Terminales S - Spécialité/98-unPeuPlusArithmetique

1. Propriété du pgcd et ppcm :

Exercice 3865

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

"Il existe un seul couple $(a\,;b)$ de nombres entiers naturels, tel que :
$a<b \quad ; \quad PPCM(a\,;b)-PGCD(a\,;b)=1$"

Exercice 3866

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

"On considère l'équation : (E) : $x^2-52x+480=0$
où x est un entier naturel.
Il existe deux entiers naturels non nuls dont le $PGCD$ et le $PPCM$ sont solutions de l'équation (E)."

Exercice réservé 4118

Soit (U_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2\cdot U_n + 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.
2. Montrer que pour tout entier naturel n :
   $U_n = 2^n - 1$
3. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n\geqslant p$:
   $U_n = U_p\cdot\big(U_{n-p}+1\big)+U_{n-p}$

La notation $\mathrm{pgcd}(a\,;b)$ est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b.

4. Montrer pour $n\geqslant p$ l'égalité :
   $\mathrm{pgcd}(U_n\,;U_p)=\mathrm{pgcd}(U_p\,;U_{n-p})$
5. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que :
   $\mathrm{pgcd}(U_n\,;U_p)=U_{\mathrm{pgcd}(n\,;p)}$

   Déterminer l'entier : $\mathrm{pgcd}(U_{2005}\,;U_{15})$.

2. Petit théorème de Fermat :

Exercice 3192

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier 4^n-1, lorsque n est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : "*Si p est un nombre entier premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1}-1\equiv 0 \pmod{p}$*"

Partie A. Quelques exemples.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28}-1$ est divisible par 29.
3. Pour $1\leqslant n\leqslant 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, l'entier $4^{4k}-1$ est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels n l'entier 4^n-1 est-il divisible par 5?
5. A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28}-1$.

Partie B. Divisibilité par un entier premier

Soit p un entier premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n\geqslant 1$ tel que :
   $4^n\equiv 1 \pmod{p}$.
2. Soit $n\geqslant 1$ un entier naturel tel que $4^n\equiv 1 \pmod{p}$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b\equiv 1 \pmod{p}$ et r le reste de la division euclidienne de n par b :
   a. Démontrer que $4^r\equiv 1 \pmod{p}$. En déduire que $r=0$.
   b. Prouver l'équivalence : 4^n-1 est divisible par p si, et seulement si, n est multiple de b.
   c. En déduire que b divise $p-1$.

Exercice réservé 4275

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

"*Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p, alors $q^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$.*"

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :
$u_n = 2^n+3^n+6^n-1$

Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.

1. Montrer que :
   $6\times 2^{p-2}\equiv 3 \pmod{p} \quad ; \quad 6\times 3^{p-2}\equiv 2 \pmod{p}$
2. En déduire que : $6\cdot u_{p-2}\equiv 0 \pmod{p}$.

Exercice 3252

1. On considère l'équation (E) : $109x-226y=1$

   où x et y sont des entiers relatifs.

   a. Déterminer le *pgcd* de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E)?

   b. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141+226k\,;68+109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

   En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que : $109d=1+226e$.

   (On précisera les valeurs des entiers d et e)

2. Démontrer que 227 est un entier premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que : $a\leqslant 226$.

   On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

   - à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227 ;
   - à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

   a. Vérifier que : $g\big[f(0)\big]=0$.

   On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

   Si p est un entier premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$

   b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A :

   $a^{226}\equiv 1 \pmod{227}$.

   c. En utilisant 1. b. , en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A : $g\big[f(a)\big]=a$.

   Que peut-on dire de : $f\big[g(a)\big]=a$?

Exercice 3625

1. On considère l'ensemble : $A_7=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

   a. Pour tout élément de A_7 écrire dans le tableau figurant en annexe l'unique élément y de A_7 tel que :

   $a{\cdot}y \equiv 1 \pmod{7}$.

   b. Pour x entier relatif, démontrer que :

   l'équation $3x\equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x\equiv 4 \pmod{7}$.

   c. Pour x entier relatif, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $a{\cdot}x \equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question, p est un entier premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p=\{1\,;2\,;...\,;p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.

   a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation :

   $a{\cdot}x \equiv 1 \pmod{p}$.

   b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation $a{\cdot}x \equiv 1 \pmod{p}$.

   c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $x{\cdot}y \equiv 0 \pmod{p}$ si, et seulement, si x est un multiple de p où y est un multiple de p.

   d. Application : $p=31$. Résoudre dans A_{31} les équations :

   $2x\equiv 1 \pmod{31}$ et $3x \equiv 1 \pmod{31}$.

   A l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

   $6x^2-5x+1\equiv 0 \pmod{31}$

Exercice 3867

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : "*soit p un entier premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p*".

1. Soit p un entier premier impair.

   a. Montrer qu'il existe une entier naturel k, non nul, tel que :

   $2^k \equiv 1 \pmod{p}$.

   b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k\equiv 1 \pmod{p}$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors :

   $2^n \equiv 1 \pmod{p}$.

   c. Soit b tel que $2^b\equiv 1 \pmod{p}$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.

   Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que :

   si $2^n\equiv 1 \pmod{p}$ alors b divise n.

2. Soit q un entier premier impair et l'entier $A=2^q-1$.

   On prend pour p un facteur premier de A.

   a. Justifier que : $2^q\equiv 1 \pmod{p}$

   b. Montrer que p est impair.

   c. Soit b tel que $2^b\equiv 1 \pmod{p}$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.

   Montrer, en utilisant 1., que b divise q. En déduire que $b=q$.

   d. Montrer que q divise $p-1$, puis montrer que $p\equiv 1 \pmod{2q}$.

3. Soit $A_1=2^{17}-1$. Voici la liste des entiers premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m+1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

Exercice 3868

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$A(n)=n^4+1$

L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

1. Quelques résultats :

   a. Etudier la partié de l'entier $A(11)$.

   b. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.

   c. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.

   d. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:

   $n^8 \equiv 1 \pmod{d}$

2. Recherche de critères :

   Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que :

   $n^k \equiv 1 \pmod{d}$

   a. Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s, montrer que s divise k.

b. En déduire que s est un diviseur de 8.

c. Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d-1$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

3. Recherche des diviseurs premier de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.
Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas :
$s=1 \quad ; \quad s=2 \quad ; \quad s=4$
conclure que p est congru à 1 modulo 8.

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera en compte dans l'évaluation.*

Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.

Indication : la liste des entiers premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137....

Exercice 4327

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : *Si p est un entier premier et a est un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = 10 \cdot u_n + 21$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$3 \cdot u_n = 10^{n+1} - 7$

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n.

3. Montrer que u_2 est un entier premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains entiers premiers.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$3 \cdot u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.

6. a. Démontrer l'égalité : $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel k, $u_{16 \cdot k+8}$ est divisible par 17.

3. PPCM :

Exercice 3863

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x<y$. S est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ tels que : $PGCD(x\,;y) = y-x$

1. a. Calculer le $PGCD(363\,;484)$.

b. Le couple $(363\,;484)$ appartient-il à S?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n\,;n+1)$ appartient-il à S
Justifier votre réponse.

3. a. Montrer que $(x\,;y)$ appartient à S si, et seulement si, il existe un entier naturel k non nul tel que :
$x = k\cdot(y-x) \quad ; \quad y = (k+1)(y-x)$

b. En déduire que pour tout couple $(x\,;y)$ de S, on a :
$PPCM(x\,;y) = k\cdot(k+1)\cdot(y-x)$

4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b. En déduire l'ensemble des couples $(x\,;y)$ de S tels que :
$PPCM(x\,;y) = 228$

Exercice réservé 4280

On considère l'équation (F) : $x^2 - 52\cdot x + 480 = 0$ où x est un entier naturel.

Montrer qu'il n'existe pas deux entiers naturels non nuls dont le $PGCD$ et le $PPCM$ sont solutions de l'équation (F).

Exercice 3864

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que :
$PGCD(a+b\,;a\cdot b) = p$
où p est un entier premier.

a. Démontrer que p divise a^2.
(On remarquera que $a^2 = a(a+b) - a\cdot b$)

b. En déduire que p divise a.
On constate donc, de même, que p divise b.

c. Démontrer que $PGCD(a\,;b) = p$.

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$.

a. Résoudre le système :
$$\begin{cases} PGCD(a\,;b) = 5 \\ PPCM(a\,;b) = 170 \end{cases}$$

b. En déduire les solutions du système :
$$\begin{cases} PGCD(a+b\,;a\cdot b) = 5 \\ PPCM(a\,;b) = 170 \end{cases}$$

4. Arithmétique et complexe :

Exercice 3152

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :
$$x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}$$
   a. toutes les solutions sont des entiers pairs
   b. il n'y a aucune solution
   c. les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod{6}$
   d. les solutions vérifient : $x \equiv 2 \pmod{6}$ ou $x \equiv 5 \pmod{6}$

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;y) = (34k - 7\,; 5 - 24k)$, $k \in \mathbb{Z}$
   b. L'équation (E) n'a aucune solution
   c. Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;y) = (17k - 7\,; 5 - 12k)$, $k \in \mathbb{Z}$
   d. Les solutions de (E) sont toutes de la forme $(x\,;y) = (-7k\,; 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$

3. On considère les deux entiers $n = 1789$ et $p = 1789^{2005}$. On a alors :
   a. $n \equiv 4 \pmod{17}$ et $p \equiv 0 \pmod{17}$
   b. p est un entier premier
   c. $p \equiv 4 \pmod{17}$
   d. $p \equiv 1 \pmod{17}$

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, les points A et B d 'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si, et seulement si, le point M d'affixe z est tel que :
   a. $z = \dfrac{b - \mathrm{i}a}{1 - \mathrm{i}}$
   b. $z - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \cdot (b - a)$
   c. $a - z = \mathrm{i} \cdot (b - z)$
   d. $b - z = \dfrac{\pi}{2} \cdot (a - z)$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment $[AB]$. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I.
   a. $h \circ g \circ f$ transforme A en b et c'est une rotation.
   b. $h \circ g \circ f$ est la réflection ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$
   c. $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.
   d. $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

Exercice 3165

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique $4\,cm$.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :
$$a = 1 \quad ; \quad b = 1 + 2\mathrm{i} \quad ; \quad c = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad d = 3 + 2\mathrm{i}$$
On considère la similitude directe s qui transforme A en b et C en D. Soit M un point d'affixe z et M', d'affixe z', son image par s.

1. Exprimer z' en fonction de z.
Déterminer les éléments caractéristiques de s.

Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.
3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s, les termes de la suite (U_n).
4. Montrer que pour tout entier naturel n : $U_n = 2^n - 1$.
5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geqslant p$:
$$U_n = U_p \cdot \left(U_{n-p} + 1\right) + U_{n-p}$$
La notation $pgcd(a\,;b)$ est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b. Montrer pour $n \geqslant p$ l'égalité :
$$\mathrm{pgcd}(U_n\,;U_p) = \mathrm{pgcd}(U_p\,;U_{n-p})$$
6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que :
$$\mathrm{pgcd}(U_n\,;U_p) = U_{\mathrm{pgcd}(n\,;p)}$$
Déterminer l'entier : $\mathrm{pgcd}(U_{2005}\,;U_{15})$

255. Exercices non-classés :

Exercice réservé 4279

Etablir que pour tout entier naturel k $(2 \leqslant k \leqslant n)$, l'entier $n! + k$ n'est pas un entier premier.

