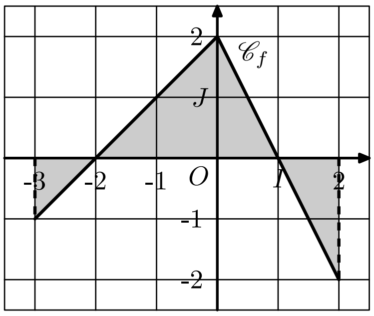
Terminale ES/Calcul intégral

1. Calculs d'aires :

Exercice 7243

On considère la partie du plan représentée en gris ci-contre :
Déterminer l'aire de la partie grisée.

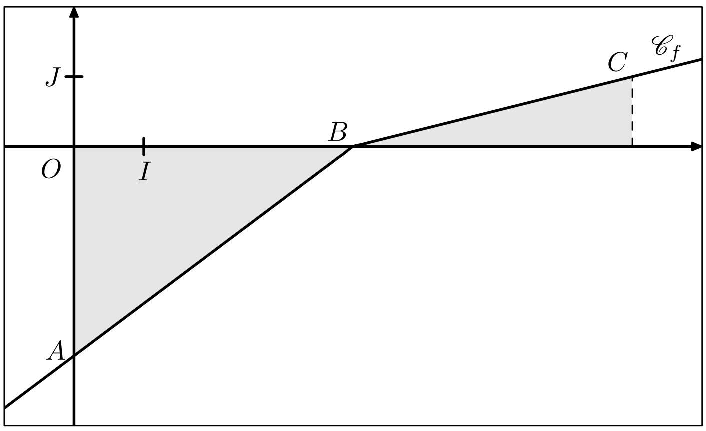


Exercice 7241

On considère la fonction f définie par morceaux par la relation ci-dessous :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3}{4}\cdot x - 3 & \text{sur l'intervalle } \big]-\infty\,;4\big] \\ f(x) = \dfrac{1}{4}\cdot x - 1 & \text{sur l'intervalle } \big[4\,;+\infty\big[\end{cases}$$

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



Les points A, B et C sont des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où le point C a pour ordonnée 1.

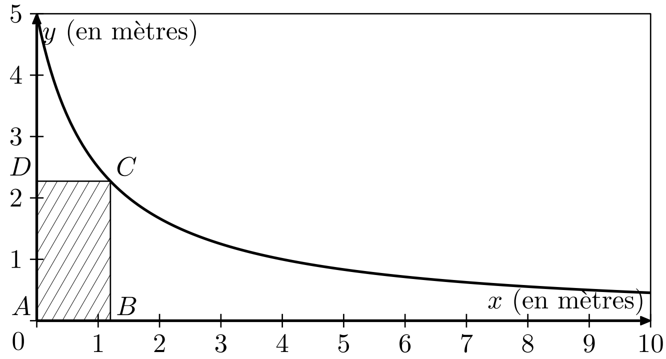
1. Déterminer les coordonnées des points A, B et C.
2. Déterminer l'aire de la surface grisée.

Exercice réservé 7358

Un publicitaire envisage la pose d'un panneau publicitaire rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$f(x) = \frac{5}{x+1}$$

Cette courbe $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O :



Le rectangle $ABCD$ représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes : le point A est situé à l'origine du repère, le point B est sur l'axe des abscisses, le point D est sur l'axe des ordonnées et le point C est sur la courbe $\mathscr{C}_f$.

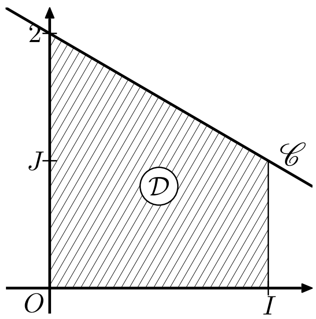
On suppose que le point B a pour abscisse $x=2$.
Montrer qu'une valeur approchée de l'aire du panneau publicitaire est $3{,}3\,m^2$.

Exercice réservé 7242

On considère la fonction f définie par :
$f(x) = 2 - x$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$.

On admet que :
$f(x) > 0$, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$.

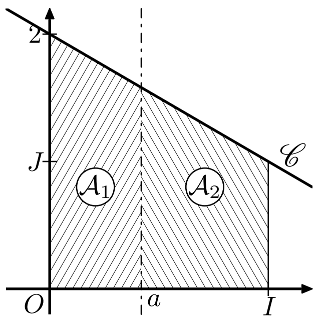
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé, et $\mathcal{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathcal{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées *(partie **A**)*, puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses *(partie **B**)*.

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$.
On note $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox), les droites d'équations $x=0$ et $x=a$, puis $\mathcal{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation $x=a$ et $x=1$.
$\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



Déterminer la valeur de a afin que les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ soient égales.

Partie B

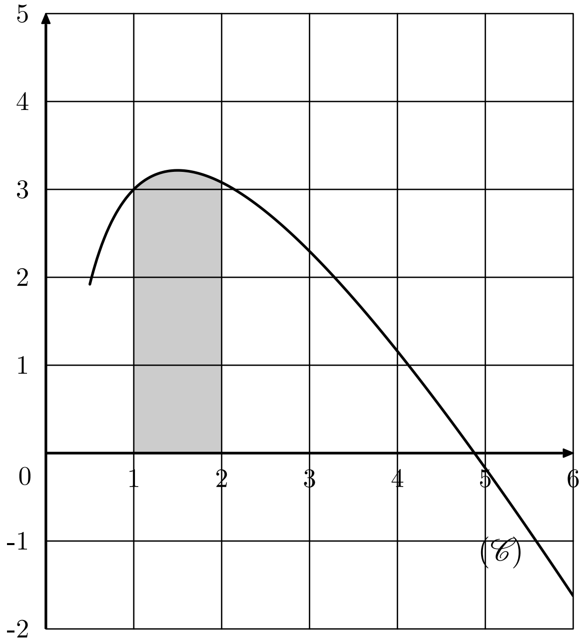
Soit b un réel positif.
Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y=b$.
On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

Déterminer la valeur de b.

2. Encadrement de l'aire avec des rectangles :

Exercice 7036

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0,5\,;6]$.



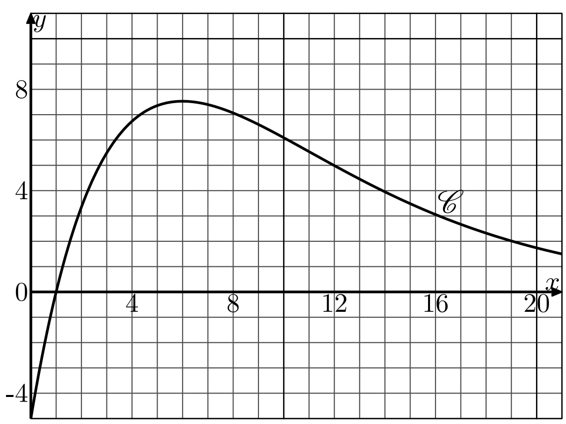
Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

Exercice 7494

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;20]$.

Déterminer un encadrement, d'amplitude 4, par deux nombres entiers de :

$$I=\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$$



Exercice 7520

Parmi les quatre propositions ci-dessous, une seule est correcte. Laquelle?

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-10\,;10]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-10	-5	3	10
Variation de g	7 ↘	2 ↗	4 ↘	-6

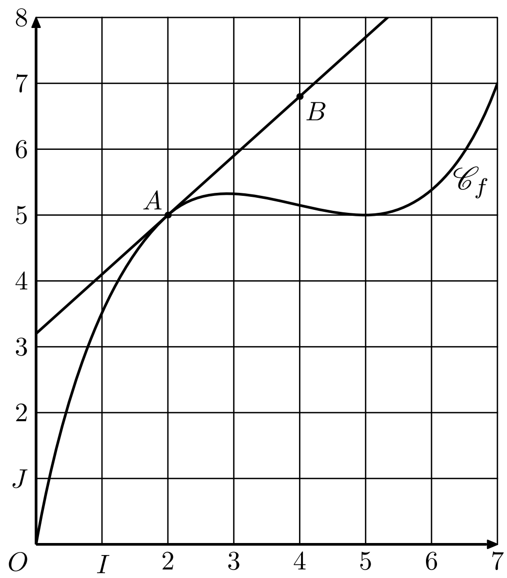
On note $I=\displaystyle\int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

a. $-5 \leqslant I \leqslant 3$ b. $2 \leqslant I \leqslant 4$

c. $16 \leqslant I \leqslant 32$ d. $4 \leqslant I \leqslant 8$

Exercice 7440

Sur le graphique ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[0\,;7]$. Les points A et B ont pour coordonnées $A(2\,;5)$ et $B(4\,;6{,}8)$. La droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



a. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A admet pour équation :

- **Affirmation 1 :** $y=-0{,}9\cdot x+6{,}8$
- **Affirmation 2 :** $y=0{,}9\cdot x+3{,}5$
- **Affirmation 3 :** $y=0{,}9\cdot x+3{,}2$
- **Affirmation 4 :** $y=1{,}8\cdot x+1{,}4$

b.
- **Affirmation 1 :** $f(0)\leqslant \displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(5)$
- **Affirmation 2 :** $2\leqslant \displaystyle\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 7$
- **Affirmation 3 :** $18\leqslant \displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 19$

- **Affirmation 4 :** $25 \leqslant \int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 31$

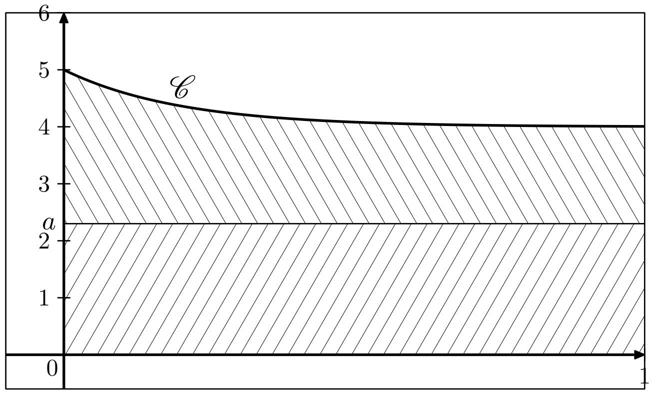
Exercice 7240

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :
$f(x)=4+\mathrm{e}^{-5x}$

On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Le domaine $\mathcal{D}$ hachuré sur la figure est le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$.

On veut partager le domaine hachuré en deux domaines de même aire par une droite d'équation $y=a$, parallèle à l'axe des abscisses, selon l'exemple donné ci-dessous.



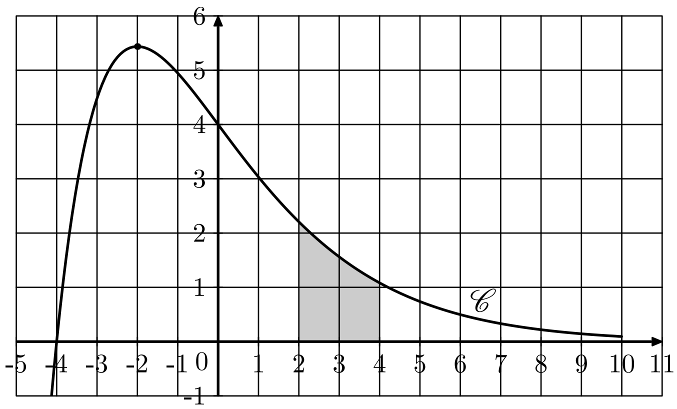
Justifier que la valeur $a=3$ ne convient pas.

3. Encadrement de l'aire avec des triangles :

Exercice 7239

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;10]$.

Le domaine $\mathcal{S}$ grisé sur la figure est le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x=2$ et la droite d'équation $x=4$.



Déterminer, par une lecture graphique, un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire du domaine $\mathcal{S}$ grisé sur la figure.

Exercice réservé 7238

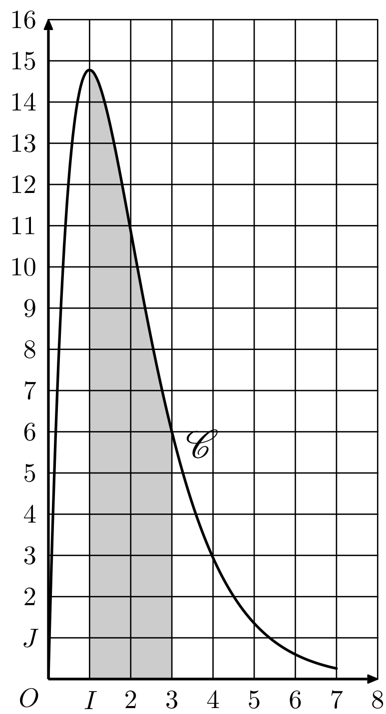
La réponse sera donnée sans justification, avec la précision permise par le graphique ci-contre :

Le graphique ci-contre présente dans un repère d'origine O la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;7]$.
La mesure de la surface grisée appartient à un seul des intervalles suivants. Lequel?

a. $[9\,;17]$

b. $[18\,;26]$

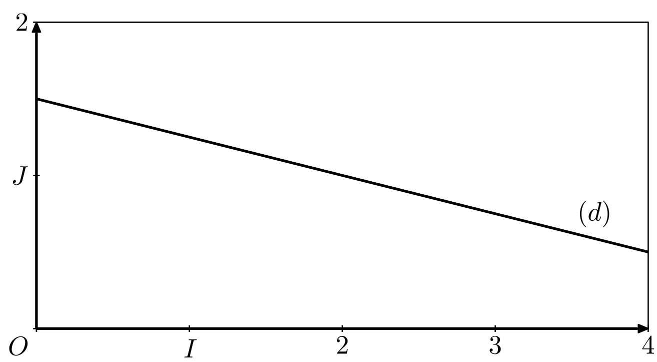
c. $[27\,;35]$



4. Introduction au calcul intégral :

Exercice 7344

Ci dessous est représentée, dans un repère $(O\,;I\,;J)$, la droite (d) admettant pour équation réduite :
(d) : $y = -0{,}25\cdot x + 1{,}5$



1. a. Placer les points $A(3\,;0)$, $C(0\,;1{,}5)$ et le point B

ayant pour abscisse 3 et appartenant à la droite (d).

b. Déterminer l'aire du trapèze $OABC$.

2. Pour tout réel x strictement positif, on admet que l'aire du trapèze $OMNC$ où les points M et N ont pour abscisse x et appartiennent respectivement à l'axe des abscisses et à la droite (d) est déterminée par l'image de x par la fonction F définie par :
$F(x) = -0{,}125{\cdot}x^2 + 1{,}5{\cdot}x$

a. Vérifier le résultat de la question 1. b..

b. On considère le domaine $\mathcal{D}$ délimité par :
- la droite (d) et l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

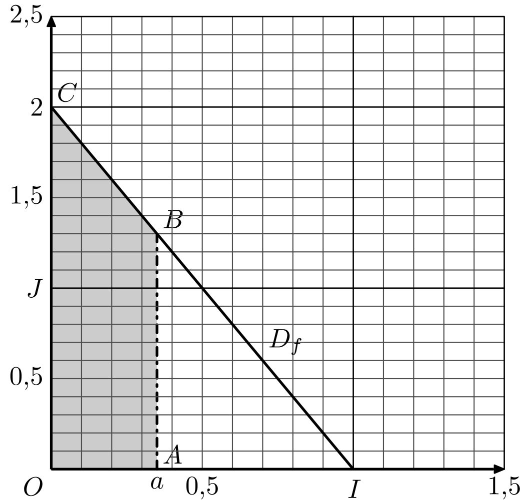
A l'aide de la fonction f, déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

Exercice 7490

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par :
$f(x) = 2 - 2{\cdot}x$

On a tracé ci-dessous la droite $\mathcal{D}_f$, représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;I;J)$ du plan.

Le point C a pour coordonnées $(0;2)$.
Δ est la partie du plan intérieure au triangle OIC.
Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1 ; on note A le point de coordonnées $(a;0)$ et B le point de $\mathcal{D}_f$ de coordonnées $(a;f(a))$.
Le but de cet exercice est de trouver la valeur de a, telle que le segment $[AB]$ partage Δ en deux parties de même aire.
Déterminer la valeur exacte de a, puis une valeur approchée au centième.



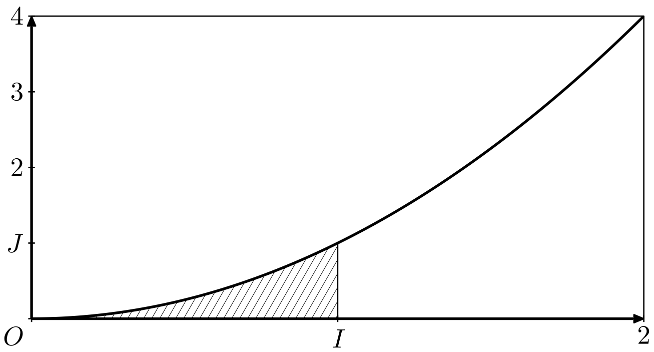
5. Vers l'usage des primitives :

Exercice 7345

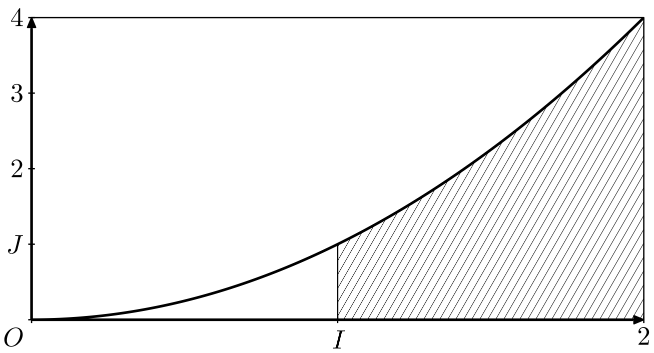
On considère la fonction carré notée f :
$f(x) = x^2$

L'intégrale de la fonction f entre 0 et a est donnée par la formule : $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}{\cdot}a^3$

1. Déterminer l'aire de la partie hachurée :



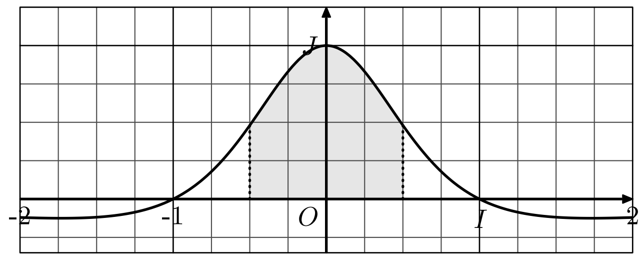
2. Déterminer l'aire de la partie hachurée :



Exercice réservé 7355

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Ci-dessous, est donnée la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé :



Le domaine grisé est délimité par :
- la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations $x=-0{,}5$ et $x=0{,}5$.

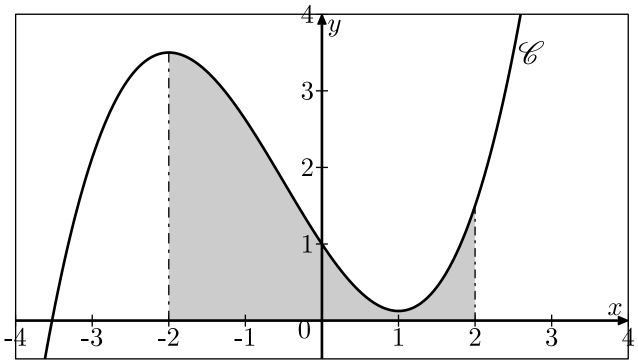
Pour tout nombre a est un nombre de l'intervalle $[-1;1]$, on note I_a la valeur de l'intégrale de la fonction f entre -1 et a. Voici un tableau de valeurs arrondies à 10^{-3} :

a	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}75$	1
I_a	0	$0{,}02$	$0{,}1$	$0{,}265$	$0{,}5$	$0{,}735$	$0{,}9$	$0{,}98$	1

Déterminer l'aire du domaine grisé.

Exercice réservé 7359

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = 0{,}25{\cdot}x^3 + 0{,}375{\cdot}x^2 - 1.5{\cdot}x + 1$



On considère le domaine $\mathcal{D}$ délimité par :

- la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.
- les deux droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

Pour tout nombre a appartenant à l'intervalle $\big[-3\,;3\big]$, on note I_a la valeur de l'intégrale entre -3 et a. Voici un tableau de valeurs arrondies à 10^{-3} :

a	-3	-2	-1	0	1	2	3
I_a	0	3,0625	6,25	8,0625	8,5	9,0625	12,75

Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

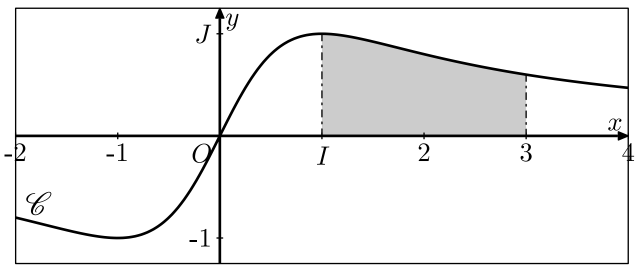
6. Calculatrice et calcul d'intégrales :

Exercice 7360

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{2 \cdot x}{x^2+1}$$

Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :



On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine grisé ci-dessus.

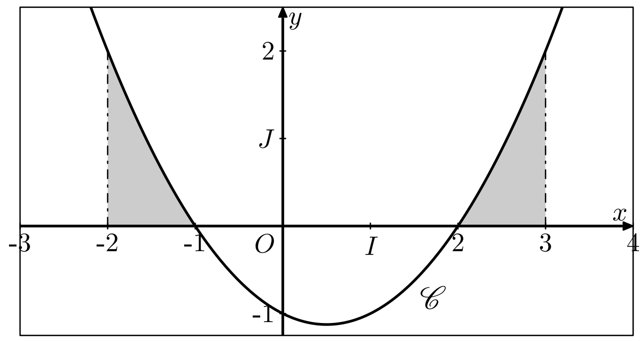
1. Décrire le domaine $\mathcal{D}$.
2. A l'aide de la calculatrice, détermine l'aire du domaine $\mathcal{D}$ à 10^{-4} près.

Exercice réservé 7361

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = 0{,}5 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x - 1$$

Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :



On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine grisé ci-dessus.

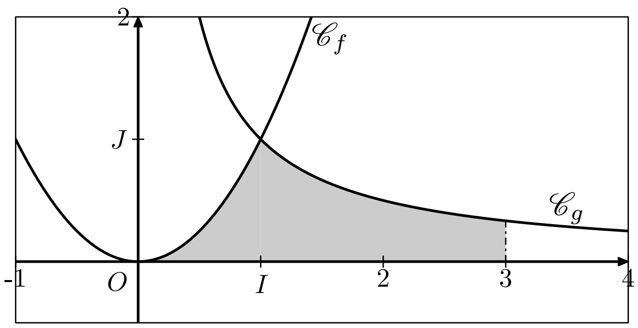
A l'aide de la calculatrice, déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ à 10^{-4} près.

7. Jonction de deux courbes :

Exercice réservé 7362

On considère les deux fonctions de référence : la fonction carré notée f et la fonction inverse notée g.

On donne la représentation des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ ci-dessous :



On considère le domaine $\mathcal{D}$ grisé ci-dessus et :

- délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$;
- et entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et l'axe des ordonnées.

1. a. Pour tout réel a positif ou nul, on admet que l'intégrale de la fonction f entre 0 et a a pour expression :
   $$\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot a^3$$
   Déterminer le domaine sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre 0 et 1.

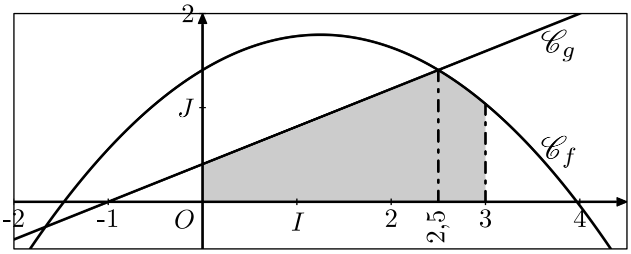
   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée au millième près du domaine sous la courbe $\mathscr{C}_g$ entre 1 et 3.
2. En déduire une mesure approchée au millième du domaine $\mathcal{D}$ grisé.

Exercice 7493

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = -0{,}24{\cdot}x^2 + 0{,}6{\cdot}x + 1{,}4 \quad ; \quad g(x) = 0{,}4{\cdot}x + 0{,}4$$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on a les représentations des courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g :



Pour a un nombre réel compris entre $[-1\,;4]$, on a les informations complémentaires :

- Pour a un nombre réel de l'intervalle $[0\,;4]$, on note I_a l'aire du domaine sous la courbe $\mathscr{C}_f$ compris entre les droites $x=0$ et $x=a$. Voici un tableau de valeurs de I_a arrondies à 10^{-3} :

a	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
I_a	0	0,765	1,62	2,505	3,36	4,125	4,74	5,145	5,28

- Pour calculer l'aire du domaine sous la courbe $\mathscr{C}_g$ compris entre les droites $x=-1$ et $x=a$, on utilise le calcul intégral suivant :
$$\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}2{\cdot}a^2 + 0{,}4{\cdot}a$$

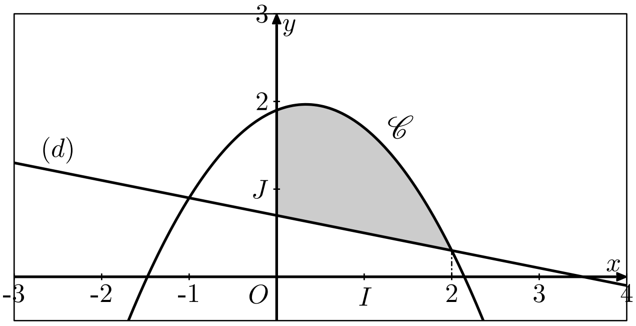
Déterminer l'aire grisé en laissant les étapes de votre raisonnement.

8. Domaine entre deux courbes :

Exercice 7363

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -0{,}6{\cdot}x^2 + 0{,}4{\cdot}x + 1{,}3$$

Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$:



On considère la droite (d), courbe représentative de la fonction g définie par :
$$g(x) = -0{,}2{\cdot}x + 0{,}7$$

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ se situe au dessus de la droite (d) sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

Le domaine $\mathcal{D}$ est le domaine du plan ayant pour caractéristiques :

- délimité par les droites $x=0$ et $x=2$
- situé entre la droite (d) et la courbe $\mathscr{C}$

On utilisera les données suivantes :

- Pour tout nombre a appartenant à l'intervalle $[-1\,;2]$, on note I_a l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=a$. Ci-dessous est donné un tableau de valeurs arrondies à 10^{-3} près :

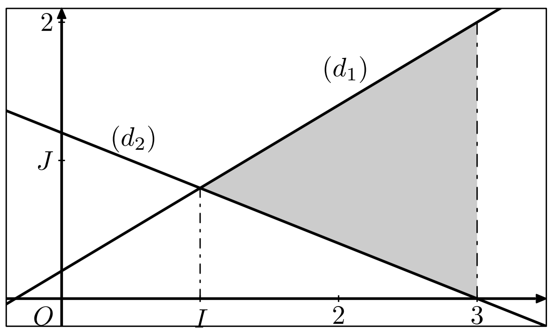
a	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2
I_a	0	0,625	1,5	2,475	3,4	4,125	4,5

- Pour tout nombre $a \in [0\,;2]$, on admet que l'intégrale de la fonction g de 0 à a a pour valeur :
$$\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = -0{,}1{\cdot}a^2 + 0{,}7{\cdot}a$$

Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

Exercice réservé 7444

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 0{,}6{\cdot}x + 0{,}2 \quad ; \quad g(x) = -0{,}4{\cdot}x + 1{,}2$$
dont les représentations graphiques sont respectivement les droites (d_1) et (d_2) représentées ci-dessous :



- Pour tout nombre a appartenant à l'intervalle $[0\,;3]$, on note I_a l'aide du domaine délimité par la droite (d_1), l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=0$ et $x=a$. Voici un tableau de valeurs :

a	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
I_a	0	0,175	0,5	0,975	1,6	2,375	3,3

- Pour un nombre réel a appartenant à $[1\,;3]$, on admet que l'aire du domaine situé sous leurs courbes respectives se déterminent par le calcul intégral :
$$\int_1^a g(x)\,\mathrm{d}x = -0{,}2{\cdot}a^2 + 1{,}2{\cdot}a - 1$$

En déduire l'aire du domaine grisé.

9. Domaine entre deux courbes et calculatrices :

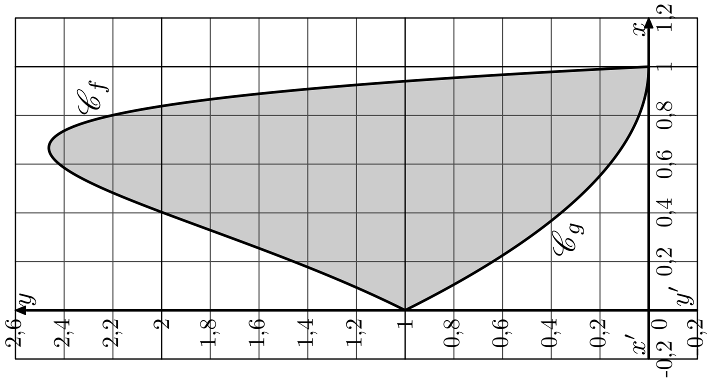
Exercice 7436

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.

Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies pour tout réel x de $\big[0\,;1\big]$ par :

$$f(x)=\big(1-x\big)\cdot e^{3x} \quad ; \quad g(x)=x^2-2\cdot x+1$$

Leurs courbes représentatives seront notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Déterminer l'aire, arrondie au millième près, de la partie grisée sur le graphique comprise entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $\big[0\,;1\big]$.

(On justifiera les étapes de son raisonnement)

