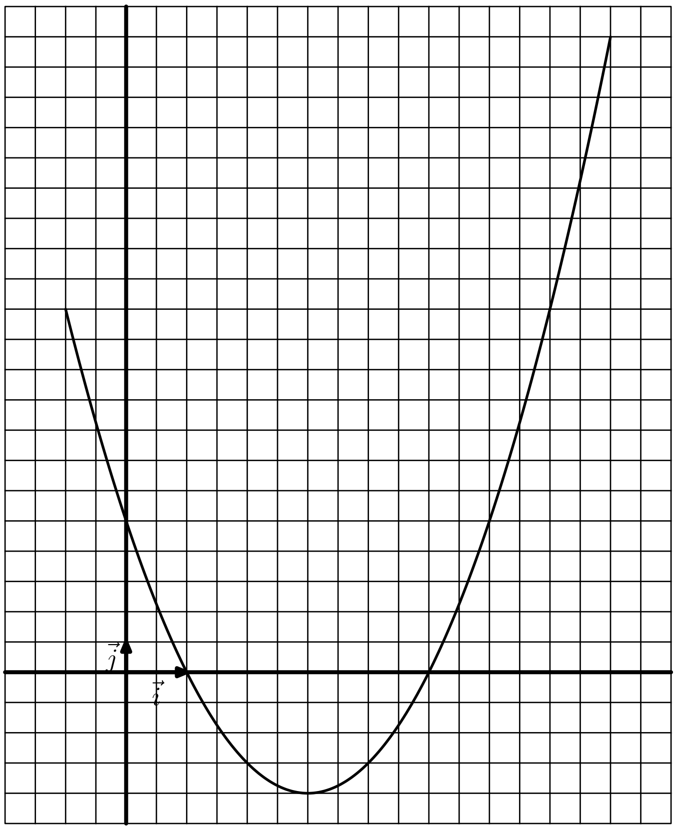
Term L spé/Les fonctions

1. Fonctions polynomiales :

Exercice réservé 110

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[-1\,;8]$ par $g(x)=x^2-6{\cdot}x+5$ et représentée ci-dessous



1. a. Résoudre graphiquement l'équation $g(x)=0$.
   b. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[-1\,;8]$.
   c. Résoudre graphiquement l'équation $g(x)=-3$
2. a. La fonction g admet-elle un minimum sur $[-1\,;8]$?
   b. Vérifier que : $g(x)=(x-1)(x-5)$
   pour x appartenant à $\big[-1\,;8\big]$.
   c. Retrouver le signe de $g(x)$ à l'aide d'un tableau

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[-1\,;\,8]$ par :

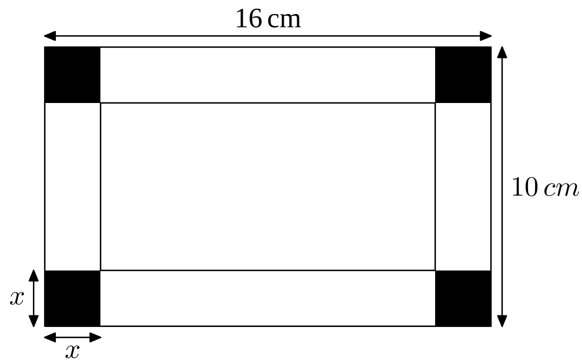
$$f(x) = 0{,}2{\cdot}x^3 - 1{,}8{\cdot}x^2 + 3{\cdot}x + 4.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ *(unité de longueur 1 cm)*

1. Calculer la dérivée de f, notée f'.
2. Vérifier que $f'(x)=0{,}6{\cdot}g(x)$ pour tout x de $[-1\,;8]$
   (g est la fonction étudiée dans la partie A).
   En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau des variations de la fonction f sur $[-1\,;8]$.
3. Tracer $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$

Exercice réservé 112

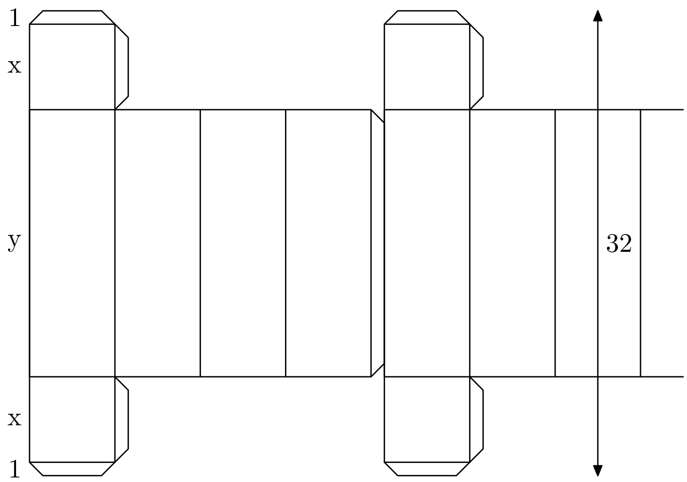
On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en *cm*.



1. Quelles sont les valeurs possibles de x?
2. Vérifier que le volume $V(x)$ de cette boîte est égal à :
   $4{\cdot}x^3 - 52{\cdot}x^2 + 160{\cdot}x$.
3. Vérifier que : $V'(x)=4{\cdot}(x-2)(3{\cdot}x-20)$
   Etudier son signe sur l'intervalle $[0\,;5]$.
4. Construire le tableau de variations de la fonction V sur l'intervalle $[0\,;5]$.

Exercice 73

Un fabricant de boîtes en carton dispose, pour sa fabrication, de rouleaux donnant une bande de carton de $32\,cm$ de large dans laquelle il trace et découpe les patrons de boîtes avant de les coller. Il dispose ses patrons de la manière indiquée dans le dessins ci-dessous :



Les boîtes, en forme de pavés droits, comportent deux faces carrées de $x\,cm$ de côté, munies de deux languettes de $1\,cm$ de large pour le collage, et quatre autres faces dont les dimensions en cm sont x et y, ainsi qu'un rabat pour la fermeture.

1. Le fabricant utilise toute la largeur de la bande de carton ; on a donc : $y=30-2{\cdot}x$.

a. Expliquer pourquoi on a nécessairement : $0<x<15$.

b. Démontrer que le colume V, en cm^3, de la boîte est donné par la formule :

$$V = 30{\cdot}x^2 - 2{\cdot}x^3$$

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;15]$ par :

$$f(x) = 30{\cdot}x^2 - 2{\cdot}x^3$$

a. Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,15]$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur cet intervalle

3. a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs :

x	1	2	4	6	8	10	12	14	15
$f(x)$									

b. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra $1\,cm$ comme unité en abscisses et $1\,cm$ pour $100\,cm^3$ en ordonnées.

4. a. Pour quelle valeur de x, le volume V est-il maximun? Quelle est alors la valeur de ce volume? Quelle particularité présente la boîte dans ce cas là?

b. Le fabricant veut que la boîte obtenue ait un volume de $500\,cm^3$ et que x soit inférieur à 10.
Déterminer à l'aide du graphique, la valeur de x qu'il doit choisir.
Vérifier pqr le clalcul puis calcuer la valeur de y correspondante.

Exercice 74

On considère un jeu de boules comme le jeu de pétanque par exemple. Un joueur lance une boule et on s'intéresse ici à la trajectoire de la boule.

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$g(x) = -x^2 + 1{,}5{\cdot}x + 1$$

Où :

- x est le temps écoulé, en seconde, à partir de l'instant où la boule quitte la main du lanceur ;
- $g(x)$ représente, en mêtres, la distance *(verticale)* séparant le sol de la voule après x secondes écoulées

1. La fonction g est représentée par une partie de la coure donnée en annexe.
Repasser en couleur la courbe représentative $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g sur la feuille d'annexe.

2. a. Calculer $g(0)$. Décrire par une phrase ce que représente le point d'abscisse 0.

b. Calculer $g(1)$. Décrire par une phrase ce que représente le point d'abscisse 1.

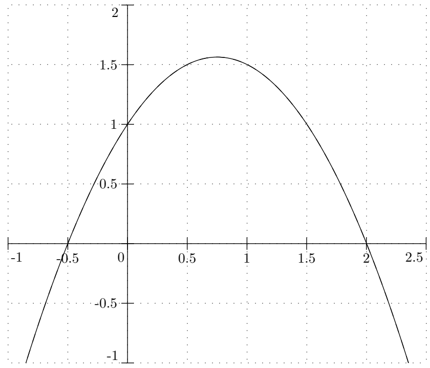
3. Calculer $g'(x)$, g' désignant la dérivée de la fonction g.

4. a. Rechercher le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x, $x\in[0\,;2]$.

b. En déduire le tableau complet des variations de la fonction g.

c. En explicitant la méthode utilisée, indiquer à quel instant la boule atteint sa hauteur maximale.

d. En explicitant la méthode utilisée, indiquer à quel instant la boule touche le sol.



Exercice réservé 89

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{10}{\cdot}x^3 - 6{\cdot}x^2 + 120{\cdot}x \quad ; \quad g(x) = 40{\cdot}x.$$

1. a. Calculer le nombre dérivé $f'(x)$ et vérifier que :

$$f'(x) = \frac{3}{10}{\cdot}(x-20)^2.$$

b. Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c. Calculer $f(10)$, $f(20)$ et $f(40)$.

2. La courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentative de la fonction f est tracée sur la feuille annexe que l'on remettra avec la copie.

a. Déterminer une équation de la tangente T_A à courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point A d'abscisse 10.

b. Tracer sur la feuille annexe la courbe $(\mathscr{C}_g)$ représentative de la fonction g.

c. Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$, la courbe $(\mathscr{C}_g)$ et la droite T_A se coupent au point d'abscisse 40. En déduire le tracé de la tangente T_A que l'on réalisera sur la feuille annexe.

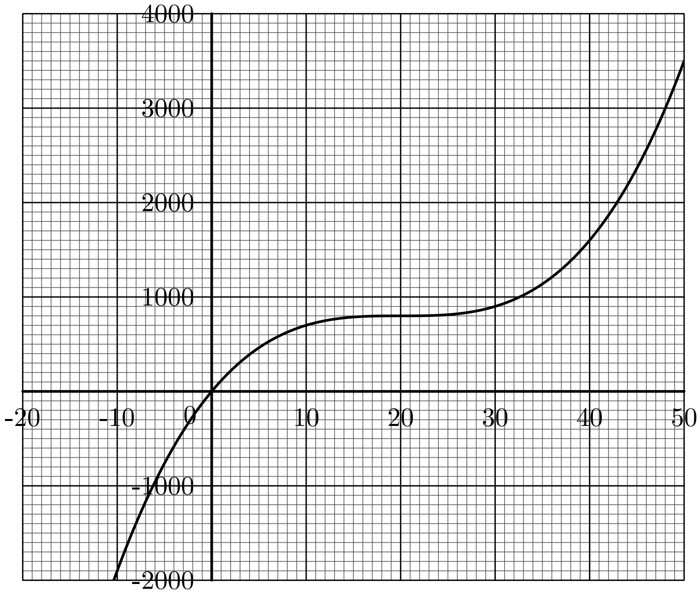
Partie B

Le coût exprimé en euros d'une production est fonction du nombre d'unités x fabriquées est égal à $f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la partie A.

1. Montrer que pour x unités produites et vendues 40 euros l'unité, le bénéfice en euros s'exprime par $g(x)-f(x)$.

2. a. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sur l'intervalle $\big[0\,;45\big]$. On fera les traits de contructions utiles et on vérifiera que les valeurs entières lues sont solutions.

b. Déterminer l'intervalle auquel doit appartenir le nombre d'unités fabriquées x pour que l'entreprise soit bénéficiaire.



Exercice 78

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = 54 \cdot \left(x^3 - 2 \cdot x^2 + x\right)$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.

1. a. Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.

   b. Vérifier que : $f'(x) = 54 \cdot (3 \cdot x - 1)(x-1)$ pour tout x de l'intervalle $[0\,;1]$.

   c. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.

2. Donner le maximum de f sur l'intervalle $[0\,;1]$. Pour quelle valeur de x est-il atteint?

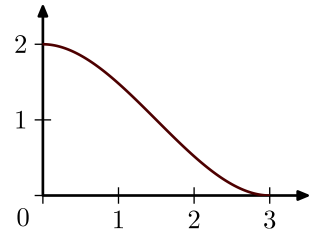
3. Recopier et compléter le tableau suivant par les valeurs de $f(x)$ arrondies à 0,1 près.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$		6,9								

4. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur la feuille de papier millimétré jointe, en prenant pour unités graphiques $10\,cm$ en absisse et $1\,cm$ en ordonnée.

Exercice 98

Une entreprise souhaite fabriquer, pour de jeunes enfants, des toboggans dont le profil a l'allure de la courbe ci-contre.



Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$. On prendra $3\,cm$ pour unité graphique.

L'objet de l'exercice est de modéliser ce profil à l'aide de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ vérifiant les conditions suivantes :

- La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $A(0\,;2)$ et $B(3\,;0)$;
- La courbe $\mathscr{C}$ admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie 1

1. a. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^2 + 2$$

   Etudier les variations de la fonction f *(on demande pas l'étude des limites)*.

   b. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par :

   $$g(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 3$$

   Etudier les variations de la fonction g *(on ne demande pas l'étude des limites)*.

2. On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.

   a. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ passent par le point $K\left(1\,;\frac{4}{3}\right)$ et ont la même tangente T en ce point.

   b. Tracer sur un même graphique, la droite T, la partie de $\mathscr{C}_f$ correspondant aux points d'abscisses comprises entre 0 et 1, et la partie de $\mathscr{C}_g$ correspondant aux points d'abscisses comprises entre 1 et 3.

La courbe obtenue en réunissant les deux parties de courbes est une représentation au problème posé.

Partie 2

Le bureau d'étude a établi que l'on pouvait également modéliser le profil du toboggan à l'aide d'une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{4}{27} \cdot x^3 - \frac{2}{3} \cdot x^2 + 2$$

1. Démontrer que la fonction h vérifie les conditions (1) et (2).

2. Déterminer les coordonnées du point de $\mathscr{C}_h$ d'abscisse 1 et le coefficient directeur de la tangente en ce point.

2. Autres fonctions :

Exercice 111

On considère un segment $[AB]$ de longueur 10 centimètres et un point M de ce segment, différent de A et B. Les points N et P sont tels que $AMNP$ est un carré.

L'objectif de l'exercice est de déterminer le point M du segment $[AB]$ pour lequel la distance BN est minimale.

Les distances sont exprimées en centimètres.

1. On pose : $AM = x$.

   a. Faire une figure.

   b. Déterminer l'intervalle des valeurs possibles pour x.

   c. Déterminer en fonction de x la distance BM.

d. Déterminer en fonction de x la distance BN.
(On rappelle le théorème de Pythagore : dans un triangle ABC rectangle en A, on a $BC^2=AB^2+AC^2$)

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par : $f(x)=\sqrt{2{\cdot}x^2-20{\cdot}x+100}$

La fonction dérivée f' de f est définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par : $f'(x)=\dfrac{2x-10}{\sqrt{2{\cdot}x^2-20{\cdot}x+100}}$.

a. Répondre aux questions suivantes

i. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;10]$

ii. Montrer que la fonction f admet un minimum sur l'intervalle $[0\,;10]$ que l'on précisera.

b. Répondre aux question suivantes :

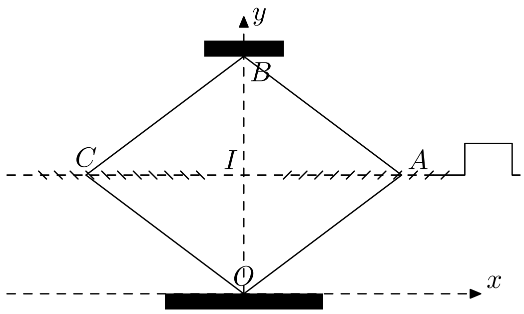
i. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité un centimètre.

ii. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=8$. On fera apparaître les traits de construction utiles et on donnera des valeurs approchées des solutions lues.

3. En utilisant les résultats précédents, déterminer le point M du segment $[AB]$ popur lequel la distance BN est minimale.

Exercice réservé 71

La figure ci-dessous est le schéma d'un cric de voiture.



Celui-ci est constitué d'un losange déformable $OABC$, le point O étant le point d'appui sur le sol et le point B étant le point par lequel la voiture est soulevé.

Lorsqu'on tourne la manivelle M, les écrous A et C se rapprochent *(ou s'éloigne)*, ce qui fait monter *(ou descendre)* l'appui B, selon l'axe (Oy).

On donne : $OA=OC=AB=BC=25\,cm$

Dans le repère orthonormé $(O\,;\,x\,;\,y)$ d'unité un centimètre, x_A désigne l'abscisse du point A et varie de 0 à 25.
L'ordonnée du point B est notée y_B :

- Pour $x_A=0$, on a : $y_B=50$;
- Pour $x_A=25$ on a : $y_B=0$.

Pour le cric fonctionne correctement, il faut :
$x_A>6$; $y_B>10$.

1. a. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle AIB, trouver une relation entre x_A et y_B et vérifier que : $y_B=2{\cdot}\sqrt{625-x_A^2}$.

b. En utilisant la relation trouvée à la question a., calculer la valeur de x_A lorsque y_B est égal à 10, puis la valeur de y_B lorsque x_A est égal à 6.

2. On considère la fonction f définie pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;25]$ par : $f(x)=2{\cdot}\sqrt{625-x^2}$.

On admettra qu'une fonction de type $\sqrt{u}$, où u est un fonction définie et positive sur un intervalle, a le même sens de variation que u sur cette intervalle.

a. Déterminer la dérivée u' de la fonction u définie sur l'intervalle $[0\,;25]$ par $u(x)=625-x^2$. Etudier le signe de $u'(x)$ quand x varie entre 0 et 25.
En déduire le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\,;25]$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera les valeurs de la fonction aux bornes de l'intervalle.

c. tracer la courbe (Γ) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique $0{,}5\,cm$. *(On précisera sur la courbe les points d'abscisses 18, 20, 22 et 24.)*

3. a. Calculer l'augmentation q_1 de la hauteur y_B, quand l'absicce x_A passe de 24 à 22. Vérifier ce résultat sur la courbe (Γ) en faisant apparaître les constructions effectuées.

b. Evaluer, à l'aide du graphique en faisant apparaître les traits de constructions utiles, l'augmentation q_2 de y_b lorsque x_A passe de 22 à 20, puis l'augmentation q_2 de y_B lorsque x_A passe de 20 à 18.

c. Lorsqu'on actionne la manivelle de façon régulière, peut-on dire que la voiture monte à une vitesse constante? Justifier votre réponse.

Exercice 84

On veut résoudre, dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, l'équation : $x^3-2{\cdot}x^2-4{\cdot}x+5=0$.

A - Méthode graphique

1. a. Vérifier que le nombre 2 n'est pas solution de l'équation.

b. Montrer que, pour $x\neq2$, l'équation $x^2=\dfrac{4{\cdot}x-5}{x-2}$ est équivalent à l'équation $x^3-2{\cdot}x^2-4{\cdot}x+5=0$

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x différent de 2 par $f(x)=\dfrac{4{\cdot}x-5}{x-2}$. Sa courbe représentative H dans un repère orthonormé est donnée en annexe à rendre avec la copie.

a. Par lecture graphique, indiquer le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$.

b. Déterminer la dérivée f' de f puis justifier le résultat lu dans la question précédente.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2$. Tracer sa courbe représentative P dans repère utilisé pour H.

4. Par lecture graphique, déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3-2x^2-4x+5=0$.
Donner la valeur exacte ou une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune de ces solutions.

B - Méthode algébrique

1. Vérifier que, pour tout réel :

$$(x-1)(x^2-x-5)=x^3-2{\cdot}x^2-4{\cdot}x+5.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=x^2-x-5$.

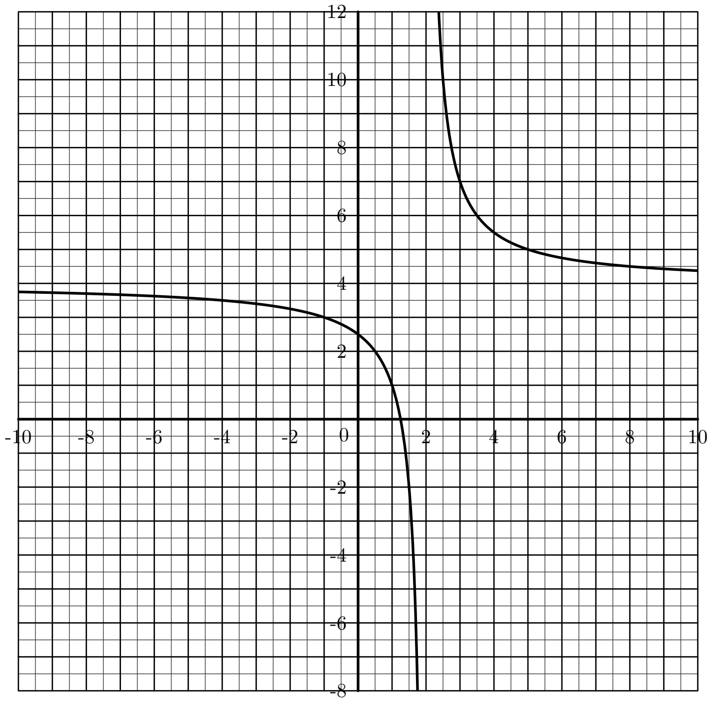
a. Etudier le sens de variation de h.

b. Montrer que $h\left(\frac{1}{2}\right)$ est la valeur minimun prise par h.

c. On pose : $x=\frac{1}{2}+u$. Exprimer $h\left(\frac{1}{2}+u\right)$ en fonction de u ; factoriser l'expression obtenue.

d. En déduire les valeurs du réel x pour lesquelles $h(x)=0$.

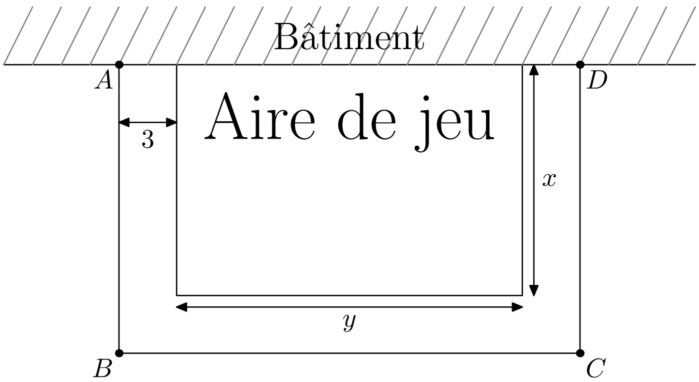
3. Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$x^3-2{\cdot}x^2-4{\cdot}x+5=0$.



3. Exercice de modélisation :

Exercice réservé 96

On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire de $450\,m^2$. De plus, on souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à $10\,m$. Cet espace de jeu est entouré sur trois côtés d'une allé de $3\,m$ de large comme l'indique le croquis ci-dessous.



L'ensemble est clôturé sur les trois côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.

On s'intéresse à la longueur L de la clôture :
$L=AB+BC+CD$.
On note x et y les dimensions en mètres de l'aire de jeu.

1. a. Démontrer que $y=\frac{450}{x}$, puis justifier que x appartient à l'intervalle $[10\,;45]$.

   b. Exprimer la longueur L en fonction de x.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[10\,;45]$ par :
$f(x)=2{\cdot}x+12+\frac{450}{x}$

   a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

   b. Démontrer que, pour tout x appartenant à $[10\,;45]$, $f'(x)$ a le même signe que (x^2-225). En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

   c. Dresser le tableau de variations de f.

3. Déduire de l'étude précédente les dimensions à donner à l'aire de jeu pour que la longueur de la clôture soit la plus petite possible. Quelle est alors cette longueur?

4. Tangentes :

Exercice 77

Un rectangle $ABCD$ a pour périmètre $10\,cm$.

Partie A

Dans cette partie, on pose $AB=x$ *(en cm)*

1. Dans quel intervalle fermé le réel x peut-il varier?

2. Exprimer l'aire $S(x)$ du rectangle $ABCD$ en fonction de x.

Partie B

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^2+5{\cdot}x$.

1. En faisant appel à sa fonction dérivée f', dresser le tableau de variations de f.

2. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle $ABCD$ est maximale.

3. a. Dans le plan muni d'un repère orthonormé *(unité : 2 cm sur chaque axe)*, tracer la courbe $\mathscr{C}$ représenta-

tive de f sur l'intervalle $[0\,;5]$.

b. Sur la même figure qu'au 3. a. tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

255. Exercices non-classés :

Exercice 1984

On considère la fonction : $f:\ x\mapsto\sqrt{-2{\cdot}x^2+7{\cdot}x-3}$

1. Montrer l'égalité suivante :

$$(2{\cdot}x-1)(3-x)=-2{\cdot}x^2+7{\cdot}x-3$$

2. a. Etudier le signe de $-2{\cdot}x^2{+}7{\cdot}x{-}3$ en fonction de la valeur de x.

b. En déduire l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction f.

3. Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.

4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice réservé 1990

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[20\,;150]$ par :

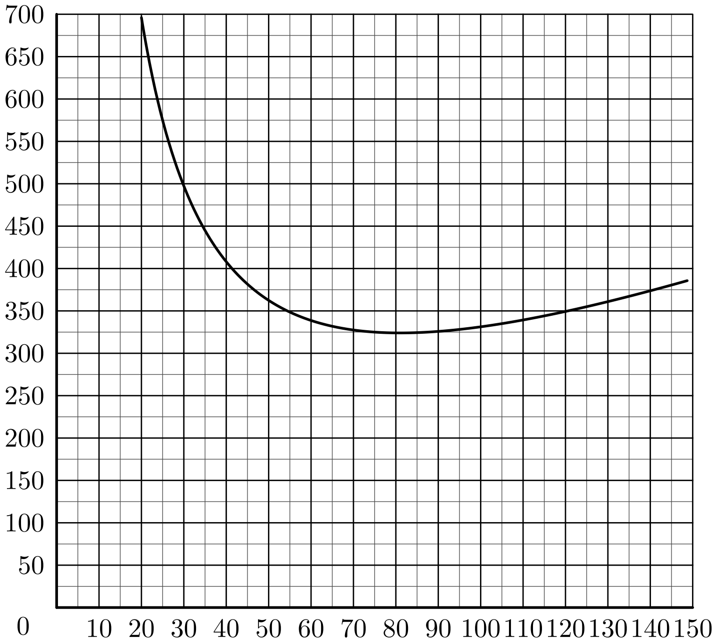
$$f(x)=2{\cdot}x+\frac{13\,122}{x}$$

1. Montrer que sur l'intervalle $I: f'(x)=\dfrac{2}{x^2}{\cdot}(x{-}81)(x{+}81)$

En déduire que sur l'intervalle I :
$f'(x)$ est du signe de $(x{-}81)$.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I.

3. La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous :



Déterminer avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée des solutions de l'équation : $f(x)=350$ *(le graphique n'est pas à rendre avec la copie)*

Partie B

Un responsable de club doit organiser un déplacement. Le trajet total est de $600\,km$ et le club dispose d'un bus dont la consommation en carburant, exprimée en litres par heure, est donnée par $\left(5+\dfrac{v^2}{300}\right)$ où v représente la vitesse moyenne du véhicule en kilomètres par heure. Le prix du litre de carburant est de 1 € et le chauffeur est payé 16,87 € par heure.

1. On désigne par t la durée totale du trajet, exprimée en heures.

a. Exprimer t en fonction de v.

b. Démontrer que le coût du carburant, exprimé en euros, pour le trajet total est égal à :
$$\frac{3\,000}{v}+2{\cdot}v$$

c. Montrer que le coût du transport, exprimé en euros, est égal à $f(v)$.

2. En utilisant la partie A :

a. Donner la vitesse moyenne à laquelle doit rouler le bus pour que le coût du transport soit minimal. Quel est alors ce coût?

b. Le responsable du club dispose d'au plus 350 € pour le transport. Pour des raisons de sécurité, la vitesse moyenne du bus ne peut dépasser 90 kilomètres par heure. Déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la vitesse moyenne du bus, pour que le coût du transport ne dépasse pas 350 €.

