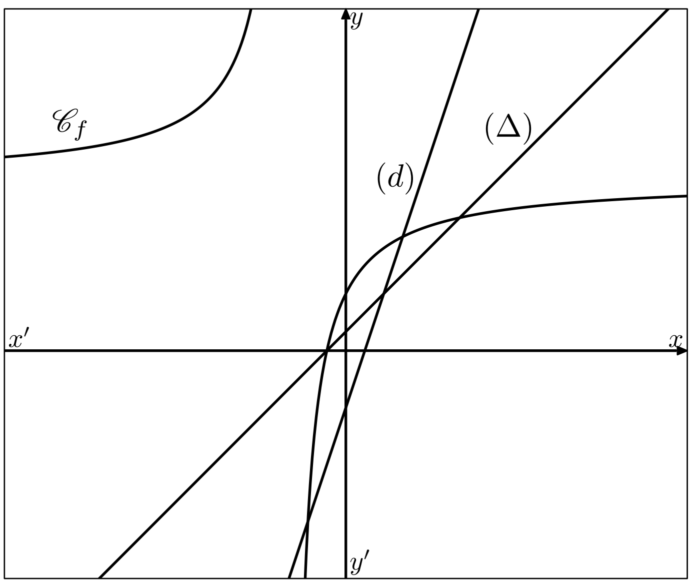
1. a. Déterminer les coordonnées des deux points A et B de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse respective 1 et 3.
   b. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
   c. Tracer, dans le repère, la droite (AB).
2. On considère la droite (Δ) ayant pour équation réduite : (Δ): $y = 3x-4$
   a. Etablir la factorisation suivante :
      $-3x^2+2x+1 = (1-x)(3x+1)$
   b. Résoudre algébriquement l'inéquation :
      $f(x) \leqslant 3x-4$
   c. En déduire la positition relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ relativement à la droite (Δ).
   d. Tracer la droite (Δ) dans le repère.

Exercice 6054

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par la relation :

$f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$

Dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ donné ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



1. Déterminer l'équation réduite de la droite (d) passant par les deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant respectivement pour abscisses $-\dfrac{2}{3}$ et 1.
2. On considère la droite (Δ) ayant pour équation réduite :
   (Δ): $\quad y = x + \dfrac{1}{3}$

   a. Etablir la factorisation suivante :
   $-3x^2 + 5x + 2 = (2-x)(3x+1)$

   b. Résoudre algébriquement l'inéquation :
   $f(x) \leqslant x + \dfrac{1}{3}$

   c. En déduire la positition relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ relativement à la droite (Δ) sur $\mathbb{R}$.

3. Fonctions homographiques : problèmes :

Exercice 2987

Un automobiliste parcours sur les routes départementales une distance de 48 km à une vitesse moyenne de 64 $^{km}/_{h}$, puis il parcourt la suite du parcours, de x km, sur autoroute à une vitesse moyenne de 115 $^{km}/_{h}$.

1. Déterminer la durée de son trajet sur les routes départementales.
2. a. Justifier que le trajet total a eu pour durée :
   $t = \dfrac{3}{4} + \dfrac{x}{115}$

   b. Justifier que la vitesse v moyenne de l'automaliste, sur l'ensemble du parcours, s'écrit en fonction de x :
   $v = \dfrac{460x + 22080}{4x + 345}$
3. Le conducteur sait qu'il a parcouru l'intégralité du parcours à une vitesse moyenne de 92 $^{km}/_{h}$.

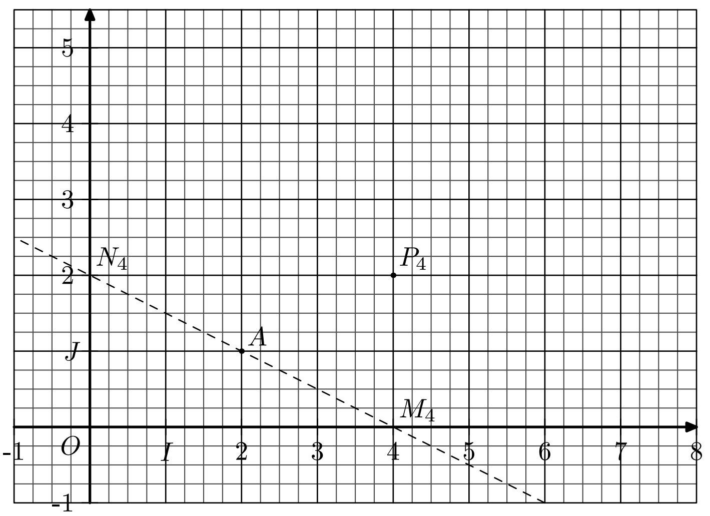
   Déterminer la distance parcourue sur l'autoroute par l'automiliste. Puis, donner la distance totale de son parcours.

Exercice réservé 2989

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère le point A de coordonnée $(2\,;1)$.

Pour a un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]2\,;+\infty\right[$, on considère le point M de coordonnées $(a\,;0)$.
On note N le point d'intersection de la droite (MA) avec l'axe des ordonnées et on note b l'ordonnée du point N.
On note P le point de coordonnées $(a\,;b)$.

Le graphique ci-dessous représente ces différents points dans le cas $a=4$:



Le but de cet exercice est de connaitre la position du point P en fonction de la valeur a ; on parle du "*lieu géométrique*" du point P lorsque le nombre a décrit l'intervalle $\left]2\,;+\infty\right[$.

Partie A :

1. Justifier que le point N ne peut être défini pour a=2.
2. On s'intéresse à la position du point P lorsque a=3 :

   a. Placer le point $M_3(3\,;0)$.

   b. Placer le point N_3 tel qu'indiqué dans l'énoncé. Quel est l'ordonnée du point N_3?

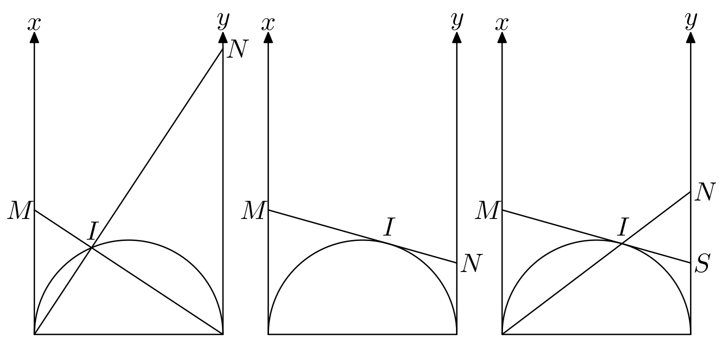
   c. Placer le point P_3 tel que précisée dans l'énoncé.
3. Effectuer la même démarche que pour la question précédente pour les différentes valeurs de a :

   $a = 2{,}5 \quad ; \quad a = 5 \quad ; \quad a = 7$
4. Quel conjecture peut-on faire sur la courbe formée par l'ensemble des points P lorsque le nombre a décrit l'intervalle $\left]2\,;+\infty\right[$.

Partie B :

1. Justfier que la droite (MN) a pour coefficient directeur :
   $\dfrac{1}{2-a}$
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (MN)
3. Déterminer l'expression de b en fonction de a.
4. Exprimer les coordonnées du point P en fonction de a. Confirmer la conjecture faite à la question **A**.

Exercice réservé 2990



4. Etudes d'autres fonctions :

Exercice 3002

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Etablir les égalités suivantes :
$$f(x)=\frac{4}{(x-3)(x+1)}=\frac{4}{(x-1)^2-4}$$

3. a. Justifier que, pour x appartenant à $\left]-\infty\,;-1\right[$, l'image de x est positive.
   b. Etablir que la fonction f est croissante sur $\left]-\infty\,;-1\right[$.

4. Dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :
   a. Pour tout nombre $h\in\mathbb{R}$ tel que les deux nombres $1+h$ et $1-h$ appartiennent à $\mathcal{D}_f$, vérifier l'égalité suivante : $f(1-h)=f(1+h)$
   b. En affichant la courbe $\mathscr{C}_f$ sur votre calculatrice, quelle propriété géométrique semble posséder la courbe $\mathscr{C}_f$?

Exercice 3025

1. On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :
$$f(x)=\frac{x+2}{(2x-1)(3-x)}$$
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
   b. Etablir l'égalité suivante :
$$f(x)=\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{3-x}$$
   c. Montrer que pour tout $x\in\left]-\infty\,;-2\right]$, l'image de x par f est un nombre positif.

2. Soit g la fonction définie par :
$$g:x\longmapsto\frac{4}{4x-2}-\frac{2}{2x+5}$$
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
   b. Déterminer les valeurs de a et de b vérifiant la relation suivante :
$$g(x)=\frac{12}{4\cdot(x-a)^2+b}$$
   c. Etablir le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

Exercice réservé 440

1. Etablir les égalités :
   a. $1+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{x+3}{x+1}$ pour $x\neq-1$.
   b. $\dfrac{3x^2-7x+6}{x-1}=3x-4+\dfrac{2}{x-1}$ pour $x\neq1$.
   c. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x}{x^2-1}$ pour $x\neq1$ et $x\neq-1$.

2. En utilisant les résultats de la question précédente, établir les affirmations suivantes :
   a. La fonction f définie par $x\longmapsto\dfrac{x+3}{x+1}$ est décroissante sur $\left]-1\,;+\infty\right[$.
   b. La fonction g définie par $x\longmapsto\dfrac{2x}{x^2-1}$ est croissante sur $\left]1\,;+\infty\right[$.

