Terminales S - Spécialité/71-sujetOral

1. Consignes :

Exercice réservé 6104

Consignes pour le candidat

L'épreuve orale est constituée d'une préparation d'une vingtaine de minutes suivie d'un entretien de même durée.

Vous pouvez utiliser votre calculatrice et le brouillon fourni.

Les exercices du sujet constituent une base d'argumentation pour l'entretien. Vous préparerez des réponses que vous devrez être capable de justifier. Il est inutile de les rédiger complètement par écrit.

La démarche et la pertinence des justifications sont valorisées.

Des questions complémentaires peuvent vous être proposées au cours de l'interrogation.

Si le sujet qui vous est proposé comporte un QCM ou un Vrai/Faux, ce n'est pas tant la validité des réponses que la qualité de l'argumentation orale justifiant les différents choix qui sera évaluée. Il est donc inutile d'essayer de répondre au hasard à certaines d'entre elles.

Exercice réservé 6105

Consignes pour le candidat

L'épreuve orale est constituée d'une préparation d'une vingtaine de minutes suivie d'un entretien de même durée.

Vous pouvez utiliser votre calculatrice et le brouillon fourni.

Les exercices du sujet constituent une base d'argumentation pour l'entretien. Vous préparerez des réponses que vous devrez être capable de justifier. Il est inutile de les rédiger complètement par écrit.

La démarche et la pertinence des justifications sont valorisées.

Des questions complémentaires peuvent vous être proposées au cours de l'interrogation.

2. Sujet 1 :

Exercice réservé 6102

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}\cdot u_n + 3\times 0{,}5^n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

1. a. Déterminer la valeur du terme u_1.

   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel non-nul n, on a :
   $u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :
   $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice réservé 6093

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé. Trois marques X, Y, Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel.

On note :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_n \text{ l'évènement : "}\textit{la marque } X \textit{ est utilisée le mois } n\text{"} \\ \mathcal{Y}_n \text{ l'évènement : "}\textit{la marque } Y \textit{ est utilisée le mois } n\text{"} \\ \mathcal{Z}_n \text{ l'évènement : "}\textit{la marque } Z \textit{ est utilisée le mois } n\text{"} \end{cases}$$

Les probabilités des évènements $\mathcal{X}_n$, $\mathcal{Y}_n$, $\mathcal{Z}_n$ sont notées respectivement x_n, y_n, z_n.

La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition :

- Un acheteur de la marque X le mois n, a le mois suivant :
  - 50 % de chance de rester fidèle à cette marque ;
  - 40 % de chance d'acheter la marque Y ;
  - 10 % de chance d'acheter la marque Z.
- Un acheteur de la marque Y le mois n, a le mois suivant :
  - 30 % de chance de rester fidèle à cette marque ;
  - 50 % de chance d'acheter la marque X ;
  - 20 % de chance d'acheter la marque Z.
- Un acheteur de la marque Z le mois n, a le mois suivant :
  - 70 % de chance de rester fidèle à cette marque ;
  - 10 % de chance d'acheter la marque X ;
  - 20 % de chance d'acheter la marque Y.

1. Représenter le graphe de transitions associé à ce phénomène d'évolutions.

2. En notant U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, déterminant l'expression de la matrice T réalisant la relation :
   $U_{n+1} = T\cdot U_n$

3. On suppose ce phénomène d'évolutions initialisé avec les valeurs :

$$x_0 = 0{,}3 \quad ; \quad y_0 = 0{,}5 \quad ; \quad z_0 = 0{,}2$$

A l'aide d'un calcul matriciel et manuel, déterminer le pourcentage d'acheteurs dévolus à chacune de ces marques le second mois?

3. Sujet 2 :

Exercice réservé 108

On considère les matrices A, B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On considère la suite (U_n) de matrices colonnes définies par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad U_{n+1} = A{\cdot}U_n + B \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Justifier que la matrice C vérifie l'égalité :
   $C = A{\cdot}C + B$

2. On définit la suite (V_n) de matrices lignes par la relation :
   $V_n = U_n - C \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   a. Justifier l'égalité :
   $V_{n+1} = A{\cdot}V_n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $$U_n = \begin{pmatrix} 3^{n+2} - 9\times 2^n + 1 \\ 3\times 2^n - 1 \end{pmatrix}$$

Exercice réservé 6095

On considère la suite (a_n) définie par :

$$a_0 = 8 \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{3}{4}{\cdot}a_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Pour tout entier naturel n, on note : $u_n = a_n - 16$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

   b. Exprimer u_n en fonction de n.

2. Exprimer a_n en fonction de n. Que peut-on dire sur la convergence de la suite (a_n)?

4. Sujet 3 :

Exercice réservé 6096

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

1. a. Calculer la matrice $6{\cdot}A - A^2$.

   b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme :
   $A^{-1} = \alpha{\cdot}I + \beta{\cdot}A$,
   où α et β sont deux réels que l'on déterminera.

   c. Etablir que la matrice A^{-1} admet pour expression :
   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

2. Proposer une résolution du système :
   $$\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

Exercice réservé 6097

On considère la suiet (u_n) définie par :
$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 2{\cdot}n + 2 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) :
$v_n = u_{n+1} - u_n$

1. a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.

   b. Justifier que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et dont on précisera le premier terme.

2. On définit la suite (S_n) par :
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
   Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :
   $S_n = (n+1)(n+2) \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Sujet 4 :

Exercice réservé 6099

On considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. a. Justifier que la matrice P est inversible et donner

l'expression de la matrice inverse de P.

b. Notons $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Montrer que la matrice D est diagonale.

2. a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

b. Donner l'expression de la matrice A^n ne fonction de l'entier naturel non-nul n.

Exercice réservé 6101

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + 4 \cdot Z + 16 = 0$.
Ecrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Calculer a^2 sous forme algébrique.

b. En déduire les deux solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :
$z^2 = -2 + 2 \cdot \mathrm{i}\sqrt{3}$.
On écrira les solutions sous forme algébrique.

6. Sujet 5 :

Exercice réservé 6098

1. Démontrer que le couple $(-2\,;17)$ est solution de l'équation : $12x + 31y = 503$

2. En déduire que :
Si un couple d'entiers relatifs $(x\,;y)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$ *alors le couple vérifie la relation* $12 \cdot (x+2) = 31 \cdot (17-y)$

3. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de l'équation : $12x + 31y = 503$

Exercice réservé 6094

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de $50\,m\ell$.

On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de $49\,m\ell$ de crème.

Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en $m\ell$, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ.

On note $\mathcal{Z}$ la variable égale à $\dfrac{\mathcal{X} - 50}{\sigma}$.

1. Préciser la loi que suit la variable aléatoire $\mathcal{Z}$.

2. Déterminer une valeur, arrondie au millième, du réel u tel que : $\mathcal{P}(Z \leqslant u) = 0{,}06$

3. On sait que la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme vaut 0,06.

En déduire la valeur, arrondie au millième, de l'écart-type σ.

