Terminale S/Annales exponentielles, logarithmes, intégrales

1. Fonctions exponentielles :

Exercice réservé 3225

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-x}$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$, l'unité graphique est $2\,cm$ sur l'axe des abscisses et $5\,cm$ sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\mathrm{e}^x-x-1$.

1. Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.
2. Justifier que pour tout x, (e^x-x) est strictement positif.

Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. a. Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
   b. Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
   b. A l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (T).
4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 5844

Soit f la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}$$

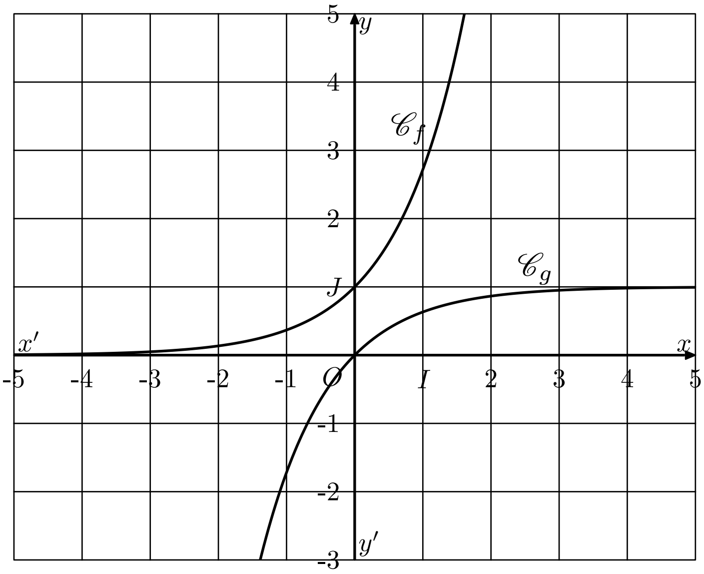
1. **Etude d'une fonction auxiliaire :**
   a. Soit la fonction g dérivale, définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
   $g(x)=x^2{\cdot}\mathrm{e}^x-1$
   Etudier le sens de variation de la fonction g.
   b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;+\infty[$ tel que $g(a)=0$.
   Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;0{,}704[$.
   c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. **Etude de la fonction f :**
   a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b. On note f' la fonction dérivé de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif :
   $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$
   c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel :
   $m=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}$
   e. Justifier que : $3{,}43<m<3{,}45$.

Exercice réservé 5850

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x)=\mathrm{e}^x \quad ; \quad g(x)=1-\mathrm{e}^{-x}$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont fournies dans la figure ci-dessous :



Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure ci-dessus.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathscr{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse b.

1. a. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.

b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B.

c. En déduire que : $b = -a$.

2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation :
$2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x + 1$

1. a. Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.

2. a. Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x)=0$ et β la solution positive de cette équation.
A l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontrer l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie **B**.

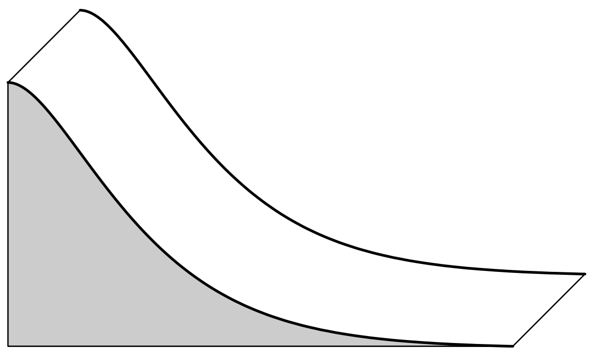
On note E le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ *(α est le nombre réel défini dans la partie* **C***)*.

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point E.

2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathscr{C}_g$ au point F.

Exercice 6934

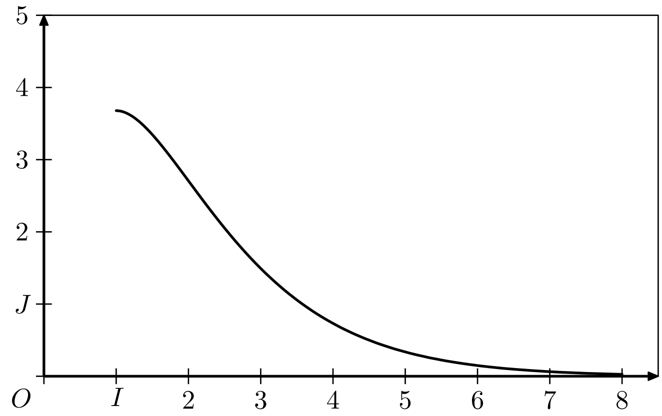
Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.
Voici le schéma :



Partie A : Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1;8]$ par :
$f(x) = (a \cdot x + b) \cdot \mathrm{e}^{-x}$
où a et b sont deux entiers naturels.

La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
Déterminer la valeur de l'entier b.

2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut.
Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B : Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1;8]$ par :
$f(x) = 10 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x}$

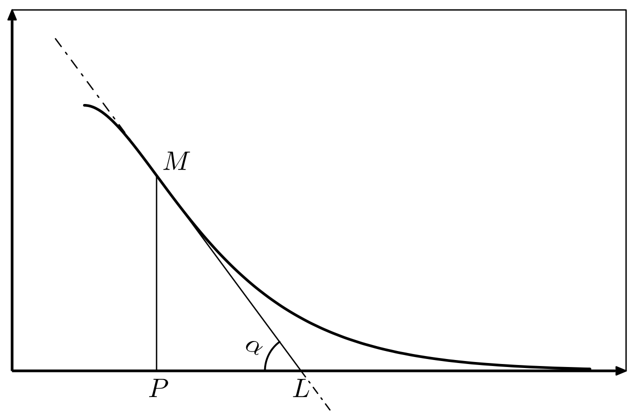
Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

1. Soit g la fonction définie sur $[1;8]$ par :
$g(x) = 10 \cdot (-x-1) \cdot \mathrm{e}^{-x}$
Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.

2. Quel est le montant du devis de l'artiste?

Partie C : une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.
On considère un point M de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse différent de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathscr{C}$ à l'axe des abscisses.
La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1;8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1;8]$: $f'(x) = 10 \cdot (1-x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$
Etudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1;8]$.

2. Soit x un réel de l'intervalle $]1;8]$ et soit M le point

d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$. Justifier que :
$\tan\alpha = |f'(x)|$

3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées?

Exercice 3121

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire :

La fonction d est définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $d(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$

1. Calculer la fonction dérivée d'. En déduire les variations de d.
2. Déterminer les limites de d en -1 et en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x>-1$: $0<d(x)<e$

Partie B : Etude de la fonction f

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x+1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, l'unité graphique étant $5\,cm$. On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f.

1. a. Pour $x\in]-1\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   Vérifier que : $f''(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^4}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$
   En déduire le sens de variations de f'.

   b. Dresser le tableau de variations de f'.
   $\left(\textit{On admettra que } \lim\limits_{x\mapsto-1} f'(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} f'(x) = 1\right)$

2. a. Démontrer que l'équation $f'(x)=0$ admet sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.

Dans la suite du problème, on notera α la solution non-nulle.

   b. Donner une valeur approchée de α au centième près.

3. a. Etudier les variations de f.

   b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   c. Dresser le tableau de variations de f.

Partie C : Prolongement de la fonction f en -1

On considère la fonction g définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(-1) = 0 \\ g(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x>-1 \end{cases}$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la **partie B**.

1. a. Montrer que l'on peut écrire :
   $$\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = 1-\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}\right)$$

   b. Pour $x\in]-1\,;+\infty[$, déterminer la limite lorsque x tend vers -1 de $\dfrac{x}{x+1}$ puis de $\dfrac{x}{x+1}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$.

   c. En déduire que g est dérivable en -1 et préciser son nombre dérivé $g'(-1)$.

2. Construire (D) et $(\mathscr{C}')$. Préciser les tangentes à $(\mathscr{C}')$ aux points d'abscisses -1, α, 0.

Exercice réservé 5855

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\cdot\mathrm{e}^{1-x}$

1. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = e\times\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
4. Déterminer la dérivée de la fonction f.
5. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $g_n(x) = 1+x+x^2+\cdots+x^n$
- $h_n(x) = 1+2x+\cdots+n\cdot x^{n-1}$

1. Vérifier que, pour tout réel x :
   $(1-x)\cdot g_n(x) = 1-x^{n+1}$

On obtient alors, pour tout réel $x\neq1$: $g_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

2. Comparer les fonctions h_n et g'_n, g'_n étant la dérivée de la fonction g_n. En déduire, que pour tout réel $x\neq1$:
   $$h_n(x) = \frac{n\cdot x^{n+1}-(n+1)\cdot x^n+1}{(1-x)^2}$$

3. Soit $S_n = f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie **A**.
   En utilisant les résultats de la partie **B**, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

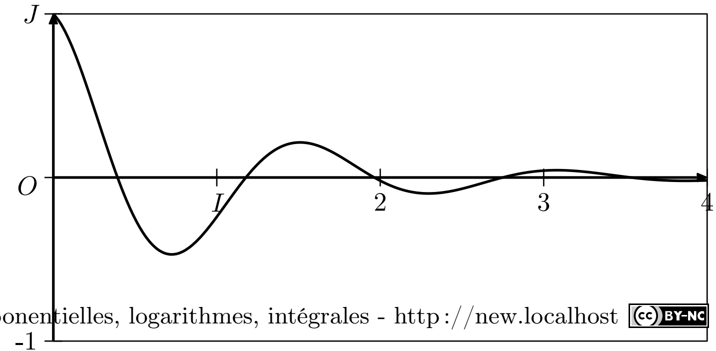
2. Exponentielles et suites :

Exercice 3158

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$:



On considère également la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$$
   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.

3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = f\left(n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.
   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cdot\left[\cos(4x) + 4\cdot\sin(4x)\right]$$
   b. En déduire que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathscr{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
   Compléter le graphique donné en annexe, en y traçant $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.

Exercice réservé 3178

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.
On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0\,;+\infty[$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} (1) : \text{pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0\,;+\infty[, \\ \qquad f'(x) = 4 - \left[f(x)\right]^2 \\ (2) : f(0) = 0 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérfiant simultanément (1) et (2).
Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A. Etude d'une suite

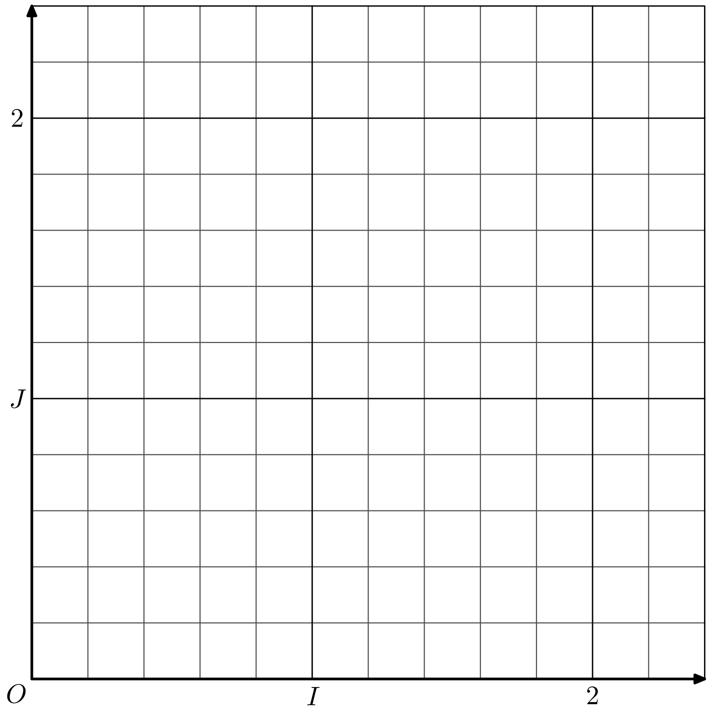
Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f, on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.
On obtient ainsi une suite de poins notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n, \\ \qquad x_{n+1} = x_n + 0{,}2 \\ y_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n, \\ \qquad y_{n+1} = -0{,}2\cdot y_n^{\,2} + y_n + 0{,}8 \end{cases}$$

1. a. Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,8000	1,4720					

   Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.
   b. Placer, sur le graphique ci-dessous, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.



   c. D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence?

2. a. Pour x réel, on pose $p(x) = -0{,}2x^2 + x + 0{,}8$. Montrer que si $x \in [0\,;2]$ alors $p(x) \in [0\,;2]$.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant y_n \leqslant 2$.
   c. Etudier le sens de variation de la suite (y_n).
   d. La suite (y_n) est-elle convergente?

Partie B. Etude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^{4x} - 1}{\mathrm{e}^{4x} + 1}\right) \text{ et } (\mathscr{C}_g) \text{ sa courbe représentative.}$$

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

2. a. Montrer que $(\mathscr{C}_g)$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
   b. Etudier les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.

3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à $(\mathscr{C}_g)$ à l'origine.

4. Tracer, dans le repère de l'annexe, la courbe $(\mathscr{C}_g)$ et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.

3. Fonctions logarithmiques :

Exercice 3179

1. **Restitution organisée des connaissances**

Pré-requis :
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$;
  Sa fonction dérivée est la fonction inverse :
  $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
- $\ln(1) = 0$

Démontrer que pour tous réels strictement positifs α et x :
$\ln(\alpha \cdot x) = \ln(\alpha) + \ln(x)$

2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que :
$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$
pour tous réels strictement positifs a et b.

3. On donne : $0{,}69 \leqslant \ln 2 \leqslant 0{,}70$ et $1{,}09 \leqslant \ln 3 \leqslant 1{,}10$.
En déduire des encadrements de :
$$\ln 6 \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{6}\right) \quad ; \quad \ln\left(\frac{3}{8}\right)$$

Exercice 3898

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x - x \cdot \ln x$

1. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et que :
$g'(x) = -\ln x$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$

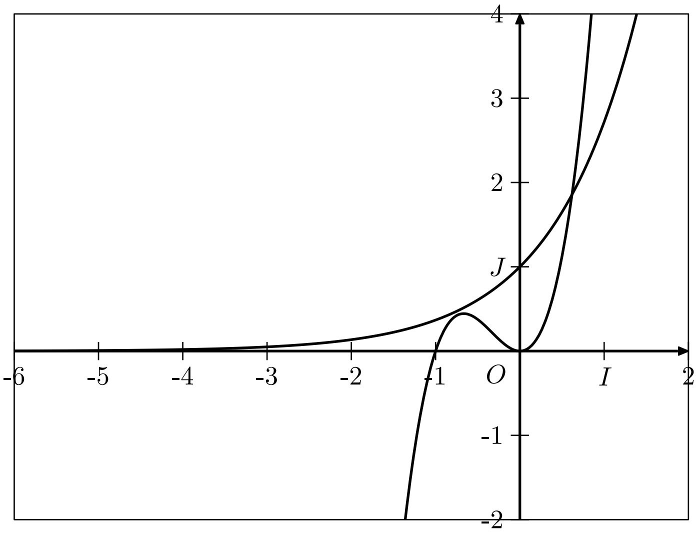
1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :
   a. le sens de variation de la suite (u_n) ;
   b. la limite éventuelle de la suite (u_n).
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$v_n = \ln(u_n)$.
   a. Montrer que : $v_n = n - n \cdot \ln n$.
   b. En utilisant la partie **A**, déterminer le sens de variation de la suite (v_n).
   c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5433

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle :
$$e^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$$

Partie A : conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cdot\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



A l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. a. Etudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.
   b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.
   c. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel de $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par :
$h(x) = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x$
Montrer que, sur $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.
3. a. Pour tout réel x appartenant à $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$, montrer qu'on a :
$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}$$
   b. Déterminer les variations de la fonction h.
   c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :
   $h(x) = 0$
   et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.
   d. Conclure quant à la conjecture de la partie **A**.

Exercice réservé 5151

Partie A - Etude du signe d'une fonction

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 + 4 \cdot \ln x$

1. Déterminer le tableau de variations de la fonction f en précisant les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α et une seule dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel strictement positif x.

Partie B - Une valeur approchée du réel α définie dans la partie A

Sur le graphique fourni ci-dessous, on a tracé une partie de la courbe représentative de $(\mathscr{C})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$

On a définie la suite (u_n) par :

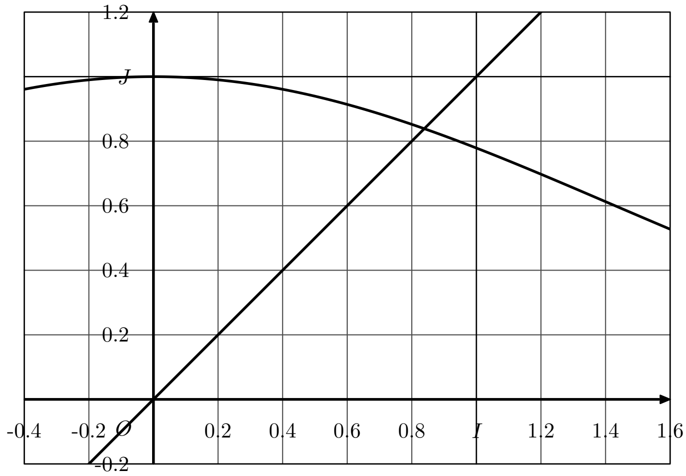
$u_0=0{,}5 \quad ; \quad u_{n+1}=g(u_n) \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Vérifier que α est l'unique solution de l'équation : $g(x)=x$.

2. Au moyen de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite d'équation $y=x$, représenter les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n)?

3. On admet que pour tout entier naturel n :
$u_{2n}\leqslant a\leqslant u_{2n+1}$.
En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier n pour lequel les trois premières décimale de u_n et u_{n+1} sont identiques.

En déduire que 0,838 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.



Partie C - Un problème de distance

On appelle (Γ) la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la fonction φ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $\varphi(x)=2\ln x$

L'objectir de cette partie est de démontrer que parmi les points de la courbe (Γ), il y en a un et un seul qui est plus proche de l'origine O que tous les autres.

1. Soient M un point de la courbe (Γ) et x son abscisse. Exprimer OM en fonction de x.

2. a. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $h(x)=x^2+4\cdot(\ln x)^2$
Etudier les variations de la fonction h. On pourra utiliser la partie **A**.

   b. En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe (Γ) tel que pour tout point M de (Γ), distinct de A, on a $OM>OA$.

3. Démontrer que la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente T à la courbe (Γ) au point A.

4. Exponentielles et logarithme :

Exercice 3965

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$f_1(x)=2\cdot x-2+\ln\left(x^2+1\right)$$
   a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Déterminer la dérivée de f_1.
   c. Dresser le tableau de variations de f_1.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n, définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$f_n(x)=2\cdot x-2+\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}$$
   a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
   b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
   c. Démontrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n sur $[0\,;+\infty[$.
   d. Justifier que, pour tout entier naturel non nul n :
   $0<\alpha_n<1$

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n :
$f_n\left(\alpha_{n+1}\right)>0$

4. Etude de la suite (α_n) :
   a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.
   b. En déduire qu'elle est convergente.
   c. Utiliser l'expression $\alpha_n=1-\dfrac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2\cdot n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

5. Un peu plus loin :

Exercice 3266

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-2x}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$. *(unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 8 cm sur l'axe des ordonnées)*

1. a. Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par :
   $P(X) = 1 + X - 2X^2$.
   Etudier le signe de $P(X)$.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   c. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Qu'en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

3. Vérifier que $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} \cdot \left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2\right)$, puis déterminer la limite de f en $-\infty$.

4. a. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f, calculer $f'(x)$.

   b. Montrer que $f'(x)$ a le signe que $(4 - \mathrm{e}^{x})$, puis étudier le signe de $f'(x)$.

   c. Dresser le tableau de variations de f. On montrera que le maximum est un nombre rationnel.

5. a. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ n'ont qu'un point d'intersection A dont on déterminera les coordonnées.

   b. Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

6. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

7. Tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

255. Exercices non-classés :

Exercice 3255

La page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln x$$

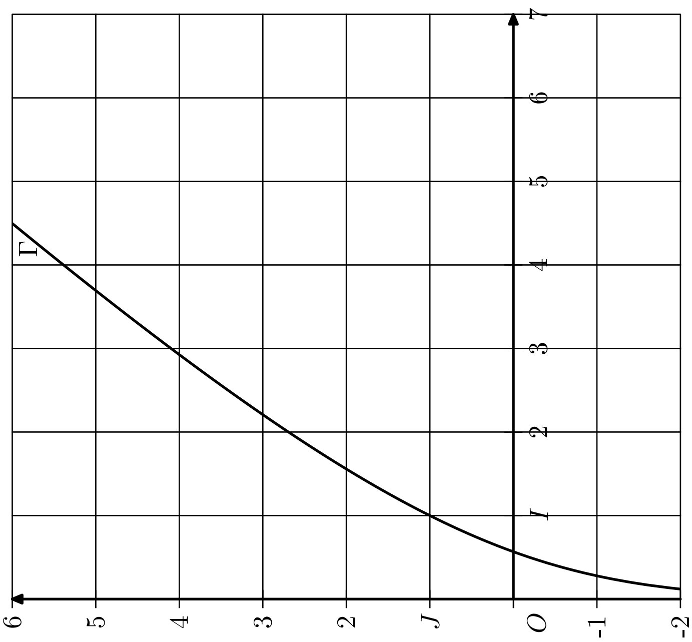
On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ du plan.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

   b. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.
   On note α_n cette solution. On a donc :
   pour tout entier naturel n, $\quad \alpha_n + \ln \alpha_n = n$

   b. Ci-dessous, on a tracé Γ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$. Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.



   c. Préciser la valeur de α_1.

   d. Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

3. a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point d'abscisse 1.

   b. Etudier les variations de la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
   $$h(x) = \ln x - x + 1$$
   En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.

   c. Tracer Δ sur le graphique ci-dessus. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
   $$\frac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n.$$

4. Déterminer la limite de la suite (α_n).

Partie B

On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et telle que :
$\lim\limits_{x\mapsto 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} g(x) = +\infty$.

On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la **partie A**, définir sur $\mathbb{N}$ une suite (β_n) de réels tels que $g(\beta_n)=n$, et que cette suite est strictement croissante.

1. Démonstration de cours :

   Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

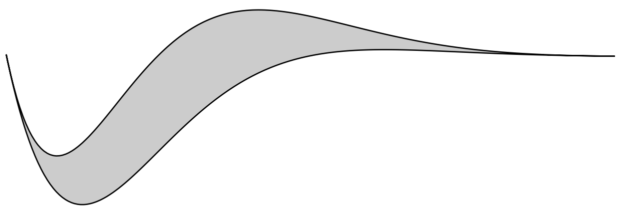
   "Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A"

   Démontrer le théorème suivant : *une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$*

2. Montrer que la suite (β_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 8142

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cdot\big(-\cos x + \sin x + 1\big)$ et $g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x$

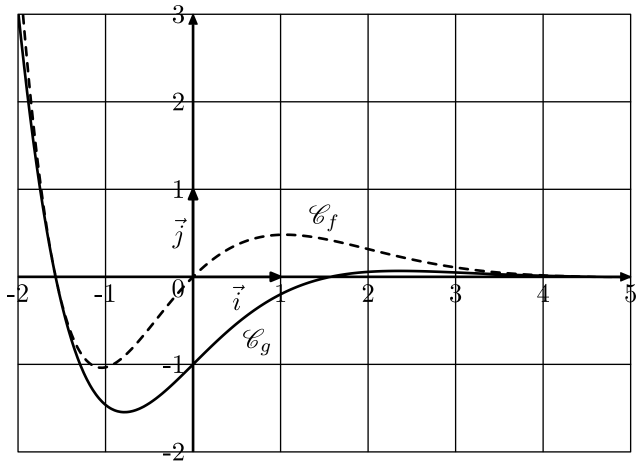
On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Etude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{-x}$
2. En déduire la limite de f en $+\infty$
3. Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$:
   $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(2\cos x - 1\big)$
   où f' est la fonction dérivée de f.
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.
   a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.
   b. En déduire les variations de f sur $[-\pi\,;\pi]$.

Partie B - Aire du logo

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $\big(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\big)$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées ci-dessous :



1. Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $H(x) = \left(-\dfrac{\cos x}{2} - \dfrac{\sin x}{2} - 1\right)\cdot\mathrm{e}^{-x}$
   On admet que H est une primitive de la fonction $x\longmapsto\big(\sin x+1\big)\cdot\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
   On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est les droites d'équation $x=-\dfrac{\pi}{2}$ et $x=\dfrac{3\pi}{2}$.
   a. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique ci-dessus.
   b. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2.

