Term L spé/La congruence

1. Révisions sur nombres entiers et division euclidienne :

Exercice réservé 12

1. a. Effectuer la décomposition en facteurs premiers des nombres suivant :
   27×90 ; 20×21

   b. Chercher le $PGCD$ de 2430 et 420.

   c. Donner tous les diviseurs à ces deux entiers.

2. Compter le nombre de diviseurs de 54

Exercice 26

1. Dîtes si les nombres suivants sont des cubes d'entier naturel :

   a. 9 b. 27

   c. $3^3\times 7^3$ d. $11^9\times 19^6\times 67^3$ e. $2^2\times 5^3\times 11$

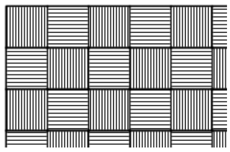
2. a. Trouver le nombre b tel que $180\times b$ soit le cube d'un entier naturel

   b. Ce nombre b est-il unique?

Exercice 14

Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.

1. Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur $4{,}54\,m$ et de largeur $3{,}75\,m$.
   On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de $33\,cm$ de côté.



   On commence la pose par un "*coin*" de la pièce comme le suggère la figure ci-contre. Calculer le nombre de carreaux non découpé qui auront été posés.

2. Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur $4{,}55\,m$ et de largeur $3{,}85\,m$.
   On veut carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.

   a. Donner la liste des diviseurs de 455 puis la liste des diviseurs de 385.

   b. Donner la liste des diviseurs communs à 455 et 385.

   c. Quel est alors le plus grand côté possible des dalles carrées à utiliser pour carreler cette cuisine?

3. On dispose de dalles rectangulaires de longueur $24\,cm$ et de largeur $15\,cm$.

   a. Donner la liste des multiples de 24 inférieurs à 400, puis la liste des multiples de 15 inférieurs à 400

   b. Donner la liste des multiples comuns à 24 et 15, inférieurs à 400.

   c. Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe?

2. Division euclidienne :

Exercice réservé 13

Pour rendre irréductible la fraction $\dfrac{6452}{3241}$, nous allons calculer le PGCD des entiers 6452 et 3241?

Dividende	Diviseur	Reste	
6452	3241	...	$6452 = \ldots\times 3241 + \ldots$
...	...	...	$\ldots = \ldots\times\ldots+\ldots$
...	...	...	$\ldots = \ldots\times\ldots+\ldots$
...	...	...	$\ldots = \ldots\times\ldots+\ldots$

Exercice réservé 29

1. Sans la calculatrice, effectuer la division euclidienne de 372 par 15.

2. Avec la calculatrice, déterminer la division euclidienne de 37852 par 23.

3. a. $2456 = 17\times 143 + 25$
   Déduire la division euclidienne de 2456 par 17.

   b. $\dfrac{32\,247}{143} = 225 + \dfrac{72}{143}$
   Déduire la division euclidienne de 32247 par 143.

   c. $\dfrac{516}{43} = 12$
   Déduire la division euclidienne de 516 par 43.

   d. $\dfrac{674}{24} = 28 + \dfrac{1}{12}$
   Déduire la division euclidienne de 674 par 24.

   e. $\dfrac{5460}{63} = 86 + \dfrac{2}{3}$
   Déduire la division euclidienne de 5460 par 63.

Exercice réservé 1718

On donne la division euclidienne de 195695 par 3 :
$195695 = 65231\times 3 + 2$

1. En étudiant le produit $(65231\times3+2)\times2$, déterminer la division euclidienne de 195695×2 par 3.

2. Faire de même pour la division euclidienne de 195695×3 par 3.

3. Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7
Division euclidienne de $195695\times n$							

Exercice 1716

1. Déterminer la division euclidienne de 1038 par 17.

2. En étudiant le carré $(61\times17+1)^2$, déterminer le reste de la division euclidienne de 1038^2 par 17.

3. En déduire une conjecture sur, pour tout entier naturel n, la division euclidienne de 1038^n par 17.

3. Congruence :

Exercice 27

1. a. Trouver les plus petits entiers naturels a, b, c vérifiant :

$100 \equiv a \pmod{4}$; $27 \equiv b \pmod{4}$; $95 \equiv c \pmod{4}$

   b. En déduire le reste de la division euclidienne 27×100 par 4.
   Puis, le reste de 2 795 par 4

2. a. Calculer le reste de la division euclidienne de 10, 100, 1000 par 9.

   b. En déduire les plus petits entiers naturels a, b, c vérifiant :

$3\times1000\equiv a \pmod{9}$; $7\times100\equiv b \pmod{9}$; $8\times10\equiv c \pmod{9}$

   c. Donner le reste de la division euclidienne de 3785 par 9

3. a. En utilisant une méthode équivalente à celle de la question 2., donner les plus petits entiers naturel a et b vérifiant :

   $318 \equiv a \pmod{9}$; $1\,203\,631 \equiv b \pmod{9}$

   b. En utilisant les propriétés de conservation de la congruence, montrer que le calcul ci-dessous est faux :

   $3\,785\times318 = 1\,203\,631$

Exercice 19

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. On considère deux nombre entiers naturels a et b tel que :
   - a est congru à 10 modulo 23
   - b est congru à 15 modulo 23

   a. Déterminer le plus petit nombre entier naturel congru à $(a+b)$ modulo 23.

   b. Déterminer le plus petit nombre entier naturel congru à $a{\cdot}b$ modulo 23.

2. a. Déterminer le plus petit nombre entier naturel congru à 1000 modulo 111

   b. Montrer que pour tout nombre entier naturel n, $1000n$ est congru à n modulo 111.
   En déduire que le nombre 10^8+10^4+1 est divisible par 111.

Exercice réservé 20

Le but de cet exercice est de démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, l'entier $A=n{\cdot}(n^2-1)$ est un multiple de 6.

1. Dans chacun des cas suivants, calculer A et déterminer le reste dans la division euclidienne de A par 6.

   a. $n = 5$ b. $n = 16$ c. $n = 32$

2. On suppose maintenant que le reste de la division euclidienne de n par 6 est 5 ; on peut donc écrire :
   $n \equiv 5 \pmod{6}$.

   a. Que peut-on en conclure pour $(n-1)$ et $(n+1)$?

   b. Quel est le reste de la division euclidienne de (n^2-1) par 6 ?

   c. Justifier alors que $n(n^2-1)$ est un multiple de 6.

3. Recopier et compléter le tableau :

Reste de la division de n par 6	Reste de la division de $(n-1)$ par 6	Reste de la division de $(n+1)$ par 6	Reste de la division de (n^2-1) par 6	Reste de la division de $n(n^2-1)$ par 6
0				
1				
2				
3	2	4	2	0
4				
5				

4. Conclure.

Exercice réservé 1989

Le but de cet exercice est de montrer, par deux méthodes différentes, que pour tout nombre entier naturel n, le nombre $n^3+5{\cdot}n$ est divisible par 6.

Première méthode

1. Montrer que tout nombre entier naturel n est congru, modulo 6, à 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

2. Recopier et compléter le tableau suivant avec des nombres entiers naturels inférieur ou égaux à 5.

$n \equiv \dots \pmod{6}$	0	1	2	3	4	5
$n^3 \equiv \dots \pmod{6}$						
$5n \equiv \dots \pmod{6}$						
$n^3+5n \equiv \dots \pmod{6}$						

3. En déduire que pour tout nombre entier naturel n, le nombre entier n^3+5n est divisible par 6.

Deuxième méthode

1. Montrer que pour tout nombre entier naturel n:

$n{\cdot}(n+1)$ est pair.

En déduire que pour tout nombre entier naturel n:

$3{\cdot}n{\cdot}(n+1)$ est divisible par 6.

2. On admet que:

$$(n+1)^3+5{\cdot}(n+1) = (n^3+5{\cdot}n)+3{\cdot}n{\cdot}(n+1)+6$$

Montrer que si pour un nombre entier naturel , $n^3+5{\cdot}n$ est divisible par 6, alors $(n+1)^3+5{\cdot}(n+1)$ est divisible par 6.

3. Que reste-t-il à vérifier, pour en déduire que $n^3+5{\cdot}n$ est divisible par 6, pour tout nombre entier naturel n?

4. Congruence et écriture décimale :

Exercice 18

Dans cet exercice on étudie la divisibilité par 11 en exploitant la congruence modulo 11 des puissances de 10

1. a. Vérifier que: $100 \equiv 1 \pmod{11}$.
   En déduire que: $10^4 \equiv 1 \pmod{11}$
   b. Vérifier que: $10 \equiv -1 \pmod{11}$.
   En déduire que:
   - $10^3 \equiv -1 \pmod{11}$
   - $10^5 \equiv -1 \pmod{11}$

2. a. En utilisant l'égalité $3729=37\times100+29$ et les résultats précédents, montrer que 3729 est divisible par 11.
   b. En utilisant la méthode précédente, étudier la divisibilité de 9240 par 11

3. a. En utilisant l'égalité:
   $3729 = 3\times1000+7\times100+2\times10+9$
   et les résultats précédents, montrer que 3729 est divisible par 11.
   b. En utilisant cette méthode, étudier la divisibilité de 9240 par 11.

4. Etudier la divisibilité de 197 277 par 11.

Exercice 23

Le but de l'exercice est de prouver pour les entiers à quatre chiffres, le critère de divisibilité: "Un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3".

1. Un exemple:
   a. Pour un entier naturel n, que signifie la phrase "*n est congru à 1 modulo 3*"?
   Traduire à l'aide d'une congruence "n est divisible par 3".
   b. Pour chacun des entiers suivants, donner l'entier positif le plus petit auquel il est congru modulo 3: 10, 100, 1000, 10^p où est un entier positif.
   c. Déterminer le plus petit entier, positif auquel est congru l'entier 4520 modulo 3. On remarquera que:
   $4520 = 4\times1000+5\times100+2\times10$.

2. Quelques généralisations:

On considère un entier N à quatre chiffres, quatre entiers a, b, c et d entre 0 et 9 tels que $a\neq0$ et:
$N = 1000{\cdot}a+100{\cdot}b+10{\cdot}c+d$.
Le chiffre des unités est d, celui des dizaines est c, des centaines b et des milliers a.

   a. Montrer que: $N\equiv a+b+c+d$ modulo 3.
   b. Justifier, pour les entier à quatre chiffres, le critère de divisibilité par 3 énoncé au début de l'exercice.
   c. Enoncer un critère analogue de divisibilité par 9 et le démontrer pour les entiers à quatre chiffres.

Exercice 24

On note $\overline{abcd}=1000{\cdot}a+100{\cdot}b+10{\cdot}c+d$ l'écriture d'un entier en base dix dont les chiffres sont a, b, c et d.

1. a. Déterminer le reste de la division euclidienne de 100 par 11, puis de 1000 par 11.
   b. Montrer que si un nombre entier n vérifie:
   $n = 10 \pmod{11}$
   alors on peut aussi écrire: $n=-1 \pmod{11}$
   c. En déduire que si $\overline{abcd}$ est divisible par 11 alors $-a+b-c+d$ est aussi divisible par 11.

2. a. Les entiers du type $\overline{abba}$ sont-ils divisible par 11?
   b. Pour quelle valeur de a, l'entier $\overline{1a1}$ est-il divisible par 11?
   c. Pour quelle valeur de a, l'entier $\overline{9a9}$ est-il divislble par 11?

3. A quelles conditions les entiers du type $\overline{aab}$ sont-ils divisibles par 11?

Exercice 1770

Un entier naturel N s'écrit $\overline{cabc}$ dans e système de numération à base cinq où a, b, c sont non nuls, c'est-à-dire:

$$N = c\times5^3+a\times5^2+b\times5+c$$

où a, b, c sont des entiers tels que:

$$0<a<5 \quad ; \quad 0<b<5 \quad ; \quad 0<c<5$$

Ce même nombre entier N s'écrit $\overline{aba}$ dans le système de numération à base huit.

1. Montrer que $N=65{\cdot}a+8{\cdot}b$ et en déduire que:

$40\cdot a = 126\cdot c - 3b\cdot$.

2. a. Justifier que $40\cdot a \equiv 0 \pmod{3}$. En déduire la valeur de a.

b. Montrer que $b \equiv 0 \pmod{2}$. Déterminer les valeurs de b et c.

c. Donner l'écriture de l'entier N dans les bases cinq, huit et dix.

5. Congruence et puissance :

Exercice réservé 10

1. Donner le reste de la division euclidienne de 5 par 8.
Donner le reste de la division euclidienne de 5^2 par 8.

2. Donner le reste de la division euclidienne de 5^{86} par 8.
Donner le reste de la division euclidienne de 5^{87} par 8.

3. Donner est le reste de la division euclidienne de 965^{87} par 8.

4. Soit n un entier naturel.
Montrer que $5^{2n+1}+5^{2n}+2$ est un multiple de 8.

Exercice réservé 7

On considère les entiers :

$$A = 8\,387\,592\,115 \quad ; \quad B = 9\,276\,312\,516$$

1. a. Montrer que 1 000 est divisible par 8.

b. Montrer que A est congru à 3 modulo 8.

c. Donner l'entier naturel b strictement inférieur à 8 tel que B soit congru à b modulo 8.

2. Déterminer les entiers naturels strictement inférieurs à 8 qui sont congrus respectivement à $A+B$ et à $A\cdot B$

3. a. Montrer que B^2 est divisible par 8.

b. Montrer que A^2 n'est pas divisible par 8.

c. Montrer que A^{100} n'est pas divisible par 8.

Exercice 1849

1. a. Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des entiers 3^n pour $n\in\mathbb{N}$: $n\leqslant 6$.

b. Recopier et compléter le tableau suivant :

Puissance de 3	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
Reste modulo 7							

c. En déduire que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, 3^{6k} est congru à 1 modulo 7.

2. a. Déterminer le plus petite entier naturel congru à 1515 modulo 7.

b. Après avoir remarqué que $2004 = 6\times 334$, déduire du 1. le reste de la division euclidienne de 1515^{2004} par 7.

c. Montrer que dans la division euclidienne de 1515^{2006} par 7 le reste est 2.

Exercice 28

1. a. Montrer que 1999 est congru à 4 modulo 7.

b. Déterminer le plus petit nombre entier naturel congru à 2007 modulo 7.

2. Soit n un nombre entier naturel congru à 5 modulo 7.

a. Déterminer un nombre entier naturel congru à n^3 modulo 7.

b. En déduire que (n^3+1) est divisible par 7.

3. Montrer que si n est un nombre entier naturel congru à 4 modulo 7 alors (n^3-1) est divisible par 7.

4. On considère le nombre : $A = 1999^3+2007^3$.
Sans calculer A, montrer en utilisant les résultats précédents que A est divisible par 7.

Exercice 8

On considère le nombre entier $A = 18^{2002}$.

1. A est divisible par 9? Par 4? *(justifier les réponses)*

2. On cherche à obtenir le reste de la division euclidienne de A par 7, en utilisant des congruences.

a. Trouver l'entier r vérifiant : $\begin{cases} 0 \leqslant r < 7 \\ 18 = r \pmod{7} \end{cases}$

b. Quel est le plus petit entier naturel non nul n tel que : $r^n = 1 \pmod{7}$

c. Prouver que pour tout nombre entier naturel k, 4^{3k} est congru à 1 modulo 7.

d. En déduire le reste de la division euclidienne de A par 7.

3. Montrer que 2002^{18} est divisible par 13.

6. Clef de controle :

Exercice 15

Sur le catalogue d'une entreprise de vente par correspondance, la référence de chaque article d'un nombre à cinq chiffres $x\ y\ z\ t\ u$ *(le premier de ces chiffres x étant différant de zéro)*, suivi d'une lettre majuscule choisie antre A et N, à l'exception de la lettre I.
A cette lettre majuscule est associé un nombre appelé clé selon le tableau suivant :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N
Clé	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

A des fins du contrôle, on impose, pour chaque référence, que la somme du nombre à cinq chiffres et de la clef obtenie grâce au tableau, soit un nombre divisible par 13.
Par exemple considérons un artilce dont la référence est 18501M. Le nombre à cinq chiffres est 18501. La clé associée à M est 11 :

$$18501 + 11 = 18512 = 13\times 1424.$$

18512 est divisible par 13, donc cette référence est correcte.

1. Les deux références suivantes sont-elles correctes?

   $13587M \quad ; \quad 45905A$

   Les réponses doivent être justifiées.

2. On veut retrouver la lettre d'une rétirence dont il ne reste que le nombre à cinq chiffres 26014.
   a. Montrer que : $13\times 2001 < 26014 < 13\times 2002$.
   b. En déduire la lettre manquante.

3. On veut retrouver un chiffre illisible dans la référence d'un article. Cette référence est $85z29C$ *(z étant le chiffre illisible)*
   a. Montrer que le problème revient à trouver z tel que $0 \leqslant z \leqslant 9$ et :
   $$8\times 10^4+5\times 10^3+z\times 10^2+2\times 10+9+2 \equiv 0 \pmod{13}$$
   Cette relation sera notée (E) dans toute la suite.
   b. Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide d'entiers naturels compris entre 0 et 12.
   - $10^0 \equiv \ldots \pmod{13}$ $\qquad 10^1 \equiv \ldots \pmod{13}$
   - $10^2 \equiv \ldots \pmod{13}$ $\qquad 10^3 \equiv \ldots \pmod{13}$
   - $10^4 \equiv \ldots \pmod{13}$

   c. En utilisant les propriétés des congruences et les résultats obtenus dans le tableau précédent, montrer que le problème revient à trouver z $(0 \leqslant z \leqslant 9)$ tel que :
   $11 + 9z \equiv \quad \pmod{13}$
   d. Déterminer le chiffre illisible de la référence. Ecrire alors cette référence.

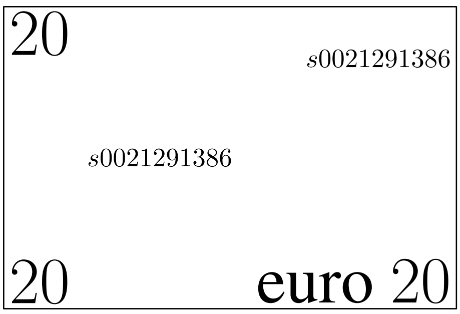
Exercice réservé 16

On admet qu'on obtient le même reste en divisant un entier par 9 qu'en divisant la somme de ses chiffres par 9.

Par exemple :

$8753 = 972\times 9 + 5$	le reste est donc 5.
$8 + 7 + 5 + 3 = 23 = 2\times 9 + 5$	le reste est également 5.

Sur les billets de banque en euros figure un code de 11 chiffres précédé d'une lettre. On remplace la lettre par son rang dans l'alphabet habituel comportant 26 chiffres. On obtient ainsi un entier à 12 ou 13 chiffres et on cherche le reste de la division de ce nombre par 9. Ce reste est le même pour tous les billets authentiques et vaut 8. Exemple :



Code :	$s00\,212\,913\,862$
Rang dans l'alphabet de la lettre s :	19
Nombre obtenu :	19 200 212 913 862
Reste pour ce billet :	8

1. Le code $u01\,308\,937\,097$ figure sur un billet de banque.
   a. Donner l'entier à 13 chiffres correspondant à ce code.
   b. Calculer le reste de la division par 9 de la somme des 13 chiffres de cet entier.
   c. Que peut-on dire de ce billet?

2. Sur un billet authentique figure le code $s02\,166\,448\,10x$, x pour le dernier chiffre illisible. Montrer que $x+42$ est congru à 8 modulo 9.
   En déduire x.

3. Sur un autre billet authentique la partie du code formé par les 11 chiffres est 16 122 340 242, mais la lettre qui les précède est effacée. On appelle n le rang dans l'alphabet de la lettre effacée.
   a. Déterminer les valeurs possibles de n.
   b. Quelles sont les possibilités pour la lettre effacée?

Exercice 1

Le code d'identification d'un article est formé de sept chiffres compris entre 0 et 9. les six premiers chiffres identifient l'article, le septième est une clé de contrôle destinée à déceler une erreur dans l'écriture des six premiers.

On notera $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ un tel code. la clé de contrôle x_7 est le reste de la division euclidienne par 10 de la somme :
$N = (x_1+x_3+x_5)+7(x_2+x_4+x_6)$

1. a. Vérifier que le code suivant est correct : 2 3 4 1 5 4 7
   b. Calculer la clé du code suivant : 9 2 3 4 5 1 •
   c. Un des chiffres du code suivant a été effacé :
   1 1 2 • 7 7 4.
   Le calculer.

2. Dans cette question un des chiffres du code est erroné : au lieu de saisir $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$,le dactylographe a frappé $x_1x_2x_3yx_5x_6x_7$
   a. Ecrire les sommes N_1 et N_2 associées respectivement aux deux codes précédents puis calculer la différences $N_1 - N_2$
   b. Montrer que l'équation $7a = 0 \pmod{10}$ où a est un entier compris entre 0 et 9, a pour seule solution 0.
   c. L'erreur de frappe sera-t-elle détectée?

3. Dans cette question, deux des chiffres du code ont été intervertis : au lieu de saisir $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$, le dactylographe a frappé $x_1x_3x_2x_4x_5x_6x_7$.
   a. Ecrire les sommes N_1 et N_2 associées à ces deux codes, puis calculer la différence $N_1 - N_2$.
   b. Donner un exemple de valeurs de x_2 et x_3 pour lesquelles la clé de contrôle ne détecte pas l'erreur.

Exercice 3

Le numéro I.N.S.E.E. est constitué de 15 chiffres. En lisant de gauche à droite :

- Le premier chiffre est 1 s'il s'agit d'un homme, 2 s'il s'agit d'une femme ;

- les deux chiffres suivants désignent les deux derniers chiffres de l'année de naissance ;
- les deux chiffres suivants désignent le mois de naissance ;
- les deux chiffres suivants désignent le département de naissance ;
- les trois chiffres suivants désignent la commune de naissance ;
- les trois chiffres suivants désignent le numéro d'inscription sur le registre civil ;
- les deux derniers chiffres désignent la clé K, calculée de la manière suivante :
  - Soit A le nombre entier constitué par les 13 chiffres de gauche,
  - soit r le reste de la division euclidienne de A par 97,
  - alors $K=97-r$

Les 13 premiers chiffres *(sans clé)* du nombre $I.N.S.E.E.$ de Sophie sont 2 850 786 183 048. On note A ce nombre et r le reste de la division euclidienne de A par 97.

1. Donner le mois de l'année de naissance de Sophie.

2. a. Déterminer les deux entiers a et b tels que :
   $A = a\times 10^6 + b \quad$ avec $0\leqslant b<10^6$.

   b. En utilisant le reste de 100 dans sa division euclidienne par 97 ; montrer que : $\quad 10^6\equiv 27 \pmod{97}$

   c. En déduire le reste r de la division euclidienne de A par 97.

3. Déterminer la clé K du numéro I.N.S.E.E. de Sophie.

4. Sophie, à qui l'on demande les **treize** premiers chiffres de son numéro I.N.S.E.E., inverse les deux derniers chiffres et répond 2 850 786 183 084 à la place de 2 850 786 183 048.

   On note B la réponse de Sophie.

   a. Calculer la différence $B-A$ et en déduire que le reste de la division euclidienne de B par 97 est égal à 21.

   b. L'erreur faite par Sophie peut-elle être détectée ?

Exercice réservé 5

PAS TERMINE

Dans un système d'identification des produits par codes à barres, un code est une succession de 12 chiffres. Il est précédé d'un treizième chiffre appelé clé du code et qui sert à la vérification de la bonne saisie du code.

4 018474 332189

Un code à barres est symbolisé par le tableau :

R est la clé du code et C_1, C_2,…,C_{12} sont les chiffres du code. R, C_1, C_2,…,C_{12} sont des entiers compris entre 0 et 9.

Les chiffres de rang impair $(C_1,C_3,\dots,C_{11})$ sont dans les cases grisées, ceux de rangs pair dans les cases blanches. La clé est calculée de sorte que la relation suivante soit vérifiée :

$$3\times(\text{somme des chiffres de rang impair}) + (\text{somme des chiffres de rang pair}) + R = 0 \pmod{10}$$

1. Sur l'étiquette imprimée plus haut on a :
   $R=4 \quad ; \quad C_1=0 \quad ; \quad C_2=1,\dots$
   Vérifier que le code de l'étiquette ne contient pas d'erreur.

2. Calculer la clé correspondant au code suivant :

3. Montrer que les deux codes suivants correspondent à la même clé :

4. Sur létiquette ci-dessous, un des chiffres a été effacé et remplacé par la lettre a. Retrouver ce chiffre.

5. Les deux premiers chiffres, b et c, de l'étiquette ont été effacés.

   Montrer que : $\quad c\equiv -3\cdot b-1 \pmod{10}$.
   En déduire les valeurs possibles du couple $(b\,;c)$

Exercice réservé 9

Dans une entreprise de vente par correspondance, les références des articles sont composées de 6 chiffres et d'une letttre de contrôle afin d'éviter les erreurs de saisie. La position de la lettre dans l'alphabet correspondant au reste de la division de la référence numérique par 26.

Exemple : la référence numérique $123\,456=4748\times 26+8$ et la 8^{e} lettre de l'alphabet est H donc la référence de l'article avec sa clé de contrôle est $123\,456\,H$.

1. La référence numérique d'un article est 784 503, déterminer la lettre de contrôle correspondant à cette référence.

2. On considère la référence $\dots 37254\,H$ où le premier chiffre a été effacé.

   a. On note n le chiffre manquant ; Vérifier que le nombre vérifie :
   $n{\cdot}37\,254 = n\times 100\,000 + 37\,254$

   b. Déterminer le reste de la division de 100 000 par 26, puis de 37254 par 26.

   c. En déduire que : $\quad 4{\cdot}n+22=8 \pmod{26}$.

   d. Sachant que $1\leqslant n\leqslant 9$, déterminer le chiffre manquant de la référence.

Exercice 1851

Le code barre à 13 chiffres ou EAN 13 *(European Article Number)* est un code constitué de 13 chiffres compris entre 0 et 9, utilisé pour classifier les produits de la grande distribution :

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}$$

On calcule :

$$S = a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + a_5 + 3a_6 + a_7 + 3a_8 + a_9 + 3a_{10} + a_{11} + 3a_{12} + a_{13}$$

Le code est accepté lorsque : $S\equiv 0 \pmod{10}$.
Il est refusé sinon.

1. En pratique.
   On considère le code $A=9\,780\,130\,515\,186$.

   a. Vérifier que A est accepté.

   b. Au lieu du code A, on saisi le code $B=9\,770\,130\,515\,186$ en commettant une erreur sur le troisième chiffre. Montrer que le code B est refusé.

   c. Lors de la saisie du code A, deux chiffres voisins ont été permutés.
   Le code $C=9\,780\,135\,015\,186$ est-il accepté ou refusé?

Le code $D = 9\,780\,130\,155\,186$ est-il accepté ou refusé?

2. Effet d'une erreur de s aisie sur le quatrième chiffre.

a. On désigne par E le code $9\,78n\,130\,515\,186$ où n représente un chiffre. Si $n = 0$, on retrouve le code A donc E est accepté.
Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles E est accepté.

b. En déduire qu'une ererur de saisie sur le quatrième chiffre du code A est toujours détectée.

Exercice réservé 1850

Tous les ouvrages publiés sont identifiés par un numéro ISBN *(International Standard Book Number)* qui indique la langue de publication, l'éditeur et la référence de l'ouvrage chez cet éditeur. Un numéro ISBN est constitué de neuf chiffres *(c'est à dire neuf entiers compris entre 0 et 9)* suivis d'une espace et d'une clé. Cette clé est un chiffre ou la lettre X *(le 10 en numérotation romaine)*.

Pour déterminer la clé d'un numéro ISBN dont les neufs premiers chiffres sont $abcdefghi$, on calcule l'entier :

$$N = a + 2\cdot b + 3\cdot c + 4\cdot d + 5\cdot e + 6f\cdot + 7\cdot g + 8\cdot h + 9\cdot i$$

puis on déterminer l'entier r compris entre 0 et 10 qui est congru à N modulo 11. Si l'entier r est strictement inférieur à 10, la clé est égale à r ; si l'entier r est égal à 10, la clé est X.

1. Vérifier que la clé du numéro ISBN 190190340 0 est correcte.

2. Calculer la clé du numéro ISBN dont les 9 premiers chiffres sont : 103 241 052.

3. Le quatrième chiffre du numéro ISBN d'un ouvrage est illisible. On le note d.
La clé de ce numéro est 4 et le numéro se présente ainsi :
329 d12 560 4

a. Montrer que : $4\cdot d \equiv 2 \pmod{11}$.

b. En déduire le chiffre d.

4. Le premier chiffre et le neuvième chiffre du numéro ISBN d'un ouvrage sont illisibles. On les note a et i. La clé de ce numéro est 9 et le numéro se présente ainsi :
a32 100 50i.

a. Montrer que : $a \equiv 2 - 9\cdot i \pmod{11}$.

b. Donner deux valeurs possibles du couple $(a\,;i)$.

7. Codage :

Exercice 21

Les codes secrets des cartes bancaires sont formés de quatre chiffres pris de 0 à 9.

Pierre n'a pas noté celui de sa carte bancaire dans son agenda, mais comme il a peur de l'oublier, il a quand même noté la forme "*cryptée*" de son code secret de façon que son code secret ne soit pas découvert si son agenda était perdu.

Pierre réalise toujours son cryptage de la façon suivante :

- Il choisit deux chiffres a et b, appelés "*clés du cryptage*", qui vont lui servir à tout le cryptage.
- Il remplace chaque chiffre n de son code secret par le chiffre p, appelée forme cryptée de n, qu'il calcule à l'aide de la formule suivante :
  $p \equiv a\times n + b \pmod{10}$

L'objectif de la partie **A** est de retrouver le code secret de la carte bancaire de Pierre, connaissant les clés de cryptage.

L'objectif de la partie **B** est de retrouver les clés de cryptage.

Les parties **A** et **B** sont donc indépendantes.

Partie A

Pierre a choisi ici : $a = 3$; $b = 7$

Alors : $p \equiv 3\times n + 7 \pmod{10}$

Par exemple, la forme cryptée du chiffre 5 sera le chiffre 2.
Car : $3\times 5 + 7 = 22$; $22 \equiv 2 \pmod{10}$

1. Reproduire et compléter la table de cryptage ci-dessous correspondant à la formule de Pierre.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p				6	9	2			1	

2. Pierre a inscrit 8 5 0 3 dans son agenda qui est la forme cryptée de son code secret, quel est son véritable code secret?

Partie B

Pierre a fait des émules.

Quentin utilise la même formule que Pierre :
$p \equiv a\times n + b \pmod{10}$
mais en prenant deux autres valeurs de a et b parmi les chiffres de 0 à 9.

Pierre prétend pouvoir déterminer la formule de Quentin *(c'est-à-dire trouver les nombres a et b)* car ce dernier lui a avoué les formes cryptées de deux chiffres :

- La forme cryptée du chiffre 3 est le chiffre 3
- La forme cryptée du chiffre 4 est le chiffre 2

1. Etablir que découvrir a et b revient à résoudre le système d'inconnue $(a\,;b)$:

$$\begin{cases} 3a + b \equiv 3 \pmod{10} \\ 4a + b \equiv 2 \pmod{10} \end{cases}$$

où a et b sont des chiffres de 0 à 9.

2. Pierre prétend que le couple $(9\,;6)$ est une solution de ce système. Montrer qu'il a raison

Exercice réservé 22

"*La lutte incessante entre concepteurs et briseurs de codes a permis une série de remarquables percées scientifiques. Les concepteurs ont cherché à élaborer des codes toujours plus sophistiqués pour protéger les communications, alors que les décrypteurs imaginaient perpétuellement des méthodes plus perfomantes pour les attaquer... Leur travail a accéléré le développement technologique, notamment dans le cas de*

l'ordinateur....
L'art de communication secrète, aussi appelé cryptographie, fournira à l'âge de l'information ses verrous et ses clefs".
Histoire des codes secrets - **Simon Singh**

Le code ASCII *(American Standard Code for Information Interchange)* en informatique, permet d'associer à chaque caractère *(lettre, signe de ponctuation, chiffre,...)* un nombre entier n, compris entre 0 et 255.

Le tableau ci-dessous donne les codes attribués aux lettres de l'alphabet :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Code ASCII	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77

Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Code ASCII	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

1. **"Chiffrement" à clé utilisant l'arithmétique**

Le procédé suivant permet de masquer le mot initial : à chaque nombre n, du Code ASCII correspondant à une lettre donnée, on associe le reste de la division de $7n$ par 256.

Exemple : Codage de la lettre **B**
Code ASCII de la lettre **B** : 66.
Calcul du nouveau code de la lettre **B** :
$7\times66 = 462$; $462 = 256\times1 + 206$.
Nouveau code de la lettre **B** : 206
Ainsi le mot BONJOUR sera codé :

Mot	B	O	N	J	O	U	R
Code ASCII	66	79	78	74	79	85	82
Nouveau codage	206	41	34	6	41	83	62

Codage du mot CLE

a. Code ASCII de C : 67 ; $7\times67 = 469$
Déterminer le reste de la division euclidienne de 469 par 256, en déduire le nouveau code de la letre C.

b. De la même facon, déterminer le nouveau code de la lettre L, puis de la lettre E, puis de la lettre F, en déduire le codage du mot CLEF.

2. **"Déchiffrement"** :
Soit x le nouveau code de la lettre à découvrir et n son code ASCII.

a. Justifier que : $x=7\cdot n \pmod{256}$

b. En déduire que : $193\cdot x=n \pmod{256}$.
On admet que n est le reste de la division euclidienne de $183\cdot x$ par 256.

c. Vérifier que pour $x=206$, on a bien $n=66$ qui correspond à la lettre B.

d. Décoder le mot suivant :

206	199	213

Exercice 4

Arthur et Wilson sont deux jumeaux qui ont l'habitude de communiquer à l'aide de messages codés.
Ils réalisent toujours leur cryptage de la façon suivante :
Chaque lettre de l'alphabet munie de son numéro d'ordre n est remplacée par la lettre de l'alphabet munie du numéro d'ordre p $(1\leqslant p\leqslant 26)$ obtenue à l'aide de la formule

$$p = 3\times n + 7 \pmod{26}$$

Par exemple la forme cryptée de L est Q car :
$3\times12+7=43$ et $43 = 17 \pmod{26}$.

1. Reproduire et compléter la table de cryptage ci-dessous *(aucune justification n'est demandée)*.

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p												17		
forme cryptée	J											Q		

lettre	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
p										1		
forme cryptée										A		

2. Arthur a envoyé le message suivant à Wilson : *MIJUZ CZRI OJ IVRLLHOV*.
Retrouver la forme décryptée du message.

3. Wilson désire lui répondre : *MERCI*.
Donner la forme cryptée de ce message.

8. *Modélisation* :

Exercice 17

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

Nathalie communique avec une amie en fabriquant des messages codés. Chaque lettre de l'alphabet est repérée par son rang x, $1\leqslant x\leqslant 26$: 1 pour A, 2 pour B, etc...

La lettre de rang x est codée par la lettre de rang y tel que :

$$1 \leqslant y \leqslant 26 \quad ; \quad y \equiv x + 10 \pmod{26}$$

Exemples :
La lettre V a pour rang $x=22$; on a :
$1\leqslant y\leqslant 26$; $y \equiv 32 \pmod{26}$
donc $y=6$. La lettre V est codée par la lettre F.

1. Recopier et dresser le tableau ci-dessous pour toutes les lettres de l'alphabet.

Lettre	A	....	V	....
x	1		22	
y	11		6	
Codage	K		F	

2. Retrouver le codage du mot "*ARITHMETIQUE*".

3. Décoder le mot "*OEBY*".

Partie II

1. Remarquant que $999 = 27 \times 37$, démontrer que :

$10^3 \equiv 1 \pmod{37}$; $10^{30} \equiv 1 \pmod{37}$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$10^{3n} \equiv 1 \pmod{37}$.

3. En déduire que l'entier $N = 10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ est un multiple de 37.
(On pourra remarquer que $10^{10} = 10^9 \times 10$*).*

Exercice réservé 2

Une horloge électronique a été programmée pour émettre un bip toutes les sept heures. Le premier bip est émis le 31 décemble à minuit.

1. a. A quelle heure est émis le dernier bip du 1er janvier 2005?
   b. A quelle heure est émis le premier bip du 2 janvier 2005?
   c. A quelle heure est émis le dernier bip du 2 janvier 2005?
   d. A quelle heure est émis le premier bip du 3 janvier 2005?

   Expliquer les réponses.

2. a. Montrer que : $24 \equiv 3 \pmod{7}$
   b. En déduire le reste de la division euclidienne de 2×24 par 7 et le reste de la division euclidienne de 3×24 par 7. Justifier les résponses. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste de la division euclidienne de $n \times 24$ par 7				5	1	4	0	3	6	2

   c. Expliquer pourquoi l'horloge émet un bip à minuit tous les 7 jours et tous les 7 jours seulement.

3. On rappelle que l'année 2005 est une année non bissextile et comporte 365 jours.
   a. Déterminer le plus petit entier naturel a tel que :
   $365 \equiv a \pmod{7}$.
   b. A quelle date l'horloge émettra-t-elle un bip à minuit pour la dernière fois en 2005? Expliquer la réponse.

Exercice 11

Le célèbre tableau de DAVID : "Le sacre de Napoléon" immortalise l'événement du 2 décembre 1804.
Sur la période considérée, toutes les années dont le millésime est multiple de 4 sont bissextiles, sauf l'année 1900.

Considérons le 2 décembre 1804 comme le jour de rang 1

1. a. Combien y-a-t-il d'années dont le millésime est compris entre 1805 *(inclus)* et 2003 *(inclus)* ?
   b. Parmi ces années, montrer qu'il y a 48 années bissextiles

2. Prouver que le rang du 1er janvier 2004 est 72714.

3. Déterminer l'entier a compris entre 0 et 6 inclus tel que :

$72\,714 = a \pmod{7}$.

4. Sachant que le 1er janvier 2004 était un jeudi, recopier et compléter le tableau suivant où k désigne un nombre entier.

Rang du jour	$7k$	$7k+1$	$7k+2$	$7k+3$	$7k+4$	$7k+5$	$7k+6$
Jour de la semaine							

5. Quel jour de la semaine, Napoléon 1er a-t-il été sacré empereur?

Exercice 25

Une année bissextile compte 366 jours et une année non bissextile 365 jours. Une année est bissextile si son "numéro" est divisible par 4 sauf s'il s'agit d'un siècle.
Les siècles, années dont le "numéro" se termine par deux zéros, ne sont, en général, pas bissextiles sauf si leur "numéro" est divisible par 400.
Quelques exemples : 1996 était bissextile, 1997 ne l'était pas, 1900 non plus mais 2400 le sera.

1. Trouver les deux entiers naturels a et b inférieurs ou égaux à 6 tels que :

$365 \equiv a \pmod{7}$; $366 \equiv b \pmod{7}$

2. a. En supposant que le premier janvier d'une année non bissextile soit un lundi, expliquer pourquoi le premier janvier de l'année suivante sera une mardi.
   b. Si le premier janvier d'une année bissextile est un lundi, quel jour de la semaine sera le premier janvier de l'année suivante?

3. Une période de quatre années consécutives compte :
$N = 3 \times 365 + 1 \times 366$.
Sans calculer N, justifier que $N \equiv 5 \pmod{7}$

4. En supposant que le premier janvier d'une année soit un ludi, quel jour de la semaine sera le premier janvier qutre ans plus tard? Expliquer la réponse.
Plus généralement, pour une date donnée, (par exemple le 1er janvier), chaque période de 4 années produit un décalage de cinq jours dans le cycle des jours de la semaine.

5. Compléter le tableau ci dessous. Aucune justification n'est demandée.

Nombres de périodes de quatre années	J = nombre de jours de décalage dans le cycle des jours de la semaine	Reste de la division de J par 7
0	0	0
1	5	5
2	10	3
3		
4		
5		
6		
7		

6. a. Expliquer pourquoi l'année 2004 est bissextile.
   b. Sachant que le 29 février 2004 était un dimanche, quel jour de la semaine sera le 29 février 2008?
   c. Quelle sera la prochaine année où le 29 février sera un dimanche? Expliquer la réponse.

9. *Raisonnement par récurrence :*

Exercice 1769

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère le nombre entier :
$11^n + 5^n - 7$

1. a. Quel est le reste de 11 dans la division euclidienne par 10?

   b. Démontrer que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:
   $11^n \equiv 1 \pmod{10}$.

2. Démontrer que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$,

   $5^n \equiv 5 \pmod{10}$.

   (On pourra utiliser un raisonnement par récurrence ou s'appuyer sur des propriétés de divisibilité)

3. Quel est le chiffre des unités de l'entier $11^{2007} + 5^{2007} - 7$? Justifier la réponse donnée.

Exercice réservé 1771

Pour tout entier naturel n, on pose : $A(n) = n^2 - n + 2007$.

Le but de l'exercce est d'étudier la divisibilité des entiers $A(n)$ par 2 et par 3.

Cet exercice est composé de deux questions indépendantes.

1. a. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier $A(1)$ égal à 2007.

   b. Soit n un entier naturel. Démontrer que : “Si n est divisible par 3, alors $A(n)$ est divisible par 3”.

   c. La réciproque de cette dernière affirmation est-elle vraie? Justifier.

2. a. Vérifier que, quel que soit l'entier naturel n, on a :
   $(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = (n^2 - n + 2007) + 2 \cdot n$

   b. On considère un entier naturel n quelconque. Démontrer que : “Si $A(n)$ est impair alors $A(n+1)$ est impair”.

   c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? Justifier.
   “Il existe au moins un entier naturel n tel que $A(n)$ soit divisble par 2”.

