Terminales S - Spécialité/Annales sur les nombres premiers

255. Exercices non-classés :

Exercice réservé 3323

Partie A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances?
Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

Partie B

On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β les chiffres de l'écriture d'un entier en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta\times 12^2 + \alpha\times 12 + 7 = 11\times 12^2 + 10\times 12 + 7$$
$$= 1711 \text{ en base } 10$$

1. a. Soit N_1 l'entier s'écrivant en base 12 :
$N_1 = \overline{\beta 1\alpha}^{12}$
Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

   b. Soit N_2 l'entier s'écrivant en base 10 :
$N_2 = 1131 = 1\times 10^3 + 1\times 10^2 + 3\times 10 + 1$
Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :
$N = \overline{a_n\cdots a_1a_0}^{12}$

2. a. Démontrer que $N \equiv a_0 \pmod{3}$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un entier écrit en base 12.

   b. A l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3. a. Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \pmod{11}$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un entier écrit en base 12.

   b. A l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un entier N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

Exercice 5302

Le but de cet exercice est de démontrer par l'absurde qu'il existe une infinité de entiers premiers de la forme $4n-1$, où n est un élément de $\mathbb{N}^*$ *(ensemble des entiers naturesl non nuls)*.

1. Soit E l'ensemble des entiers premiers de la forme $4n-1$ où n est un élément de $\mathbb{N}^*$.
Montrer que E a au moins deux éléments.

2. *On suppose E fini.* Soit P le produit de tous les éléments de E et $X = 4P-1$.

   a. Trouver un minorant de X.

   b. Montrer que X n'est pas divisible par 2, et en déduire que tout facteur premier de X est soit de la forme $4n+1$, soit de la forme $4n-1$ où n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

   c. Montrer que X possède au moins un facteur premier de la forme $4n-1$ où n est un élément de $\mathbb{N}^*$

3. En considérant un facteur premier p de X de la forme $4n-1$, la définition de P et la relation $X = 4P-1$, achever la démonstration par l'absurde.

