Term L spé/Les suites

1. Revisions :

Exercice réservé 37

Voici les 7 premiers termes de quatre suites :

1. 13 ; 14,5 ; 16 ; 17,5 ; 19 ; 20,5 ; 22
2. 300 ; 278 ; 266 ; 254 ; 244 ; 232 ; 220
3. 2 ; 6 ; 18 ; 44 ; 132 ; 396 ; 1188
4. 0,0625 ; 0,125 ; 0,25 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 4

Déterminer parmi ces suites :

- celles qui peuvent être de nature arithmétique ou géométrique.
- celles qui ne sont ni arithmétique ni géométrique.

Exercice 49

Une entreprise propose à un futur employé deux types de contrats :

- *Formule 1* : le salaire de départ sera de 1200 € et une augmentation de 50 € sera appliquée à son salaire chaque année.
- *Formule 2* : le salaire de départ sera de 1100 € et une augmentation de 5 % sera appliquée à son salair chaque année.

On note u_n votre salaire du premier type n année après votre commencement, u_n votre salaire avec la formule 1 et v_n avec la formule 2.

1. Déterminer la valeur de u_n et v_n en fonction de l'indice n.
2. Que peut-on dire de la croissance de ces deux suites?
3. a. Compléter le tableau ci-dessous à l'aide des 10 premiers termes de chacune des suites.

   b. Déterminer à partir de quand il est préférable de choisir la seconde formule.
4. A l'aide d'un logiciel tableur, tracer les courbes de ces deux suites et retrouver votre résultat
5. Toujours à l'aide du même logiciel, donner la formule avec laquelle le futur employé aura gagné le plus d'argent après 10 ans? 15 ans? 20 ans?

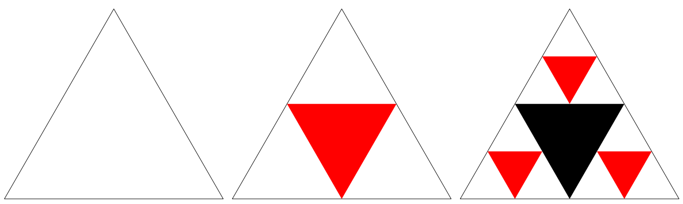
	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	1		
3	2		
4	3		
5	4		

2. Etude de suites :

Exercice 39

On divise un triangle équilatéral en quatre triangles équilatéraux obtenus en traçant les segments joignant les milieux des côtés et on noircit le triangle central.

Chaque triangle non noirci est alors divisé en quatre triangles équilatéraux selon le même procédé et on noircit le triangle central comme précédemment.



1. a. Réaliser la $3^{\text{ème}}$ étape en partant d'un triangle équilatéral de côté 16 cm. Combien de triangles noircis ont-ils été rajouté?

   b. Combien de triangles noircis seront-ils rajoutés à la quatrième étape?
2. On note T_n le nombre de triangles noircis rajoutés à la n-ième étape où n est un entier supérieur ou égal à 1. La suite (T_n) ainsi définie, est une suite géométrique de raison 3.

   a. Donner la valeur de T_1, T_2, T_3.

   b. Exprimer T_n en fonction de n. Vérifier les résultats trouvés à la question 1..
3. Calculer le nombre total de triangles noircis après la dixième étape.

3. Suite arithméticoGéométrique :

Exercice réservé 50

On souhaite étudier la suite (u_n) de premier terme $u_0=5$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + 4$$

On pose : $v_n = u_n - 6$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et sa raison.
2. Exprimer v_n en fonction du rang n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 61

On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 8 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot u_n - 5$$

On souhaite déterminer l'expression de (u_n) en fonction de son rang :

1. a. On défini la suite (v_n) par : $v_n = u_n + 10$.
   Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et sa raison.

   b. Etablir l'expression du terme v_n en fonction du rang n.
2. En déduire une expression du terme u_n en fonction de n.

Exercice réservé 58

Au 1er janvier 2004, j'ai une somme u_0 de 1 000 € sur mon compte rémunéré en intérêts composés à 2 % par an.

On note : $u_0 = 1000$.
Les intérêts sont versés chaque année le 31 décembre.
Je décide qu'à partir de 2005 de retirer chaque année 100 € le 1er janvier.
J'appelle u_n le solde au 1er janvier de l'année $(2004+n)$ après mon retrait de $100e$.

1. a. Calculer les soldes u_1 et u_2 de ce compte.

   b. La suite de terme général u_n est-elle arithmétique? Est-elle géométrique?

   c. Montrer que pour tout n entiern naturel :
   $u_{n+1} = 1{,}02\cdot u_n - 100$
2. a. On pose, pour tout n entier naturel, $v_n = u_n - 5\,000$. Calculer v_0.

   b. Montrer que pour tout n : $v_{n+1} = 1{,}02\cdot v_n$

   c. Exprimer le terme général v_n de la suite (v_n) en fonction de n.
3. a. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   b. Calculer u_{10} en arrondissant à 0,01 près.

   c. A partir du 1er janvier de quelle année mon compte aura-t-il un solde négatif pour la première fois?

Exercice 59

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=8$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot u_n - 5.$$

1. a. Calculer les termes u_1 et u_2

   b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? On justifiera les réponses.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n + 10$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et calculer le premier terme v_0.

   b. Exprimer le terme général v_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n)

Exercice 42

Partie A : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme $u_0=800$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0{,}6\cdot u_n + 400.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On définit une autre suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ en posant pour tout entier naturel n, : $v_n = 1000 - u_n$.

   a. Calculer les trois premiers termes de cette suite (v_n).

   b. Montrer que cette suite (v_n) est géométrique et en déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. a. Déduire des résultats précédents que :
   $u_n = 1000 - 200\times(0{,}6)^n$.

   b. Quelle est la limite de la suite (u_n)?

Partie B : application

Le président d'une association culturelle constate que chaque année l'association garde 60 % de ses anciens adhérents et que 400 personnes nouvelles adhèrent. On suppose que ces données chiffrées restent les mêmes au fil des ans.
A la création de cette association, en janvier 2001, il y avait 800 adhérents.

1. Calculer le nombre d'adhérents en janvier 2002.
2. Quel sera le nombre d'adhérents en janvier 2003?
3. En quelle année verra-t-on pour la première fois l'effectif de l'association dépasser 990?

Exercice 40

Un directeur de société engage un jeune technicien et lui propose deux types de rémunération à partir du premier janvier 2000.

1. Premier type de rémunération.

   Pour cette première année 2000, il percevra 22 400 euros, puis une augmentation annuelle constante de 750 euros. On note u_0 le salaire en euros pour l'année 2000, u_1 le salaire en euros pour l'année 2001, et d'une manière général u_n le salaire en euros pour l'année $2000+n$ *(pour n entier naturel)*

   a. Calculer les salaires annuels u_1 pour l'année 2001 et u_2 pour l'année 2002.

   b. Préciser la nature de la suite (u_n) en indiquant sa raison

c. Montrer que : $u_n = 22400 + 750 \cdot n$

2. **Deuxième type de numération**

Pour l'année 2000, il percevra aussi 22 400 euros, mais ensuite chaque année une augmentation de 3% par rapport à l'année précédente. Dans ce cas, on note v_n le montant en euros de la rémulération pour l'année $2000+n$ *(pour n entier naturel)*

a. Calculer les salaires annuels v_1 pour l'année 2001 et v_2 pour l'année 2002.

b. Montrer que $v_{n+1} = 1{,}03 \cdot v_n$ pour tout n. En déduire la nature de la suite (v_n).

c. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3. **Comparaison**

a. Calculer dans chacun des deux cas le salaire annuel pour l'année 2008.

b. Pour cette année 2008, préciser le type de rénumération le plus avantageux.

Exercice 41

Partie A : Etude d'une suite

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1\,500\,000 \\ u_{n+1} &= 1{,}013 \cdot u_n + 1\,300 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2

2. On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n + 100\,000$

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n ;
$v_{n+1} = 1{,}013 \cdot v_n$.
En déduire la nature de la suite (v_n).

c. Déterminer v_n en fonction de n.
En déduire que : $u_n = 1\,600\,000 \cdot (1{,}013)^n - 100\,000$.

d. Calculer u_{18}. Le résultat sera arrondi à l'entier le plus proche.

Partie B : Application

Pour cette partie, tous les résultats numériques seront arrondis à l'entier le plus proche

Une étude de la population d'un département laisse apparaître les indormations suivantes :

- la population est estimée à 1 500 000 habitants en 2002
- le taux d'accroissement naturel est de 1,3% par an,
- le flux migratoire *(différence entre le nombre de personnes entrant dans le département et le nombre de personnes en sortant)* est estimé à 1300 habitants par an.

On estime que ces données resteront constantes au fil des ans

1. Déterminer la population estimée de ce département en 2003 et 2004

2. On pose $w_0 = 1\,500\,000$. Pour tout entier naturel n, on désigne par w_n une estimation du nombre d'habitants de ce département durant l'année $(2002+n)$

a. Vérifier que $w_{n+1} = 1{,}013 \cdot w_n + 1300$ pour tout entier naturel n.

b. En utilisant la partie A, déduire une estimation de la population de ce département en 2020.

Exercice 64

Deux amis, Agnès et bénédicte gagnent 2 000 € à un jeu. Elles partagent cette somme en deux parts égales.

Partie A

Agnès, qui a déjà 3 000 € d'économies, ajoute ses 1 000 € à ses économies et place le total sur un livret d'épargne qui rapporte 3,5% d'intérêt par an *(intérêt composés)*.

On note u_0 le capital placé *($u_0 = 4000$)*, u_1 le capital acquis au bout d'un an, et plus généralement u_n le capital acquis au bout de n années.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

3. Exprimer le terme général u_n en fonction de n.

4. Quel sera le capital obtenu au bout de 6 ans ? *(On arrondira le résultat au centime)*

Partie B

Bénédicte choisit un compte épargne dont le taux mensuel est de 0,25 % et choisit d'y ajouter à la fin de chaque mois la somme de 50 €. Les intérêts acquis sont capitalisés à la fin de chaque mois.

On note v_0 le capital placé *($v_0 = 1000$)*, v_1 le capital acquis au bout d'un mois, et plus généralement v_n le capital acquis au bout de n mois.

1. Calculer v_1 et v_2 *(on arrondira le résultat au centime)*. Vérifier que : $v_3 = 1157{,}89$.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

3. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n + 20000$.

a. Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 1,0025. Préciser w_0 et exprimer le terme général w_n en fonction de n. En déduire v_n en fonction de n.

b. Calculer le capital acquis par Bénédicte au bout de 6 ans *(soit 72 mois)*. *(On arrondira le résultat au centime)*

Exercice réservé 43

la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 800$ et la relation de récurrence :
$u_{n+1} = 0{,}6 \cdot u_n + 400$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. On définit une autre suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ en posant pour tout entier naturel n : $v_n = 1000 - u_n$.

a. Calculer les trois premiers termes de cette suite (v_n).

b. Montrer que cette suite (v_n) est géométrique et en déduire l'expression de v_n en fonction n.

3. a. Déduire des résultats précédents que :
$u_n = 1000 - 200 \times (0{,}6)^n$

b. Quelle est la limite de la suite (u_n)?

Exercice 52

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0=0{,}7$ et par la relation de récurrence :

$u_{n+1}=2\cdot u_n-0{,}4$ *(n entier naturel)*

1. Calculer u_1, u_2, u_3.

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout n entier naturel par : $v_n=u_n-0{,}4$.

   a. Calculer v_0.

   b. Montrer que : $v_{n+1}=2\cdot v_n$

   c. En déduire la nature de la suite.

   d. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Partie B

La règle de Titius-Bose *(connue vers 1770)* permet de retrouver approximativement la distance au Soleil de la plupart des planètes du système solaire. Pour cela, on prend comme unité la distance de la Terre au Soleil qui vaut environ 150 millions de kilomètres. Cette distance est appelée unité astronomique *(u.a.)*. Ainsi, $1\,u.a.\approx 15\times10^7\,km$. En écriture moderne, la loi de Titius-Bode s'exprime par la formule suivante :

$u_n=0{,}4+0{,}3\times2^n$

où pour un planète donnée u_n est la distance au Soleil de cette planète (en u.a.) et n est le rang de la planète, défini dans le tableau ci-dessous :

Planète	Vénus	Terre	Mars	(Cérès)*	Jupiter	Saturne	Uranus
Rang n	0	1	2	3	4	5	6

(*) La lacune observée entre les orbites de Mars et Jupiter fut comblée en 1801 par la découverte de la planète Cérès, puis plus tard de milliers d'astéroïdes

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n							

2. a. Calculer la distance approximative au Soleil de la planète Uranus *(on donnera le résultat en millions de kilomètres)*.

   b. Calculer le rang de la planète dont la distance approximative au Soleil est 780 millions de kilomètres. De quelle planète s'agit-il?

4. Somme des termes et limites de suites :

Exercice réservé 53

Urbain et Valérie ont obtenu le même diplome la même année et ont été embauchés, tous les deux, le 1er janvier 2000, dans deux entreprises différentes, sous deux contrats à durée indéterminée différents :

- la première année, le salaire annuel net d'Urbain s'élève à 14000 € et ce salaire augmente de 4 % chaque année au 1er janvier par rapport au salaire annuel précédent.
- Valérie débute avec un salaire annuel net de 14 500 € et ce salaire augmente de 500 € chaque année au 1er janvier.

On appelle u_n le salaire annuel net d'Urbain en euros pour l'année $(2000+n)$ et v_n celui de Valérie.

Avec ces notations, on a : $u_0=14\,000$; $v_0=14\,500$.

1. a. Calculer les termes u_1 et u_2.

   b. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison

   c. Exprimer le terme général u_n en fonction de n.

2. a. Calculer les termes v_1 et v_2.

   b. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on donnera la raison.

   c. Exprimer le terme général v_n en fonction de n.

3. Calculer $u_0+u_1+\dots+u_8$ et $v_0+v_1+\dots+v_8$.
   Interpréter ces résultats.
   La situation est-elle la même à la fin de l'année suivante?

Exercice 60

Gaston hésite entre deux contrats d'embauche pour lesquels le salaire du premier mois est de 1600 euros.

- Contrat n^o1 : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire mensuel augmente de 10 euros.
- Contrat n^o2 : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire augmente de 0,6% par rapport au mois précédent.

1. Pour chacun des deux contrats, déterminer la nature de la suite des salaires mensuels, préciser le premier terme et la raison.

2. Pour chacun des deux contrats, calculer le total des salaires perçus pendant la première année.

3. A l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel mois le salaire mensuel correspondant au contrat n^o2 devient supérieur à celui du contrat n^o1. Justifier correctement la réponse.

On rappelle :

- La somme S des n premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q $(q\neq1)$ est :
$$S=u_1+u_2+\dots+u_n=u_0\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$
- La somme S' des n premiers termes d'une suite arithmétique (v_n) de raison r :
$$S'=v_1+v_2+\dots+v_n=n\cdot v_1+r\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

Exercice 44

Dans cet exercice, les deux parties sont indépendantes.
Les résultats demandés seront arrondis au centième.

Pour effectuer un achat dont le coût s'élève à 1 600 € un client a le choix entre deux formes de paiement.

1. Dans cette question, le premier versement s'élève à 150 € et on effectue une suite de versement notée (a_n) qui vérifie $a_0 = 150$ et, pour tout entier n :
$a_{n+1} = 0{,}95 \cdot a_n + 100$
   a. Calculer le deuxième versement a_1 et le troisième a_2.
   b. Montrer qu'avec cinq versement, la somme de 1 600 € est remboursée.
2. Dans cette question, le premier versement s'élève à 200 €, puis chaque versement est égal au précédent diminué de 5%

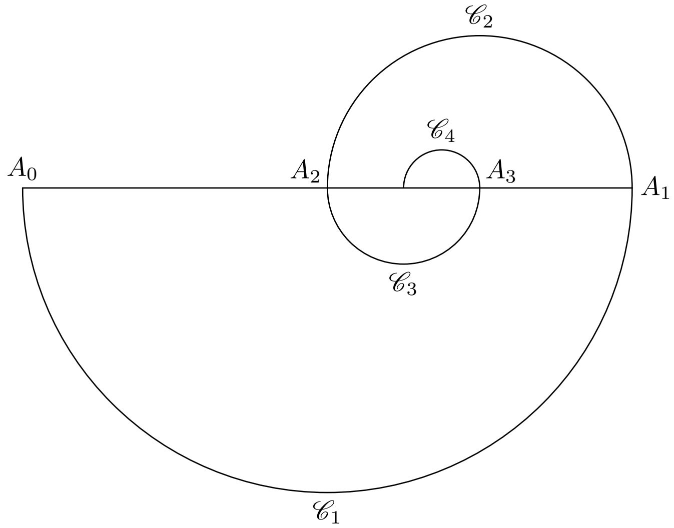
   On note (b_n) la suite des versements avec $b_0 = 200$.
   a. Vérifier que $b_1 = 190$ et calculer b_2 et b_3.
   b. Exprimer le terme b_{n+1} en fonction de b_n.
   En déduire la nature de la suite (b_n) et donner l'expression du terme général b_n en fonction de n
   c. Calculer en fonction de n la somme S_n égale à :
   $b_0 + b_1 + \cdots + b_n$
   des $(n+1)$ premiers versements. Calculer les sommes S_8 et S_9 et interpréter le résultats

Exercice réservé 30

Un paysagiste doit créer dans un jardin une spirale plantée d'arbustes.

Il veut connaître la longueur de cette spirale pour évaluer le nombre d'arbustes à planter.

Voici le schéma qu'il dresse :



Cette spirale est constituée de demi-cercles construits de la manière suivante :

- le diamètre $[A_0A_1]$ du demi-cercle $\mathscr{C}_0$ a pour milieu A_2 ;
- le diamètre $[A_1A_2]$ du demi-cercle $\mathscr{C}_1$ a pour milieu A_3 ;

Ainsi de suite on construit les demi-cercles $\mathscr{C}_n$ *(n est un entier naturel)*

L'unité de longueur est le mètre. On donne $A_0A_1 = 100$.

1. On note ℓ_n la longueur du demi-cercle $\mathscr{C}_n$.
   a. Calculer ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3.
   b. Exprimer ℓ_{n+1} en fonction de ℓ_n. Indiquer la nature de la suite (ℓ_n) en précisant sa raison.
   c. Montrer que, pour tout entier n : $\ell_n = 50 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
2. Le paysagiste décide de ne tracer que les huit demi-cercles $\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3, \ldots, \mathscr{C}_7$.

   On appelle $\mathscr{L}$ la longueur de la spirale obtenue avec ces huit demi-cercles.
   a. Calculer : $\mathscr{L} = \ell_0 + \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_7$.
   Donner l'arrondi de $\mathscr{L}$ à 10^{-1}.
   b. Sachant que le paysagiste doit planter un arbuste tous les cinquante centimètres à partir de A_0, en déduire le nombre d'arbustes à planter.

Formule : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$

5. Comportement asymptotique :

Exercice 45

1. On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme 20 et de raison -1.
   a. Exprimer u_n en fonction de n.
   b. Donner l'expression de la somme des n premiers termes.
   c. En déduire la limite suivante :
   $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
2. On considère une suite géométrique (v_n) de premier terme 20 et de raison 0,6.
   a. Exprimer v_n en fonction de n.
   b. Donner l'expression de la somme des n premiers termes de la suite (v_n).
   c. En déduire la limite suivante :
   $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

Exercice réservé 51

On considère la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = -\frac{3}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}\cdot u_n - 1 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. a. Calculer u_1 et u_2.

   b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique? géométrique?

2. On pose $v_n = u_n + 3$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique ; déterminer sa raison et son premier terme.

3. Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

4. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. On pose : $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$
   Exprimer s_n en fonction de n et en déduire $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} s_n$.

Exercice réservé 46

Soit OA_0A_1 un triangle rectangle isocèle en A_1.

Extérieurement au triangle OA_0A_1, on construit sur le côté $[OA_1]$ un triangle OA_1A_2 rectangle isocèle en A_2.

1. On pose $OA_0 = 1$. Montrer que : $OA_1 = A_0A_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2. On itère le procédé et on trace une suite de triangles rectangles isocèes. Si $OA_{n-1}A_n$ est un triangle rectangle isocèle en A_n, on trace alors extérieurement à celui-ci, le triangle OA_nA_{n+1} rectangle isocèle en A_{n+1}.
   Etablir que : $OA_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}OA_n$

Dans la suite de l'exercice, on note (u_n), la suite telle que $u_0 = OA_0$, $u_1 = OA_1$, ... , $u_n = OA_n$

3. a. Déduire de la question précédente que la suite (u_n) est une suite géométrique et la caractériser.

   b. On note L_n la longueur de la ligne brisée $OA_0A_1\cdots A_{n-1}A_n$, c'est à dire :
   $$L_n = OA_0 + A_0A_1 + \cdots + A_{n-1}A_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
   Etablir que : $L_n = \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

   En déduire la limite de la suite (L_n) lorsque n tend vers $+\infty$

Formulaire

- Si $0 < b < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$
- Si (v_n) est une suite géomètrique de raison q $(q \neq 1)$ et de premier terme v_0, alors :
  $$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Exercice 54

Il est assez curieux qu'une infinité de termes positifs que l'on ajoute au fur et à mesure puisse donner un résultat fini. Ainsi le Grec Zénon prétendait, au IV$^{\text{ème}}$ siècle avant J.C., démontrer qu'il est impossible d'aller d'un point à un autre car "avant d'atteindre le but, il faut arriver au milieu de la route, puis atteindre le milieu du trajet à parcourir, et ainsi de suite : comme il y a une infinité d'étapes à observer, on ne peut arriver au bout de son voyage".

Les nombres et leurs mystères - **A. Warusfel**

I- Construction de la figure

Construire un segment $[AB]$ puis,

1. le milieu A_0 de $[AB]$,
2. le milieu A_1 de $[A_0B]$,
3. le milieu de A_2 de $[A_1B]$.

II- Utilisation d'une suite numérique :

On construit ainsi une suite de points A_n tels que pour tout n entier supérieur ou égal à 1, A_n est le milieu du segment $[A_{n-1}B]$.
On suppose que $AB = 2$. On pose :

$$d_0 = AA_0 \quad ; \quad d_1 = A_0A_1 \quad ; \quad d_2 = A_1A_2$$

et pour tout entier $n \geqslant 1$: $d_n = A_{n-1}A_n$.

1. On a $d_0 = 1$, calculer d_1 et d_2.

2. On admet que, pour tout entier naturel n :
   $$d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n.$$
   a. En déduire que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   b. Donner l'expression de d_n en fonction de n.

3. On pose : $S_n = d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_n$.

   a. Vérifier que : $S_n = 2\cdot\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.

   b. Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini?

   c. En donner une interprétation géométrique.

Formulaire : Somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q *(avec $q \neq 1$)* :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exercice 66

un globe-trotter a parié de parcourir $5\,000\,km$ à pied.
Il peut, frais et dispos, parcourir $50\,km$ en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de $1\,\%$ tous les jours.

On notera d_n la distance parcourue durant le n-ième jour.

1. Calculer les distances d_1, d_2, d_3 parcourues durant les trois premiers jours.

2. Expliquer pourquoi : $d_{n+1} = 0{,}99\cdot d_n$.
   En déduire la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n en fonction de n.

   a. Calculer, en fonction de n, le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours.
   $$L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$$

   b. En déduire la limite de L_n lorsque n tend verse $+\infty$.
   Le globe-trotter peut-il gagner?

3. A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir $4\,999\,km$

On rappelle que :

- La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est :
$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n\cdot\frac{u_1+u_n}{2}$$
- La somme S' des n premiers termes d'une suite géométrique (v_n) de raison q $(q \neq 1)$ est :
$$S' = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

Exercice 1889

Le service commercial d'un journal a constaté que chaque année, il enregistre 1 000 nouveaux abonnés mais 50 % des anciens abonnés environ ne renouvellent pas leur abonnement.

L'objet de cet exercice est d'étudier l'évolution du nombre d'abonnés si cette situation perdure sachant qu'au cours de l'année écoulée, le journal comptait 4 000 abonnés.
Dans ce but, on considère la suite (U_n) définie par :

$u_0=4$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}5u_n+1$

1. Expliquer pourquoi, pour tout entier $n\geqslant 0$, u_n est une approximation du nombre de milliers d'abonnés au bout de n années.
2. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						

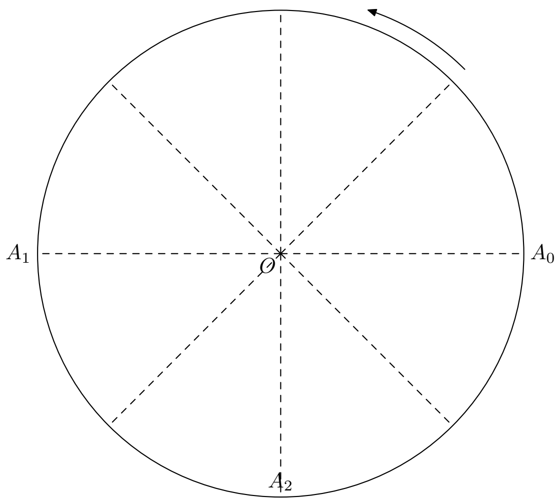
3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :

   Pour tout entier naturel n : $u_n>2$

4. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n=u_n-2$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
   Préciser la valeur de v_0.
   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
5. a. En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer que :
   Pour tout entier naturel n : $u_n=2\cdot\left(1+0{,}5^n\right)$
   b. Quelle est la limite de la suite (u_n)?
   c. Donner une interprétation de cette limite.

Exercice réservé 1891

Un robot miniature se déplace sur un cercle de centre O et de rayon 1 mètre. Il est déposé au point A_0 puis il parcourt le cercle en tournant dans le sens direct *(sens de la flèche sur la figure)*.
Il est décidé que son trajet s'effectuera en plusieurs étapes *(voir figure)*.



1. **Etape 1** : il parcourt le demi-cercle de A_0 à A_1, la distance parcourue est notée d_1.
2. **Etape 2** : il parcourt le quart de cercle de A_1 à A_2, la distance parcourue est notée d_2.
3. **Etape n, avec $n\geqslant 2$** : il parcourt l'arc de cercle allant de A_{n-1} à A_n, la distance parcourue, notée d_n, étant la moitié de celle parcourue à l'étape précédente.

On rappelle que :

- Le périmètre d'un cercle de rayon 1 mètre est égal à 2π mètres.
- $1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$,
  pour tout nombre réel $q\neq 1$.

1. a. Exprimer d_1 et d_2 en fonction de π.
   b. Reproduire la figure, puis placer le point A_3. Justifier que : $d_3=\dfrac{\pi}{4}$.
2. a. Quelle est la nature de la suite (d_n)? Justifier la réponse donnée.
   b. Montrer que, pour tout nombre entier $n\geqslant 1$:
   $$d_n = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$
3. On s'intéresse à la distance totale, notée D_n, parcourue par le robot sur le cercle à la fin de l'étape n.
   a. Calculer D_2.
   b. Démontrer que, pour tout nombre entier $n\geqslant 1$:
   $$D_n = 2\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right].$$
   c. Déterminer la limite de la suite (D_n).
   d. Justifier que, pour tout nombre entier $n\geqslant 1$:
   $D_n < 2\pi$
   Que peut-on en déduire pour le déplacement du robot sur le cercle?

6. Utilisation du logarithme :

Exercice 63

Soit (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 6$ et par la relation de récurrence :
$$u_{n+1} = \frac{1}{4}\cdot u_n + 3 \qquad (n \text{ est un entier naturel})$$

1. On pose : $v_n = u_n - 4$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b. Montrer que $v_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

2. On pose : $a_n = \ln v_n$.

   a. Montrer que la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison $-2 \cdot \ln 2$.

   b. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

   c. Déterminer la valeur de n pour laquelle a_n est égale à $-13 \cdot \ln 2$.

Exercice réservé 55

Pierre opère un placement dans sa banque en versant sur un compte 200 euros, chaque premier janvier à partir du 01/01/2003. La banque rémunère ce compte au taux annuel de 4 %.

On note u_0 le montant initial du compte, donc $u_0 = 200$ et u_n le montant au 1er janvier de l'année $(2003+n)$, n étant un entier naturel.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On arrondira au centime d'euro.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

3. On définit une nouvelle suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n + 5000$.

   a. Calculer les trois premiers termes de la suite (v_n).

   b. Prouver que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

   c. Exprimer alors v_n en fonction de n, puis en déduire que :
   $u_n = 5200 \times (1{,}04)^n - 5000$

4. Combien d'années Pierre devra-t-il attendre, pour disposer d'au moins 3 000 d'euros sur ce compte?

Pour cette question, on pourra faire appel à la fonction logarithme népérien noée ln

Exercice 47

Des chardons envahissent une pelouse de deux façons différentes. Ce dimanche 13 juin, ils couvrent $300\,m^2$ de la pelouse. Chaque semaine l'aire de la surface envahie par les chardons augmente d'une part de 4 % par la prolifération des racines, d'autre part de $13\,m^2$ dus aux graines envolées des jardins voisins.

On appelle u_n, l'aire de pelouse, en m^2, envahie par les chardons au bout de n semaines.

On a donc : $u_0 = 300$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Justifier que pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1} = 1{,}04 \times u_n + 13$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ par : $v_n = u_n + 325$.

   a. Démontrer que : $v_{n+1} = 1{,}04 \cdot v_n$.

   b. En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

4. Exprimer v_n en fonction de n, en déduire que :
   $u_n = 625 \times (1{,}04)^n - 325$.

5. Au bout de combien de semaines les chardons auront-ils envahi plus de $700\,m2$ de la pelouse?

Exercice réservé 32

Partie A

La production d'une entreprise peut être modélisée par une suite arithmétique (u_n) telle que, pour tout entier naturel non nul n, u_n désigne le nombre d'appareils produits l'année n.
La 1re année, la production est de 7500 appareils ; on a :
$u_1 = 7500$

La 6e année, la production est de 12 000 appareils ; on a :
$u_6 = 12\,000$

1. Montrer que la raison de la suite (u_n) est 900.

2. Pour tout entier naturel non nul n, exprimer u_n en fonction de n.

3. Au bout de combien d'années la production aura-t-elle dépassé le triple de la production initiale?

Partie B

Une autre entreprise produit la 1re année 7500 appareils. On notera, pour tout entier naturel non nul n, v_n, le nombre d'appareils produits l'année n. On a donc $v_1 = 7500$. La production annuelle de cette entreprise augmente de 10 % chaque année.

1. Calculer v_2 et v_3.

2. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison.

3. Pour tout entier naturel non nul n, exprimer v_n en fonction de n.

4. Au bout de combien d'années la production aura-t-elle dépassé le triple de la production initiale?

5. Combien d'appareils l'entreprise aura-t-elle produit en 13 ans?

Rappel : pour $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exercice 31

La population d'une ville augmente régulièrement de 10 % par an. En 2000, elle était de 8000 habitants.

1. on désigne par u_n le nombre théorique d'habitants estimé pour l'année $(2000+n)$. On a donc $u_0 = 8000$.

   a. Calculer les termes u_1 et u_2.

   b. Exprimer le terme u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire l'expression du terme u_n en fonction de n.

   c. Calculer le nombre d'habitants prévu pour l'année 2006.

   d. Déterminer en quelle année la population aura doublé

2. On note v_n l'augmentation par rapport à l'année précédente du nombre d'habitants constatée l'année $(2000+n)$. On a donc, pour tout entier naturel n non nul :

$v_n = u_n - u_{n-1}$.

a. Calculer les termes v_1 et v_2.

b. Exprimer le terme général v_n en fonction de n.

c. Calculer la somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ en fonction de n. Vérifier, pour le cas particulier n égal à 6, le résultat obtenu en 1. c.

Exercice 33

Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration du carbone 14, corps radioactif, et de son utilisation pour la datation des fossiles ou des squelettes.

Partie A

Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$

Soit N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après

Soit N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècles, k un entier naturel.

On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps, d'environ 1,24 % par siècle.

1. Justifier que la suite (N_k) est une sutie géométrique de raison 0,9876
2. Exprimer N_k en fonction de N_0 et de l'entier k
3. Quelle est la limite de la suite (N_k)? Justifier.

Partie B

Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui s'y désintègre très lentement, ce qui fait que le taux de carbone 14 dans l'atmosphère reste constant.

Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmoshère ; à leur mort, l'assimilation en carbone 14 cesse et celui-ci se désintègre dans les conditions vues dans la partie **A**.

1. Un squelette d'homme préhistorique contient 5 % de carbone 14 initial.
   Justifier que l'on peut estimer son âge à 24 000 ans.
2. On admet que l'on peut ainsi estimer l'âge des fossiles qui contiennent au moins 1% du carbone initial.
   En utilisant des propriétés de la fonction logarithme népérien, déterminer l'âge maximum que l'on peut calculer.

Exercice réservé 34

Partie A :

une retenue d'eau artificielle est alimentée par un ruisseau dont le débit diminue de 20 % d'un jour sur l'autre à cause de la chaleur. Pour la journée du 1^er^ juin le débit D_0 est égal à 300 m^3 par jour.

1. Calculer le débit D_1 pour le 2 juin.
2. Soit D_n le débit pour le $n^{\text{ième}}$ jour après le 1^er^ juin. Exprimer D_{n+1} en fonction de D_n. Quelle est la nature de la suite (D_n)?
3. Exprimer D_n en fonction de n. Calculer le débit D_{29} pour la journée du 30 juin. On arrondira au dixième de mètre cube.
4. Calculer le volume d'eau apporté dans la retenue au cours des 30 jours du mois de juin. On arrondira le résultat au mètre cube.

On rappelle que : $1 + b + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Partie B :

A partir du 1^er^ juillet, le débit du ruisseau peut-être considéré comme nul *(inférieur à 0,5$^{m^3}/_{jour}$)*.

La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4 % du volume total de l'eau par jour.
De plus, on doit libérer de la retenue 500 m^3 d'eau chaque soir, après évaporation, à cause de la sécheresse.

Le 1^er^ juillet au matin, la retenue contient $V_0 = 100\,000\, m^3$ d'eau.

1. Soit V_n le volume d'eau au $n^{\text{ième}}$ matin après le 1^er^ juillet.
   a. Montrer que V_1 est égal à 95 500 m^3.
   b. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.
2. On considère la suite de terme général U_n définie pour tout entier n par : $U_n = V_n + 12\,500$.
   Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,96 dont on calculera le premier terme U_0.
3. Exprimer le terme général U_n en fonction de n. En déduire l'expression de V_n en fonction de n.
4. Calculer V_{31} le volume restant au matin du 1^er^ août. *(On arrondira le résultat au mètre cube)*
5. A quelle date la retenue sera-t-elle à "*sec*"?

Exercice réservé 56

L'unité est le centimètre

On considère un triangle $A_0B_0C_0$ rectangle isocèle en A_0 tel que : $A_0B_0 = A_0C_0 = 20$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Soit A_1 le milieu du segment $[B_0C_0]$, B_1 le milieu du segment $[A_0C_0]$ et C_1 le milieu du segment $[A_0B_0]$.
   a. Tracer le triangle $A_1B_1C_1$ est un triangle rectangle isocèle en A_1.
   b. Montrer que le triangle $A_1B_1C_1$ est un triangle rectangle isocèle en A_1.
   c. Calculer l'aire de $A_1B_1C_1$ notée u_1 et l'aire de $A_0B_0C_0$ notée u_0.
   d. Exprimer u_1 en fonction de u_0.
3. Soit A_25 le milieu du segment $[B_1C_1]$, B_2 le milieu du segment $[A_1C_1]$ et C_2 le milieu de $[A_1B_1]$.
   a. Calculer l'aire du triangle $A_2B_2C_2$ notée u_2.
   b. Exprimer u_2 en fonction de u_0.
4. En réitérant cette construction, on définit un triangle $A_nB_nC_n$ rectangle isocèle en A_n. On note u_n l'aire de ce triangle $A_nB_nC_n$.
   a. Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} et montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \times 200$.

b. Déterminer le plus petit entier p tel que $u_p < 10^{-3}$.

c. Exprimer en fonction de n la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. En déduire la limite de cette somme quand n tend vers $+\infty$.

Rappel :

- Suites arithmétiques de premier terme u_0 et de raison a :
  $u_{n+1} = u_n + a \quad ; \quad u_n = u_0 + n{\cdot}a$
  $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Suites géométriques de premier terme u_0 et de raison b :
  $u_{n+1} = b{\cdot}\,u_n \quad ; \quad u_n = u_0{\cdot}b^n$
  Si $b \neq 1$: $1+b+b^2+b^3+\cdots+b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$
  Si $b=1$: $1+b+b^2+b^3+\cdots+b^n = n+1$

Exercice 38

Pierre opère un placement dans sa banque en versant sur un compte 200 euros, chaque premier janvier à paritr du 01/01/2003. La banque rémunère ce compte au taux annuel de 4 %. On note u_0 le montant initial du compte, donc u_0 et u_n le nmontant au 1er janvier de l'année (2003+n), n étant un entier naturel.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On arrondira au centime d'euro.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. On définit une nouvelle suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n + 5000$.
   a. Calculer les trois premiers termes de la sutie (v_n).
   b. Prouver que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
   c. Exprimer alors v_n en fonction de n, puis en déduire que : $u_n = 5200 \times (1{,}04)^n - 5000$.
4. Combien d'années Pierre devra-t-il attendre, pour disposer d'au moins 3000 euros sur ce compte?
   Pour cette question, on pourra faire appel à la fonction logarithme népérien notée ln.

7. Raisonnement par récurrence :

Exercice réservé 57

Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout entier naturel :
$u_{n+1} - u_n = r$.

Montrer par récurrence qu'on a :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_0 + n \times r$

Exercice réservé 48

Soit $q \in \mathbb{R}^*$.

Montrer par récurrence que si les termes de la suite (u_n) vérifie $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ pour tout entier naturel n, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 \times q^n$

Exercice réservé 1837

1. Développer : $(n+1)(n+2)$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 1838

Soit a un nombre réel, avec $a \neq 1$.
Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$1 + a + a^2 + \cdot + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Exercice 35

1. Montrer la relation suivante pour $n \in \mathbb{N}$:
   $9{\cdot}\big(9^n - 2^n\big) + 7 \times 2^n$
2. Montrer par récurrence que $9^n - 2^n$ est un multiple de 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 36

1. En remarquant que $10x = 9x + x$, montrer que la propriété "$10^n + 1$ *est multiple de 9*", dépendant de n, est héréditaire.
2. Pour autant, justifier que cette propriété est toujours fausse?

Exercice 65

Montrer que $3n^2 + 3n + 6$ est un multiple de 6 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice réservé 1821

Pour tout entier naturel n, on pose : $A(n) = n^2 - n + 2007$.
Le but de l'exercice est d'étudier la divisibilité des entiers $A(n)$ par 2et par 3.

Cette exercice est composé de deux questions indépendantes.

1. a. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier $A(1)$ égal à 2007.
   b. Soit n un entier naturel. Démontrer que : "*Si n est divisible par 3, alors $A(n)$ est divisible par 3*".
   c. La réciproque de cette dernière affirmation est-elle vraie? Justifier.
2. a. Vérifier que, quel que soit l'entier naturel n, on a :
   $(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = (n^2 - n + 2007) + 2{\cdot}n$
   b. On considère un entier naturel n quelconque. Démontrer que : "*Si $A(n)$ est impair, alors $A(n+1)$ est impair*".
   c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? Justifier.
   "*Il existe au moins un entier naturel n tel que $A(n)$ soit divisible par 2*".

Exercice 1847

Montrer par récurrence la propriété :

"n^2+n+2 est pair" pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice réservé 1848

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$2^{3(n+1)}-1=8\cdot\left(2^{3n}-1\right)+7.$$

2. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que la propriété suivante est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$:

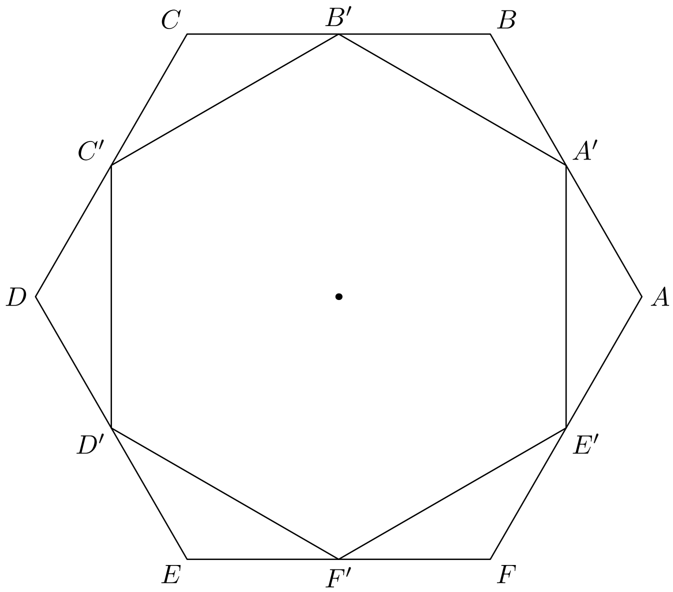
$2^{3n}-1$ est divisible par 7.

255. Exercices non-classés :

Exercice réservé 1890

Partie A

Sur la figure ci-dessous, $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O et A', B', C', D', E', F' sont les milieux des côtés de cet hexagone.



On admet que $A'B'C'D'E'F'$ est également un hexagone de centre O.
D'autre part, on rappelle que tout triangle formé par le centre et deux sommets consécutifs d'un hexagone régulier est un triangle équilatéral.

1. On admet que : $OA'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot OA$.

   Montrer que : $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. On note s, s', a et a' les aires respectives du triangle OAB, du triangle $OA'B'$, de l'hexagone $ABCDEF$ et de l'hexagone $A'B'C'D'E'F'$.

   a. Prouver que : $\dfrac{s'}{s}=\dfrac{3}{4}$.

   b. Exprimer a' en fonction de a.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats de la partie A même s'ils n'ont pas été démontrés.

Sur la figure de l'annexe, $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ est un hexagone régulier dont le côté A_0B_0 mesure $8\,cm$ et A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 sont les milieux des côtés de cet hexagone.
Plus généralement, pour tout entier naturel n, on note A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}, E_{n+1}, F_{n+1} les milieux des côté $[A_nB_n]$, $[B_nC_n]$,..., $[F_nA_n]$ de l'hexagone $A_NB_nC_nD_nE_nF_n$.

1. Sur la figure de la feuille annexe à rendre avec la copie, tracer les hexagones $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$ et $A_4B_4C_4D_4E_4F_4$.

2. On note c_n le côté en centimètr'es de l'hexagone $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$.

   a. Prouver que (c_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

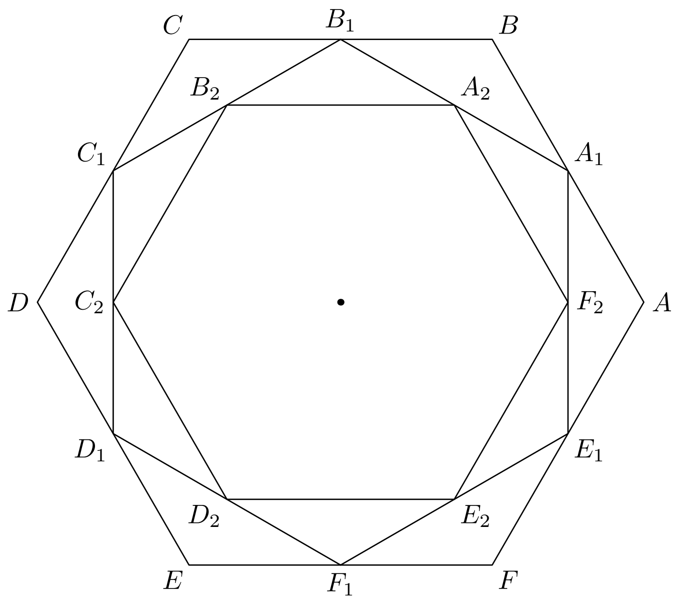
   b. En déduire l'expression de c_n en fonction de n.

   c. Déterminer la valeur exacte de la longueur A_4B4.

3. On note a_n l'aire en cm^2 de l'hexagone $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$.

   a. Quelle est la nature de la suite (a_n)? Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $$a_n=a_0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

   b. Vérifier que l'aire de $A_4B_4C_4D_4E_4F_4$ est inférieure au tiers de celle de $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$.



Exercice 86

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0=6$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1}=\frac{1}{4}\cdot u_n+3\quad (n\ \textit{entier naturel})$$

1. On pose : $v_n=u_n-4$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b. Montrer que $v_n=2\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n)

2. On pose : $a_n = \ln v_n$

a. Montrer que la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison $-2 \cdot \ln 2$.

b. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

c. Déterminer la valeur de n pour laquelle a_n est égale à $-13 \cdot \ln 2$.