Terminale ES/Généralité sur les fonctions

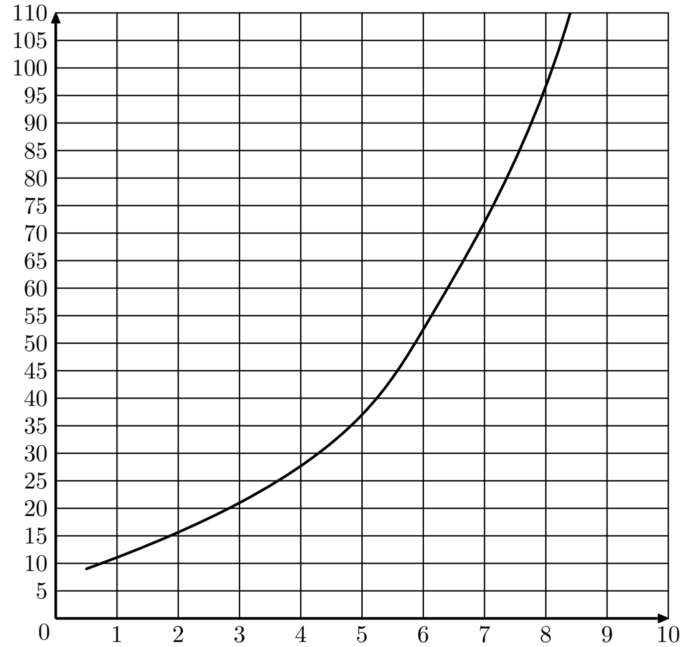
1. Rappels: lecture graphique - images et antécédents :

Exercice 7042

Un site est spécialisé dans la diffusion de vidéos sur internet. Le responsable du site a constaté que la durée de chargement des vidéos évoluait en fonction d'internautes connectés simultanément.

On cherche à estimer la durée de chargement en fonction du nombre de personnes connectées simultanément. Deux fonctions sont proposées pour modéliser cette situation.

Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f qui modélise la situation précédente.
On note x le nombre, exprimé en millier, d'internautes connectés simultanément et $f(x)$ la durée de chargement exprimée en seconde.

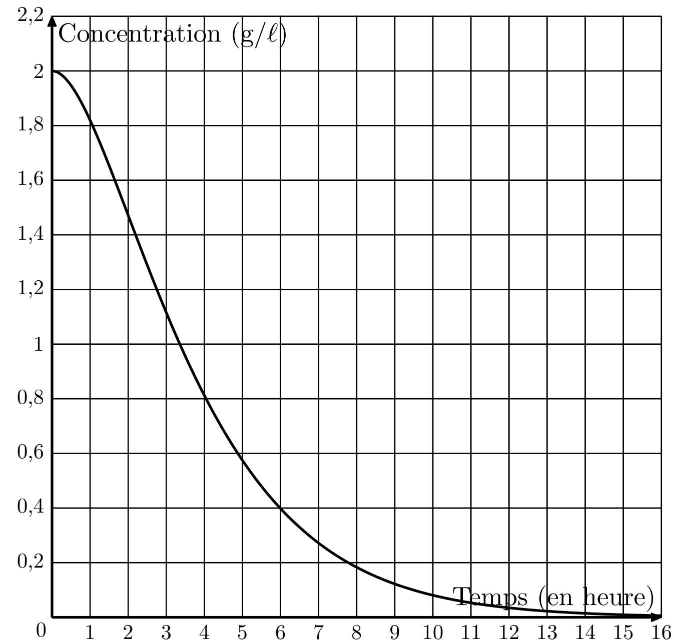


1. Par lecture graphique, estimer la durée de chargement, en seconde, pour 8 000 personnes connectées.
2. a. Déterminer graphiquement un antécédent de 15 par f.
   b. Donner une interprétation de ce résultat.

Exercice réservé 7049

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes en litres, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie ci-dessous:



Avec la précision permise par le graphique, indiquer:

- la concentration à l'instant initial;
- l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.

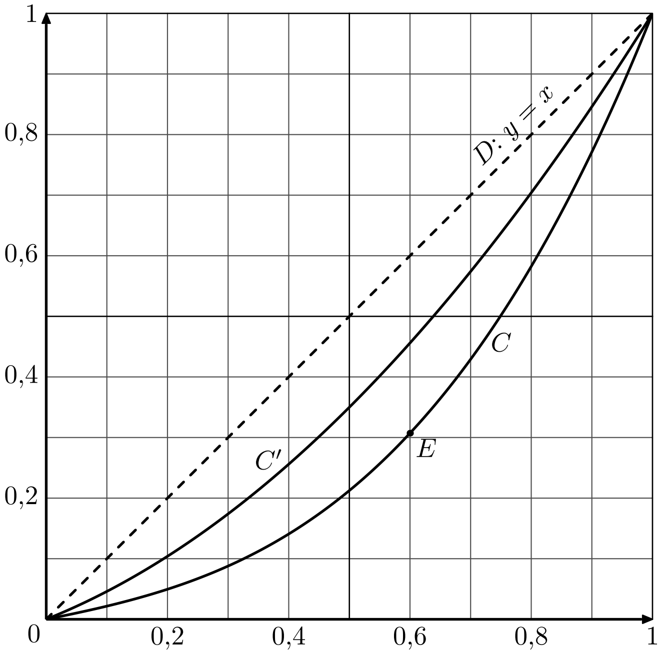
  On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction nécessaires.

Exercice 7058

Un cabinet d'audit a été chargé d'étudier la répartition des salaires dans deux filiales d'une entreprise, appelés A et B. Pour l'étude, les salaires sont classés par ordre croissant.

Le cabinet d'audit a modélisé la répartition de salaires par la fonction u pour la filiale A et par la fonction v pour la filiale B.
Les fonctions u et v sont définies sur l'intervalle $[0\,;1]$ par:
$u(x) = 0{,}6\cdot x^2 + 0{,}4\cdot x \quad ; \quad v(x) = 0{,}7\cdot x^3 + 0{,}1\cdot x^2 + 0{,}2\cdot x$

On a tracé ci-dessous les courbes représentatives C et C' des fonctions u et v.



1. Déterminer la courbe représentative de la fonction u en justifiant la réponse.

2. Lorsque x représente un pourcentage de salariés, $u(x)$ et $v(x)$ représentent le pourcentage de la masse salariale que se partagent ces salariés dans leurs filiales respectives.

> Exemple : pour la courbe C, le point $E(0{,}60\,;0{,}3072)$ signifie que 60 % des salariés ayant les plus bas salaires se partagent 30,72 % de la masse salariale.

a. Calculer le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires.

b. Pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, laquelle des filiales, A ou B, distribue la plus grande part de la masse salariale?

c. Quelle filiale parait avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire?

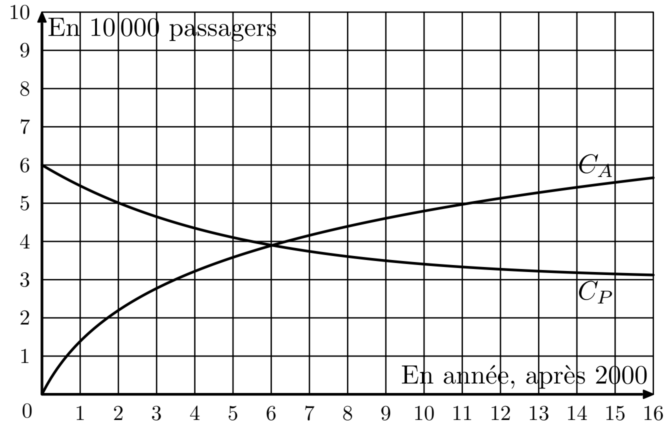
Exercice réservé 7057

Une compagnie aérienne propose à partir du premier janvier de l'année 2000 une nouvelle formule d'achat de billets, la formule *Avantage* qui s'ajoute à la formule *Privilège* déjà existante.

Une étude a permis de modéliser l'évolution du nombre de passagers transportés depuis l'année 2000 et la compagnie admet que ce modèle est valable sur la période allant de l'année 2000 à l'année 2016.

Le nombre de passagers choisissant la formule *Privilège* est modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0\,;16]$ et le nombre de passagers choisissant la formule *Avantage* est modélisé par la fonction A définie sur l'intervalle $[0\,;16]$. Le graphique donné ci-dessous représente les courbes représentatives C_p et C_A de ces deux fonctions.

Lorsque x représente le temps en année à partir de l'année 2000, $P(x)$ représente le nombre de passagers, exprimé en dizaine de milliers, choisissant la formule *Privilège* et $A(x)$ représente le nombre de passagers, exprimé en dizaine de milliers, choisissant la formule *Avantage*.



Les estimations seront obtenues par lecture graphique.

1. Donner une estimation du nombre de passagers qui, au cours de l'année 2002, avaient choisi la formule *Privilège*.

2. Donner une estimation de l'écart auquel la compagnie peut s'attendre en 2015 entre le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* et ceux ayant choisi la formule *Privilège*.

3. Comment peut-on interpréter les coordonnées du point d'intersection des deux courbes au regard de la situation proposée?

4. Justifier que la compagnie aérienne peut, selon ce modèle, estimer que le nombre total de passagers ayant choisi la formule *Privilège* durant la période entre 2007 et 2015 sera compris entre 240 000 et 320 000.

2. Rappels : lecture graphique - position relative de courbes :

Exercice 7005

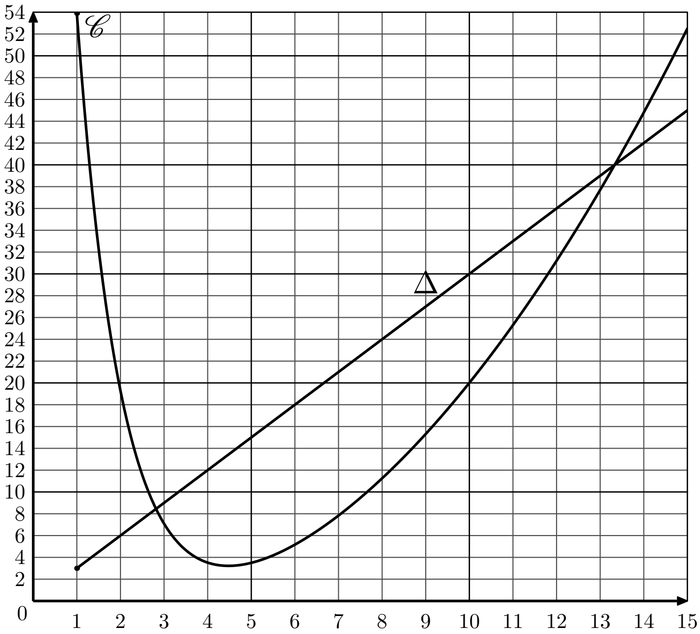
L'entreprise *BBE (Bio Bois Énergie)* fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et de poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.
L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

- Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :
  $C(x) = 0{,}3{\cdot}x^2 - x + e^{-x+5}$
  où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.
- Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros.
  La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par l fonction R définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :
  $R(x) = 3{\cdot}x$
  où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.
- On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est à dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

Sur le graphique situé ci-dessous, on donne $\mathscr{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.

On répondra aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

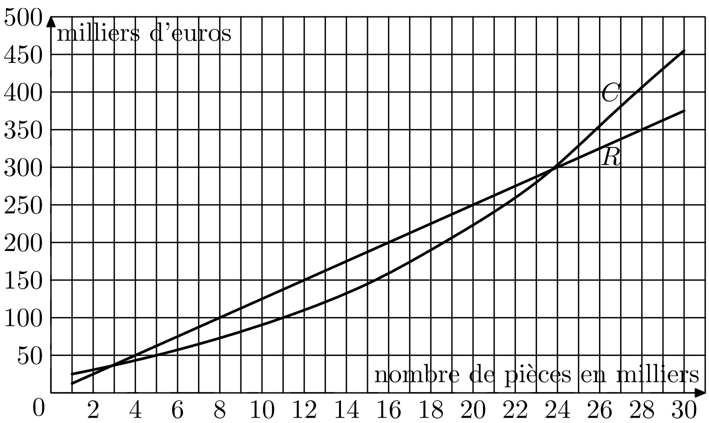
1. Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.
2. (a) Déterminer les valeurs $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.
   (b) Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est à dire un bénéfice.



Exercice 7055

Une entreprise produit et vend des composants électroniques. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 1 000 et 30 000 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée.

On donne ci-dessous R et C les représentations graphiques respectives des fonctions recette et coût sur l'intervalle $[1\,;30]$.

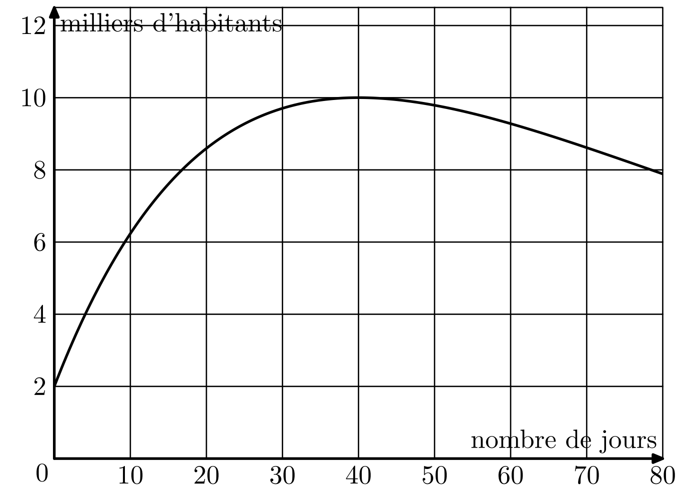


Par lecture graphique, donner une estimation des valeurs demandées.

1. Quel est le coût de production de 21 000 pièces?
2. Pour quelles quantités de pièces produites, l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice?
3. Pour quel nombre de pièces produites le bénéfice est-il maximal?

Exercice réservé 7060

L'évolution de la population d'une station balnéaire pour l'été 2015 a été modélisée par une fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;70]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1^{er} juillet, $f(x)$ désigne la population en milliers d'habitants.
Ainsi, $x=30$ correspond au 31 juillet et $f(30)$ représente la population qu'il est prévu d'accueillir le 31 juillet.

On estime qu'un habitant utilisera chaque jour entre 45 et 55 litres d'eau par jour.

Les réponses aux questions suivantes sont à fournir par lecture graphique.

1. (a) Estimer le nombre maximal d'habitants présents dans la station balnéaire selon ce modèle durant l'été 2015 et préciser à quelle date ce maximum serait atteint.
   (b) La commune est en capacité de fournir 600 000 litres d'eau par jour, est-ce suffisant?
2. Estimer le nombre de jours durant lesquels le nombre d'habitants de la station balnéaire devrait rester supérieur à 80 % du nombre maximal prévu.

3. Rappels : polynôme du second degré :

Exercice 7082

Résoudre les équations suivantes :

a. $2x^2 - 3x - 2 = 0$ b. $-4x^2 + 12x - 9 = 0$

c. $x^2 - 3x + 1 = 0$ d. $3x^2 - 4x + 2 = 0$

Exercice réservé 7104

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 - 4{\cdot}x - 5 = 0$ b. $3{\cdot}x^2 - x - 2 = 0$

Exercice 7047

Parmi les quatre propositions ci-dessous, laquelle est correcte?

L'équation $-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3{\cdot}x=0$ admet sur $\mathbb{R}$:

a. la solution -2 b. trois solutions distinctes

c. aucune solution d. une unique solution

Exercice 7083

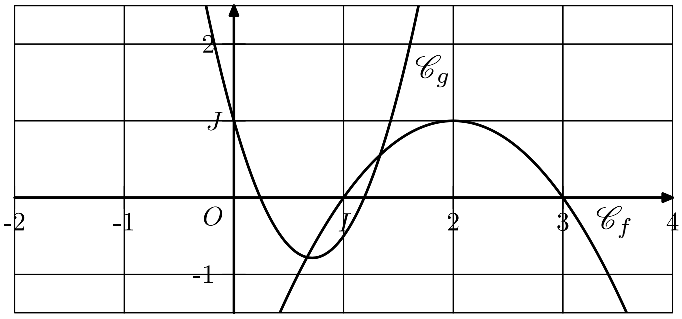
Déterminer le tableau de signe des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$:

a. $2x^2 - 3x - 2$ b. $(2x + 1)(3x^2 - 2x - 1)$

Exercice 7084

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = -x^2 + 4{\cdot}x - 3 \quad ; \quad g(x) = \frac{7}{2}{\cdot}x^2 - 5x + 1$$



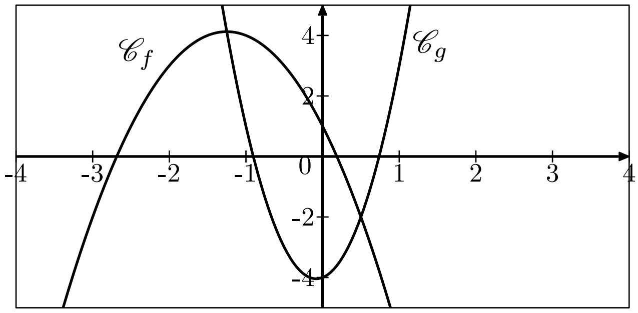
Déterminer la position relative de ces deux courbes.

Exercice réservé 7105

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = -2{\cdot}x^2 - 5x + 1 \quad ; \quad g(x) = 6{\cdot}x^2 + x - 4$$

Ci-dessous est donnée la représentation graphique de ces deux courbes :



Déterminer la position relative de ces deux courbes.

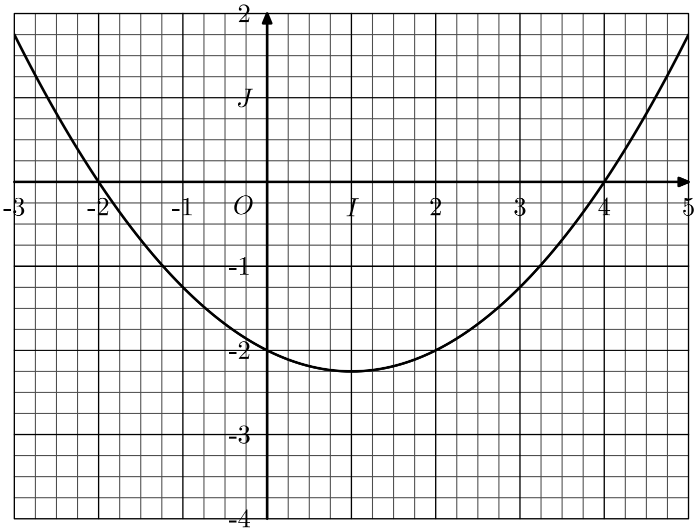
4. Rappels : fonctions affines :

Exercice 7089

On considère la fonction f définie par la relation est :

$$f(x) = \frac{1}{4}{\cdot}x^2 - \frac{1}{2}{\cdot}x - 2$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f :

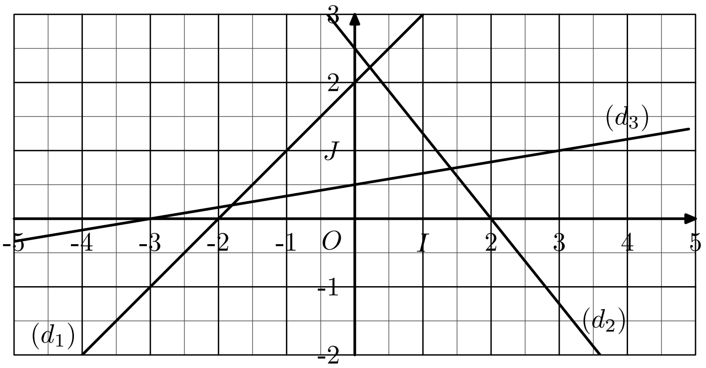


1. a. Effectuer le tracé de la droite (d) dont l'équation est :
$$y = \frac{1}{2}{\cdot}x - 3$$
   b. Comment s'appelle la droite (d) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

2. a. Effectuer le tracé de la droite (Δ) dont l'équation est :
$$y = -\frac{3}{2}{\cdot}x - 3$$
   b. Comment s'appelle la droite (Δ) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$?

Exercice 7087

A l'aide de lecture graphique, donner l'équation réduite de chacune des droites présentes ci-dessous :



Exercice 7088

1. On considère la fonction affine f définie par la relation : $f(x) = 2x+1$
   a. Résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant 0$.
   b. En déduire les solutions de l'inéquation : $f(x) < 0$.
   c. Dresser le tableau de signe de la fonction f.

2. On considère la fonction affine g dont l'image de x est définie par :
$$g(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{2}{3}$$
Dresser le tableau de signe de la fonction g.

5. Rappels : dérivée et représentation graphique :

Exercice 7051

On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction g définie et dérivable sur $[0\,;5]$ ainsi que sa tangente horizontale au point A d'abscisse 3.

Parmi les quatre propositions ci-dessous, laquelle est exacte?

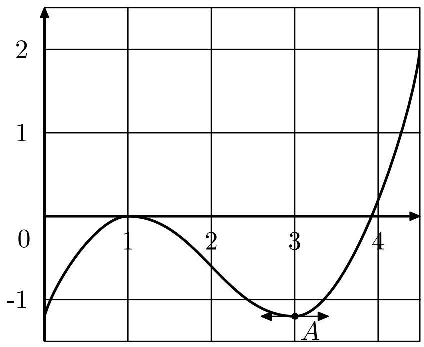
Le signe de la fonction dérivée de g est :

a. négatif sur $[0\,;1]$

b. positif sur $[3\,;4]$

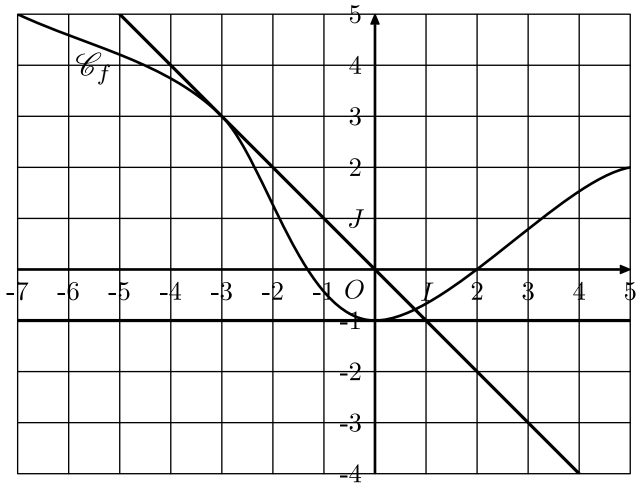
c. négatif sur $[1\,;4]$

d. change en $x=4$



Exercice réservé 7008

La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0.



Parmi les quatre réponses ci-dessous, laquelle est correcte :

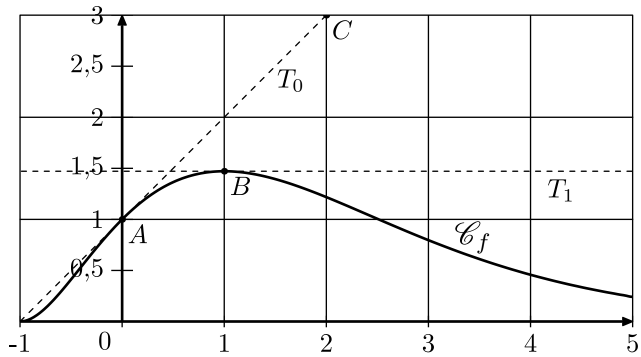
a. $f'(0) = -1$ b. $f'(-1) = 0$

c. $f'(-3) = -1$ d. $f'(-3) = 3$

Exercice 7037

Dans ce questionnaire à choix multiples, aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
Une bonne réponse rapporte 0,75 point.
Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.
Noter sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;5]$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0\,;1)$ et par le point B d'abscisse 1.
La tangente T_0 à la courbe au point A passe par le point $C(2\,;3)$ et la tangente T_1 au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



1. La valeur exacte de $f'(1)$ est :
   a. 0 b. 1 c. 1,6 d. autre réponse

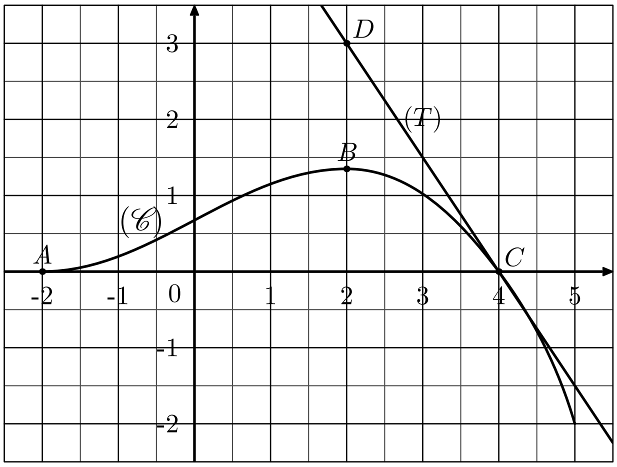
2. La valeur exacte de $f'(0)$ est :
   a. 0 b. 1 c. 1,6 d. autre réponse

3. La valeur exacte de $f(1)$ est :
   a. 0 b. 1 c. 1,6 d. autre réponse

Exercice 7048

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;5]$, croissante sur $[-2\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;5]$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
La courbe $(\mathscr{C})$ tracée ci-dessous représente la fonction f dans

le plan muni d'un repère orthonormé ; elle passe par les points $A(-2\,;0)$, $B\left(2\,;\dfrac{4}{3}\right)$ et $C(4\,;0)$.
Elle admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses et sa tangente (T) au point C passe par le point $D(2\,;3)$.



Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. La justication peut reposer sur le graphique ou sur un calcul.

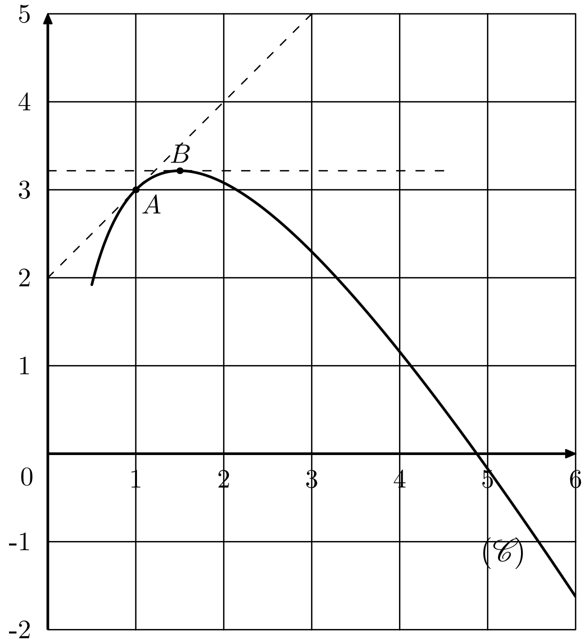
- **Proposition 1 :** $f'(4) = -\dfrac{2}{3}$
- **Proposition 2 :** $f(2) = 0$

Exercice 7035

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0{,}5\,;6]$. Les points $A(1\,;3)$ et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe $(\mathscr{C})$.

Les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.

On note f' la fonction dérivée de f.

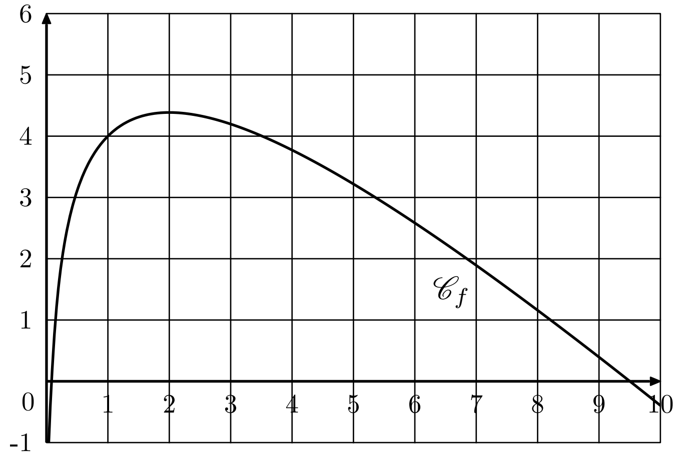


1. Déterminer $f'(1{,}5)$.
2. La tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par A passe par le point de coordonnées $(0\,;2)$. Déterminer une équation de cette tangente.

Exercice 7022

Soit la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par :
$f(x) = 5 - x + 2\cdot\ln x$

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f, ainsi que T, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 4.



Parmi les quatre propositions ci-dessous, laquelle est exacte?

Sur l'intervalle $]0\,;10]$, l'équation $f'(x) = 0$ admet :

a. Aucune solution
b. Une seule solution
c. Deux solutions
d. Plus de deux solutions

6. Rappels : dérivée et polynôme :

Exercice 7062

La fonction f est définie pour tout réel x élément de l'intervalle $[1\,;7]$ par :
$f(x) = 1{,}5\cdot x^3 - 9\cdot x^2 + 24\cdot x + 48$

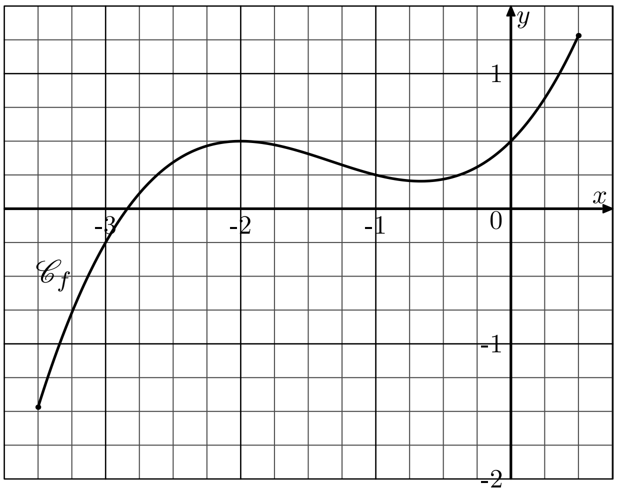
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa dérivée seconde sur $[1\,;7]$

1. Calculer $f'(x)$
2. Calculer $f''(x)$

Exercice 7533

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-3{,}5\,;0{,}5\right]$ par la relation :
$$f(x) = 0{,}25{\cdot}x^3 + x^2 + x + 0{,}5$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-dessous :



1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2. Déterminer les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$ par la fonction f.

3. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

   b. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

Exercice 7090

On considère la fonction définie par la relation :
$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

On note (d) et (Δ) les deux tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ respectivement aux points d'abscisses 2 et 5.

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2. Déterminer l'équation de la tangente (d).

3. Déterminer l'équation de la tangente (Δ).

Exercice 7251

Une entreprise fabrique des croquettes pour chiens. Chaque jour, elle en fabrique entre 0 et 80 tonnes. Le coût de fabrication, en euros, de x tonnes est modélisé par la fonction C définie par :
$$C(x) = x^3 - 105{\cdot}x^2 + 3700{\cdot}x + 4000$$

Une tonne de croquettes est vendue 1 900 €. La recette, pour x tonnes vendues, est donc donnée par une fonction R définie sur l'intervalle $\left[0\,;80\right]$.

1. a. Pour x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;80\right]$, donner l'expression de $R(x)$.

   b. En déduire que le bénéfice réalisé par la vente de x tonnes de croquettes est donné par la fonction B définie sur l'intervalle $\left[0\,;80\right]$ par :
   $$B(x) = -x^3 + 105{\cdot}x^2 - 1800{\cdot}x - 4000$$

2. Calculer $B'(x)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B.

3. Justifier que le signe de $B'(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	0		10		60		80
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $\left[0\,;80\right]$.

5. Quelle doit être la quantité de croquettes que l'entreprise doit vendre pour réaliser un bénéfice maximal?
   Que vaut ce bénéfice?

7. Rappels : dérivée et étude de fonctions :

Exercice 7085

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto x^5{\cdot}\left(x^2 - 1\right)$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 3x}{2x - 4}$

Exercice réservé 7106

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f : x \longmapsto \left(2{\cdot}x^2 - 5x + 1\right)\left(1 - x^2\right)$

b. $g : x \longmapsto \dfrac{-2{\cdot}x^2 + x - 3}{4{\cdot}x^2 + 3{\cdot}x}$

Exercice réservé 7108

On considère la fonction f définie par la relation :
$$f(x) = 5{\cdot}x - \frac{2{\cdot}x^2 + x - 2}{4{\cdot}x - 3}$$

On note f' la dérivée de la fonction f. Déterminer les solutions de l'équation :
$$f'(x) = 0$$

Exercice 7044

Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation.
Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

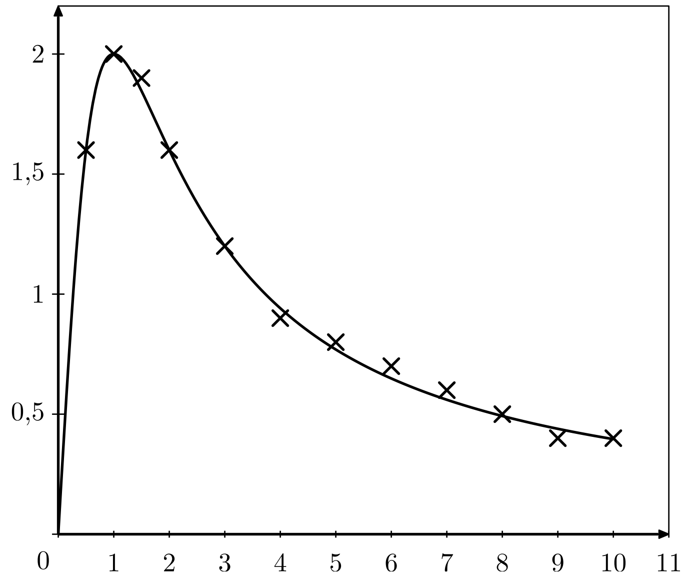
Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en $^{mg}/_{\ell}$	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $\left[0\,;10\right]$ par :

$$g(t) = \frac{4 \cdot t}{t^2+1}$$

Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en $^{mg}/_{\ell}$ de l'antibiotique.

Le graphique ci-dessous représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g.



1. Par lecture graphique, donner sans justification :
   a. les variations de la fonction g sur $[0\,;10]$;
   b. la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;
   c. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à $1{,}2\,^{mg}/_{\ell}$.

2. a. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0\,;10]$ et sa dérivée est g'.

   Montrer que : $g'(t) = \dfrac{4 \cdot (1-t^2)}{(t^2+1)^2}$

   b. En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.

Exercice réservé 7063

Une entreprise fabrique et commercialise un article dont la production est comprise entre 1 000 et 7 000 articles par semaine.

On modélise le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = 1{,}5 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 48$$

où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

On note c la fonction définie sur $[1\,;7]$ représentant le coût moyen par article fabriqué, exprimé en euros. On a, par conséquent, pour tout x de $[1\,;7]$:

$$c(x) = \frac{f(x)}{x} = 1{,}5 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 24 + \frac{48}{x}$$

On admet que la fonction c est dérivable sur $[1\,;7]$. On note c' sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;7]$, on a :

   $$c'(x) = \frac{3(x-4)(x^2+x+4)}{x^2}$$

2. a. Etudier les variations de la fonction c sur l'intervalle $[1\,;7]$.

   b. Déterminer, en milliers, le nombre d'articles à fabriquer pour que le coût moyen par article soit minimal.

Exercice réservé 7218

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = -\frac{16}{4 \cdot x^2 + 7}$$

1. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.

2. Le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous représente la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. Tracer la représentation graphique de (T).