Terminale S/Limite de suites

1. Rappels : suites arithmétiques et géométriques :

Exercice 3393

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $\frac{3}{4}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
2. Donner la formule explicite de (u_n) donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
3. Déterminer la valeur de la suite suivante :
   $S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{12}$

Exercice 3394

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $\frac{16}{27}$ et de raison $\frac{3}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
2. Donner la formule explicite de (u_n) donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
3. Déterminer la valeur de la suite suivante :
   $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{16}$

Exercice 5012

1. Soit (u_n) une suite arithmétique définie pour $n\in\mathbb{N}$. On a la valeur des deux termes suivants :
   $u_4 = 3 \quad ; \quad u_7 = 15$
   a. Déterminer les éléments caractéristiques de la suite (u_n).
   b. Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite (u_n)
2. Soit (v_n) une suite géométrique définie pour $n\in\mathbb{N}$. On a la valeur des deux termes suivants :
   $v_2 = 2 \quad ; \quad v_5 = 54$
   a. Déterminer les éléments caractéristiques de la suite (v_n).
   b. Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite (v_n)

Exercice 6724

On considère les deux suites de nombres ci-dessous dont on donne les sept premiers termes :

a. 3 ; 5 ; 7 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16

b. 6 ; 3,5 ; 1 ; -1,5 ; -4 ; -6,5 ; -9

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite arithmétique?
Si oui, donner le premier terme et la raison. Si non, justifier votre rejet de cette affirmation.

Exercice 6725

On considère les deux suites de nombres ci-dessous où sont donnés les six premiers termes :

a. $8 \quad ; \quad 4 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{4}$

b. 1 ; 3 ; 9 ; 18 ; 54 ; 162

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite géométrique?
Si oui, préciser le premier terme et la raison. Sinon, justifier votre rejet de la conjecture.

Exercice 3398

En identifiant chacune des sommes comme une somme des termes d'une suites arithmétiques ou géométriques, déterminer chacune de leurs valeurs :

a. $12 + 7 + 2 + (-3) + \cdots + (-28)$

b. $27 + 3 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{243}$

c. $\frac{2}{3} + \frac{8}{3} + \frac{14}{3} + \cdots + \frac{62}{3}$

d. $\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \cdots + \frac{1}{2^{24}}$

Exercice réservé 3807

On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont les six premiers termes vérifient :

- Les six premiers termes sont tous positifs et leur somme vaut 1.
- Les six premiers termes de la suite sont non-constants.
- Les six premiers termes de (p_n) sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique.
- Les nombres p_1, p_2, p_4 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Déterminer la valeur des six premiers termes de la suite (p_n).

2. Rappels : autres :

Exercice 3395

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Déterminer la valeur des huit premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la suite $(v_n)_{n\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_1=2 \quad ; \quad v_{n+1}=\frac{1}{v_n}+n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n).

Exercice 3396

Déterminer la valeur de chacune des sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{i=0}^{7} i$ b. $\displaystyle\sum_{i=3}^{8} (i^2-i)$ c. $\displaystyle\sum_{i=0}^{7} (i-4)$

d. $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i}$ e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i^2}$ f. $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{3} \left[\sum_{i=0}^{\ell} i\right]$

Exercice 5042

Justifier que, dans chaque question, les informations ci-dessous ne définissent pas de suites :

a. $u_0=5 \quad ; \quad u_{n+1}=2\cdot u_n-3 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

b. $u_0=1 \quad ; \quad u_1=4 \quad ; \quad u_{n+1}=u_n-3 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

c. $u_0=3 \quad ; \quad u_n=2\cdot u_{n-1}-2 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

d. $u_0=-1 \quad ; \quad u_n=\dfrac{u_{n-1}-2}{u_{n-1}+1} \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

3. Limites de suites arithmétiques et géométriques :

Exercice 6726

1. On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme -4 et de raison 5 :

a. Compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	-4	1	6	11	16	21		

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme u_n lorsque le rang n devient de plus en plus grand?
On notera : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \dots\dots$

2. On considère la suite (v_n) arithmétique de premier terme 3 et de raison $-1{,}2$:

a. Compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n	3	1,8	0,6	$-0{,}6$	$-1{,}8$	-3		

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme v_n lorsque le rang n devient de plus en plus grand?
On notera : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = \dots\dots$

Exercice 6727

1. On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 4 et de raison 2 :

a. Compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	4	8	16	32	64	128		

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme u_n lorsque le rang n devient de plus en plus grand?
On notera : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \dots\dots$

2. On considère la suite (v_n) géométrique de premier terme 81 et de raison $\dfrac{1}{3}$:

a. Compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n	81	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$		

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme v_n lorsque le rang n devient de plus en plus grand?
On notera : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = \dots\dots$

Exercice 6728

On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 2,8 et de raison 0,9.

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous à l'aide de valeurs approchées au centième :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	2,8	2,52	2,268	2,041				

2. A l'aide de la calculatrice, quelle conjecture peut-on établir pour la limite des termes de la suite (u_n)?

On note : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \dots$

Exercice 2557

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement par :
$u_n=9n-5$

a. Déterminer la nature de la suite (u_n) en précisant ses caractéristiques.

b. Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement par :
$v_n=2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

a. Déterminer la nature de la suite (v_n) en précisant ses caractéristiques.

b. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice réservé 6729

Donner, si possible, les limites des suites suivantes :

1. La suite (u_n) est géométrique de premier terme strictement négatif et de raison 2.
2. La suite (v_n) est géométrique de premier terme strictement positive et de raison -3.
3. La suite (w_n) est géométrique de premier terme strictement négative et de raison $-0{,}2$.

4. Limites de somme des termes de suites :

Exercice 2559

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison -1.
   a. Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang n.
   b. On note $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de S_n en fonction de n.
   c. En déduire la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{1}{2}$.
   a. Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang n.
   b. On note $S'_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de S'_n en fonction de n.
   c. En déduire la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S'_n$.

Exercice 2588

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{2}{5}$:

1. Déterminer les trois premiers termes de cette suite.
2. a. Déterminer l'expression de la somme des n premiers termes de cette suite en fonction de n.
   b. En déduire la valeur de la limite suivante :
   $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_0+u_1+\cdots+u_n$

Exercice réservé 2622

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 4×5^2 et de raison $\frac{1}{5}$ et la somme S_n définie par :

$$S_n = u_3+u_4+\cdots+u_n \quad \text{pour tout } n\geqslant5$$

1. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.
2. Justifier que la suite (S_n) converge vers 1.

Exercice 2621

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$ et la suite (R_n) définie, pour $n\geqslant2$, par la somme :

$$R_n = u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{2n}$$

Déterminer la limite de la suite (R_n).

Exercice réservé 3105

Déterminer, en justifiant vos démarches, les limites des sommes suivantes :

a. $S=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b. $S'=-\frac{15}{4}+5\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-5\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+5\times\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots+5\times\left(-\frac{3}{4}\right)^n$

Exercice 6174

Un coureur se lance un défi : il souhaite faire le tour de l'Europe.
Le premier jour, il parcourt $50\,km$. Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de $1\,\%$.

On note u_n la longueur parcourue par le coureur le n-ième jour. En supposant ue le coureur poursuit indéfiniment sa course, on obtient une suite (u_n) définie pour tout entier naturel non-nul.

1. Déterminer la valeur des quatre permiers termes de la suite (u_n).
2. a. Quelle est la nature de la suite (u_n)? Donner les élèments caractéristiques de la suite (u_n).
   b. Exprimer le terme u_n en fonction du rang n.
   c. Quelle distance sera parcourue par le coureur le 100^e jour? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.
3. On note S la somme des n premiers termes de la suite (u_n) : $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$
   a. Exprimer la somme S_n en fonction du rang n.
   b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres :

n	10	100	500	750	1000
S_n					

   c. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la somme S_n quand la valeur de n devient de plus en plus grand?

Exercice 2560

Un globe-trotter a parié de parcourir $5\,000\,km$ à pied.
Il peut, frais et dispos, parcourir $50\,km$ en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de $1\,\%$ tous les jours.

On notera d_n la distance parcourue durant le n-ième jour.

1. Calculer les distances d_1, d_2, d_3 parcourues durant les trois premiers jours.
2. Quelle est précisément la nature de la suite?
   Déterminer la valeur de d_n en fonction de n.
3. On note L_n la distance en kilomètres parcourus au bout

de n jours.

$L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$

a. Déterminer l'expression de L_n en fonction de n.

b. En déduire la limite de L_n lorsque n tend verse $+\infty$. Le globe-trotter peut-il gagner?

c. A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir $4\,999\,km$

Exercice 5738

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par:

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

Pour tout entier naturel non nul n, on pose:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n \quad ; \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

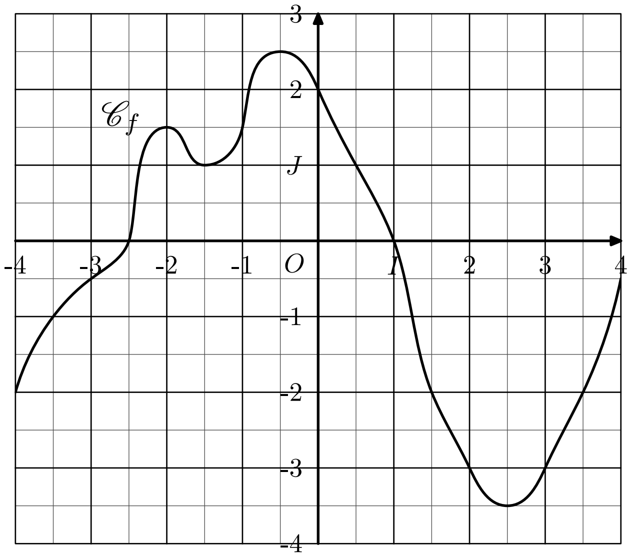
1. Exprimer le terme S_n en fonction de n.

2. Déterminer la limite de la suite (T_n).

5. Autres limites :

Exercice 3397

On considère la fonction f définie sur $[-4\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous:



On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation:

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que le terme u_1 est égal à -3.

2. Justifier les égalités suivantes:

   a. $u_2 = -0{,}5$ b. $u_3 = 2{,}5$

3. Compléter le tableau suivant:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										

4. Que peut-on dire de la limite des termes de la suite (u_n)?

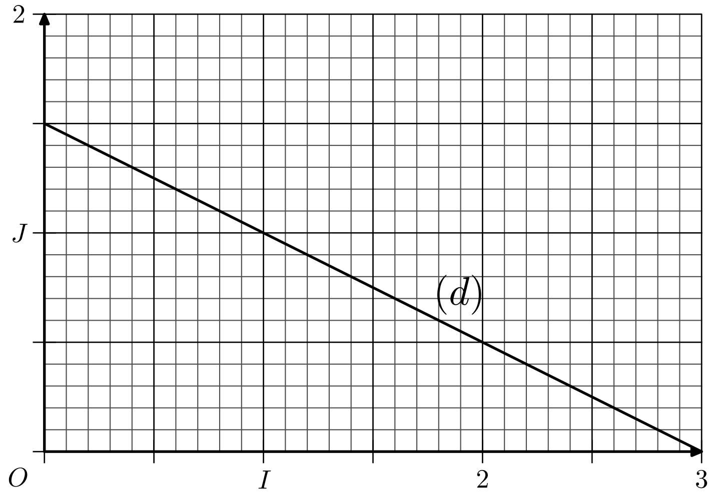
Exercice 3411

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence:

$$u_0 = \frac{5}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot u_n + \frac{3}{2} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, la droite (d) ayant pour équation:

$$y = -\frac{1}{2}\cdot x + \frac{3}{2}$$



1. Graphiquement, sur l'axe des abscisses représentées les cinq premiers termes de cette suite *(les constructions doivent être laissées)*.

2. a. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous en indiquant les valeurs approchées au dixième près:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	2,5	0,25	1,38	0,81	1,09					

   b. Quelle conjecture peut-on porter sur la limite de la suite (u_n)?

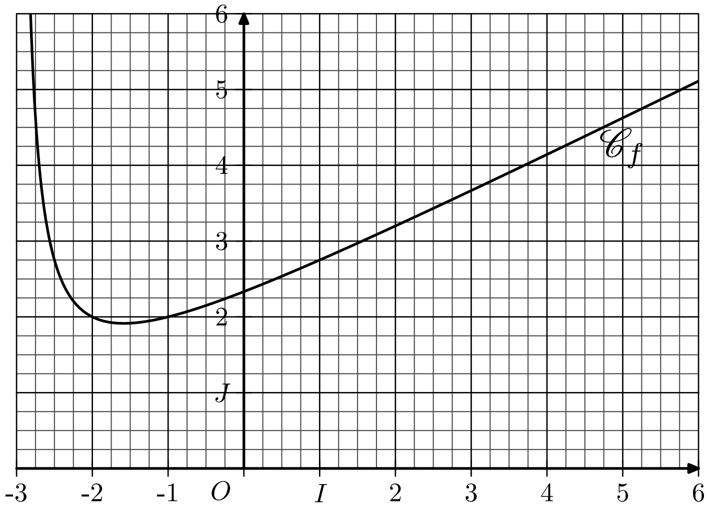
Exercice réservé 3412

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence:

$$u_0 = -1 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

où la fonction f est définie par: $\quad f(x) = \dfrac{x^2+7\cdot x+14}{2\cdot(x+3)}$

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



1. Graphiquement, sur l'axe des abscisses représentées les cinq premiers termes de cette suite *(les constructions doivent être laissées)*.

2. a. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous en y indiquant les valeurs approchées des termes au centième près.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	-1	2	3,2	4,03	4,16	

n	6	7	8	9	10	11
u_n						

b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite des termes de la suite (u_n)?

6. Avec un tableur :

Exercice 6732

Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau de valeurs de chacune des suites suivantes. Si nécessaire, on arrondi les valeurs au centième près :

1. Soit (u_n) définie par la relation :
$u_n = 2{\cdot}n + 3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n								

2. Soit (v_n) définie par la relation :
$v_0 = 5$; $v_{n+1} = 0{,}75{\cdot}v_n + 3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Soit (w_n) définie par la relation :
$w_n = v_n - 12$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a. Compléter le tableau de valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n								
w_n								

b. Vérifier que les 8 termes de la suite (w_n) permettent de conjecturer que la suite (w_n) est géométrique.

3. Soit (t_n) définie par la relation :
$t_0=0$; $t_1=1$; $t_{n+1}=t_n+t_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
t_n								

4. Soit (a_n) et (b_n) définies par les relations :
$$\begin{cases} a_0=2 \\ b_0=-1 \end{cases} ; \begin{cases} a_{n+1}=2{\cdot}a_n - b_n \\ b_{n+1}= a_n+3{\cdot}b_n \end{cases} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n								
b_n								

Exercice 6731

On définit les deux suites u et v par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 12 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}{\cdot}(u_n+2{\cdot}v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}{\cdot}(u_n+3{\cdot}v_n) \end{cases} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

	A	B	C	D	E
1	x_n	y_n	w_n		t_n
2	1	12			
3	8,33	9,25			
4	8,94	9,02			
5	9,00	9,00			
6	9,00	9,00			

1. A l'aide d'un tableur, générer les 20 premiers termes des ces deux suites afin d'obtenir un tableau analogue à celui présenté ci-contre.

2. On définit la suite (w_n) par : $w_n=v_n-u_n$

a. Dans la colonne `C`, exprimer les 20 premiers termes de la suite w.

b. Que peut-on faire pour mettre en évidence que la suite w suit une progression géométrique sur ces 20 premiers termes?

2. On définit la suite t définie par : $t_n=3{\cdot}u_n+8{\cdot}v_n$

a. Exprimer les 20 premiers termes de la suite t.

b. Quelle conjecture peut-on effectuer sur la nature de la suite t?

Exercice réservé 6722

On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies conjointement par les relations :
$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_{n+1} = 0{,}8{\cdot}x_n - 0{,}6{\cdot}y_n \\ y_{n+1} = 0{,}6{\cdot}x_n + 0{,}8{\cdot}y_n \end{cases} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. A l'aide d'un tableur, générer les 100 premiers termes de la suite dans un tableau semblable à celui représenter ci-contre.

	A	B
1	x_n	y_n
2	-3	4
3	-4,8	1,4
4	-4,68	1,76
5	-2,688	-4,216
6	0,3792	-4,9856
7	3,29472	-3,76096

2. Utiliser l'outil graphique en sélectionnant la plage `A2:B101` pour représenter dans le plan les points M_n définis par $M_n(x_n\,;y_n)$.
On choisirera le mode de représentation "*XY (dispersion)*".

3. a. Quelle conjecture peut-on émettre sur la position de la suite de points (M_n) dans le plan?
   b. Vérifier que le point M_0 vérifie cette conjecture.
   c. Etablir la relation : $OM_{n+1}=OM_n$
   d. Compléter la phrase suivante :
   "*Si, pour tout entier naturel, les termes d'une suite vérifie la relation $u_{n+1}=u_n$ alors la suite est ....*"

7. Suites arithmético-géométriques :

Exercice 6733

On considère la suite (u_n) définie par la relation :
$u_0=8$; $u_{n+1}=0{,}95{\cdot}u_n+0{,}5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. On définit la suite (v_n) définie par la relation :
$v_n=u_n-10$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95. On précisera la valeur de son premier terme.
   b. Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n.
2. En déduire une expression de la suite (u_n) en fonction de n
3. Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6734

On considère la suite (u_n) définie par la relation :
$u_0=-2$; $u_{n+1}=2{\cdot}u_n+0{,}5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. On définit la suite (v_n) définie par la relation :
$v_n=u_n+0{,}5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les élèments caractéristiques
   b. Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n.
2. En déduire une expression de la suite (u_n) en fonction de n
3. Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice réservé 3399

On souhaite étudier la suite (u_n) de premier terme $u_0=5$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+4 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On définit la suite (v_n) par :
$v_n=u_n-6$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et sa raison.
2. Exprimer v_n en fonction du rang n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice réservé 5740

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$u_1=0$; $u_{n+1}=0{,}2{\cdot}u_n+0{,}04$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
On admet que pour tout entier naturel : $u_n<0{,}05$

On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}^*$ par la relation :
$v_n=u_n-0{,}05$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Déterminer l'expression des termes de la suite (v_n) en fonction de n. En déduire l'expression des termes la suite (u_n) en fonction de n.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

8. Suites homographiques et suites géométriques :

Exercice 5734

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0=2 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{1+0.5{\cdot}u_n}{0{,}5+u_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On admet que pour tout entier naturel n, on a : $u_n>1$

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n\neq 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}.$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice réservé 5739

On considère la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{3\cdot u_n}{1+2\cdot u_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
On admet que pour tout entier naturel n, on a : $0<u_n<1$

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par :
$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
2. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n :
$$u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$$
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 6737

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :
$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{2-u_n}{u_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On admet que les termes de la suite (u_n) sont différent de -2 et de 0.

1. On définit la suite (v_n) définie par la relation :
$$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   a. Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les élèments caractéristiques.

   b. Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n.
2. En déduire une expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

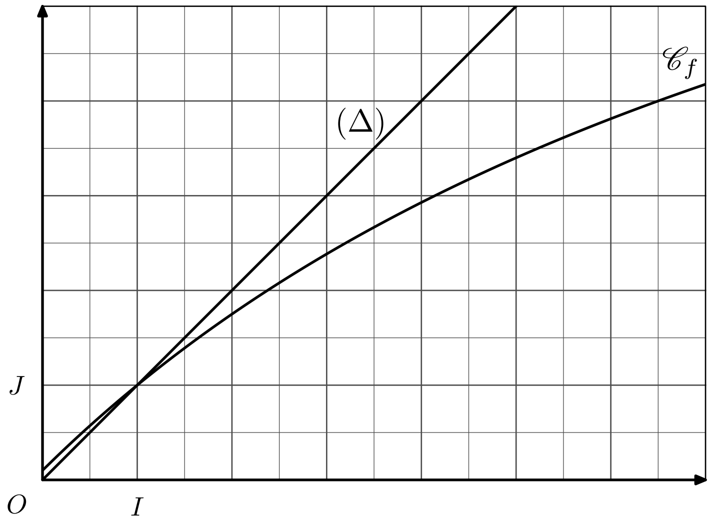
Exercice 2415

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_0 = \frac{13}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{10\cdot u_n+1}{u_n+10} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On admet que les termes de la suite (u_n) sont strictement supérieurs à 1.

1. On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{10\cdot x+1}{x+10}$

   On représente ci-dessous, dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f et la première bissectrice (Δ) du plan.



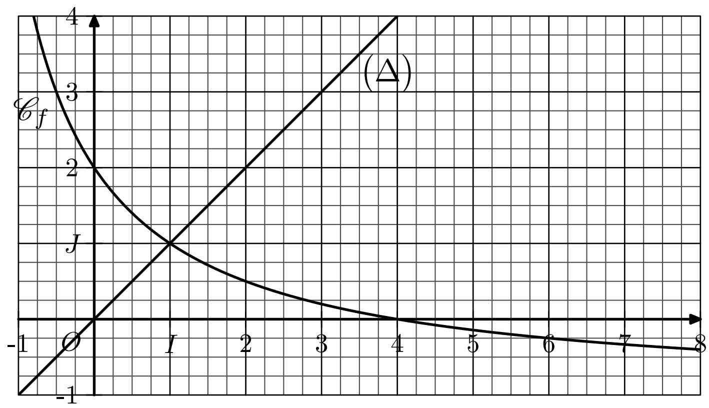
   a. Représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n)

   b. Faire une conjecture quant à la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :
$$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1} \text{ pour tout entier } n\in\mathbb{N}.$$
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

   b. Donner l'expression des termes de la suite (v_n) en fonction de leur rang n.
3. a. Etablir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :
$$u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$$
   b. En déduire l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de leur rang n.
4. Déterminer la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice réservé 2984

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dont l'image d'un nombre x est défini par :
$$f(x) = \frac{-x+4}{x+2}$$



La droite (Δ) est la première bissectrice du plan.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :
$$u_0 = 8 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On admet que les termes de la suite (u_n) sont définis et que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > -1$

1. Sur l'axe des abscisses, présenter les valeurs des six premiers termes de la suite.

2. Déterminer, par le calcul, les trois premiers termes de la suite (u_n).

3. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :
$$w_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 4}$$
   a. Etablir l'égalité suivante : $w_{n+1} = \frac{-2u_n+2}{3u_n+12}$
   b. En déduire que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera les caractéristiques.
   c. Donner l'expression du terme w_n en fonction de n.

4. On admet que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $-1 < w_n < 1$
   a. Etablir l'égalité : $u_n = -4 - \frac{5}{w_n - 1}$
   b. En déduire la formule explicite de la suite (u_n)

5. En déduire la limite de la suite (w_n).

Exercice 3517

Une suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par son premier terme U_1 et la relation de récurrence :
$$U_{n+1} = \frac{6 + U_n}{2 + U_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs a et b de U_1 $(a<b)$ pour lesquelles la suite est constante.

2. a. Montrer que si $U_1 \neq a$ et $U_1 \neq b$, il en est de même de U_n.
   b. Dans ces conditions, calculer :
$$\frac{U_{n+1} - a}{U_{n+1} - b} \text{ en fonction de } \frac{U_n - a}{U_n - b}$$

3. On suppose que $U_1 \neq a$ et $U_1 \neq b$ et on considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$V_n = \frac{U_n - a}{U_n - b} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$
   a. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique.
   b. Calculer la limite de $|V_n|$ quand n tend vers plus l'infini. En déduire celle de U_n.

9. Suites homographiques et suites arithmétiques :

Exercice 5852

Soit (u_n) la suite définie par :
$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{4\cdot u_n - 1}{u_n + 2} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$
On admet que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$

On définit les termes de la suite (u_n) par la relation :
$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

2. Pour tout entier naturel ,, exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

3. En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 6736

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :
$$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{-u_n - 2}{2\cdot u_n + 3} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
On admet que pour tous les termes de la suite (u_n) sont définis et qu'ils vérifient : $u_n > -1$

1. On définit la suite (v_n) définie par la relation :
$$v_n = \frac{1}{u_n + 1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   a. Justifier que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera les élèments caractéristiques.
   b. Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n.

2. a. Etablir l'égalité :
$$u_n = \frac{4 - 10\cdot n}{1 + 10\cdot n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   b. Montrer que les termes de la suite (u_n), pour $n \geqslant 1$, admettent l'expression :
$$u_n = \frac{\frac{4}{n} - 10}{\frac{1}{n} + 10}$$
   c. Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice réservé 6735

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :
$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{3\cdot u_n - 1}{u_n + 1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ et ses termes vérifient : $u_n > 1$

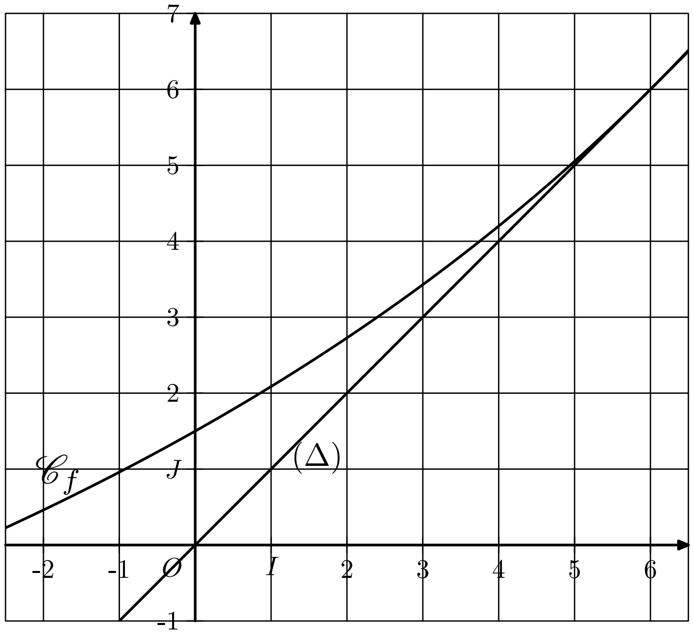
1. On définit la suite (v_n) définie par la relation :
$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   a. Justifier que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$. On précisera le premier terme de cette suite.
   b. Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n.

2. a. En déduire l'expression suivantes des termes de la suite (u_n) : $u_n = \frac{5+2\cdot n}{1+2\cdot n}$
   b. Etablir, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la relation : $u_n = \frac{2+\frac{5}{n}}{2+\frac{1}{n}}$
   c. Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3400

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on con-

sidère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie par la relation :
$$f(x) = -\frac{12x+36}{x-24}$$



La droite (Δ) est la première bissectrice du plan.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :
$$u_0 = -2 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On admet que la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ et que ses termes vérifient la comparaison : $u_n < 6$

1. Graphiquement, placer sur l'axe des abscisses les cinq premières valeurs de la suite (u_n).

2. Déterminer, par le calcul, la valeur des trois premiers termes de la suite (u_n).

3. On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$w_n = \frac{1}{u_n - 6} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   a. Etablir l'égalité suivante : $w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{18}$
   b. Donner la nature et les caractéristiques de la suite (w_n) ainsi que l'expression du terme w_n en fonction de n.
   c. Déterminer l'expression du terme u_n en fonction de n.

4. En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice réservé 5735

On considère la suite numérique (v_n) définie par :
$$v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{9}{6-v_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 < v_n < 3$
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$$
   c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par : $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$
   a. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
   b. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (v_n).

10. Suites définies conjointements :

Exercice 6739

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies conjointement par les relations suivantes :
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ v_0 = 4 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = 2\cdot u_n - v_n \\ v_{n+1} = -3\cdot u_n + 4\cdot v_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. On considère la suite (w_n) définie par la relation :
$$w_n = v_n - u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   a. Etablir que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 5.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le terme de rang n s'exprime par :
$$w_n = -5^n$$

2. On considère la suite (t_n) définie par :
$$t_n = 3\cdot u_n + v_n$$
   a. Montrer que : $t_0 = 19$
   b. Etablir que pour tout entier naturel, on a l'égalité : $t_{n+1} = t_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   On admettra que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $t_n = 19$

3. Déduire une expression des termes des suites (u_n) et (v_n) en fonction de n.

4. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 6738

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies conjointement par les relations suivantes :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = -1 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = 3\cdot u_n - 2\cdot v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2\cdot v_n \end{cases}$$

1. On considère la suite (w_n) définie par la relation :
$$w_n = v_n - u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   a. Etablir que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 4.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le terme de rang n s'exprime par :
$$w_n = -4\times 4^n$$

2. On considère la suite (t_n) définie par :
$$t_n = 4\cdot u_n + 8\cdot v_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   a. Donner la valeur du terme t_0.

b. Etablir que pour tout entier naturel, on a l'égalité :
$t_{n+1} = t_n$

On admettra que la suite (t_n) est constante.

3. Déduire une expression des termes des suites (u_n) et (v_n) en fonction de n.

4. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice réservé 3414

On considère les deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les premiers termes sont : $p_0=5$; $q_0=2$
Elles sont définies par les relations de récurrences suivantes :
$p_{n+1} = 0{,}5\cdot p_n + 0{,}4\cdot q_n$; $q_{n+1} = 0{,}4\cdot p_n + 0{,}5\cdot q_n$

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations suivantes :
$u_n = q_n + p_n$; $v_n = p_n - q_n$

1. Déterminer la valeur exacte des trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n).

2. a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

4. a. En remarquant que $u_n+v_n=2\cdot p_n$, déduire que la suite (p_n) est convergente ; préciser sa limite.

b. Etablir que la suite (q_n) est convergente ; déterminer sa limite.

Exercice 6759

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :
$$\begin{cases} a_0 = 6 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}2\cdot a_n + 1{,}3\cdot b_n \\ b_{n+1} = -0{,}8\cdot a_n - 0{,}2\cdot b_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Exprimer les termes a_{n+2} et b_{n+2} en fonction des termes a_n et b_n.

2. Que peut-on dire des termes de la suite (a_{2n}) ?

Exercice réservé 6758

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :
$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = 1 \end{cases} ; \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}8\cdot a_n + 0{,}9\cdot b_n \\ b_{n+1} = 0{,}4\cdot a_n - 0{,}8\cdot b_n \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

1. Etablir les égalités : $a_{n+2}=a_n$; $b_{n+2}=b_n$

2. Que peut-on dire des limites des suites (a_n) et (b_n) ?

Exercice réservé 3431

On considère les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} a_0 = 1 \ ; \ b_0 = c_0 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cdot b_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}\cdot a_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \\ a_n + b_n + c_n = 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n :
$a_{n+2} = \dfrac{1}{6}\cdot a_n$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel p :
$$\begin{cases} a_{2p} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^p \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad b_{2p+1} = \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^p \end{cases}$$

3. Montrer que : $\lim_{n\mapsto+\infty} a_n=0$.
On admet que $\lim_{n\mapsto+\infty} b_n=0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$.

11. Autres suites :

Exercice 6765

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n par :
$u_{n+1} = 0{,}5\cdot u_n + 0{,}5\cdot n - 1{,}5$

1. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :
$v_n = 0{,}1\cdot u_n - 0{,}1\cdot n + 0{,}5$

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n :
$u_n = 10\times 0{,}5^n + n - 5$

3. Déterminer alors la limite de la suite (u_n)

Exercice 6799

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 6$; $u_{n+1} = 2\cdot u_n - 3\cdot n + 5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Donner les trois premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie par :
$v_n = u_n - 3\cdot n + 2$

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

b. En déduire une expression des termes de la suite (v_n) en fonction de leur rang.

3. a. Justifier que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n = 8\times 2^n + 3\cdot n - 2$

b. En déduire la limite de suite (u_n).

Exercice 5737

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_0 = 2 \ ; \ u_{n+1} = \frac{2}{3}\cdot u_n + \frac{1}{3}\cdot n + 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$v_n = u_n - n$

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique

de raison $\dfrac{2}{3}$.

2. En déduire que pour tout entier naturel n :
$$u_n = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice réservé 2620

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le premier terme est 0 définie par la relation de récurrence suivante :
$$u_{n+1} = \frac{2}{5}\cdot u_n - 3\cdot n - 8 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer les trois premiers termes de cette suite.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :
$$v_n = u_n + 5n + 5 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. En déduire la formule explicite de la suite (u_n) d'un terme en fonction de n son rang.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3285

On définit la suite (u_n) est définie par :
$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On définit la suite (v_n) par : $v_n = 4u_n - 8n + 24$

1. Par transformation successive, établir l'égalité suivante :
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot v_n.$$

2. En déduire une expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n.

Exercice réservé 3518

On considère la suite numérique u définie par :
$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\cdot u_n + n - 1$ pour tout entier naturel n.

Soit v la suite définie pour tout entier ntaturel, par :
$$v_n = 4\cdot u_n - 6n + 15$$

1. Montrer que v est une suite géométrique.

2. Calculer v_0, puis calculer v_n en fonction de n.
En déduire que pour tout entier naturel n :
$$u_n = \frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$$

3. Montrer que la suite u peut s'écrire sous la forme :
$$u = t + w \qquad \text{où} \begin{cases} t \text{ est une suite géométrique} \\ w \text{ une suite arithmétique} \end{cases}$$

4. Calculer la valeur des deux sommes :
$$T_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_n \quad ; \quad W_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n.$$
En déduire : $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

12. Autres suites : suites récurrentes d'ordre 2 :

Exercice 3515

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \quad ; \quad u_{n+1} = 7\cdot u_n + 8\cdot u_{n-1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$s_n = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire s_n en fonction de n.

3. a. On pose $v_n = (-1)^n\cdot u_n$ et on considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $t_n = v_{n+1} - v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
Exprimer t_n en fonction de s_n.
   b. Quel est la nature de la suite (t_n).

4. a. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n *(on pourra calculer, de deux manières, la somme $t_0 + \cdots + t_{n-1}$).*
   b. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{u_n}{8^n}$.

Exercice réservé 5306

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels sont définies par :

- $u_0 = 5 \;;\; u_1 = 31 \;;\; u_{n+2} = 12\cdot u_{n+1} - 35\cdot u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
- $v_0 = -1 \;;\; v_1 = -11 \;;\; v_{n+2} = 12\cdot v_{n+1} - 35\cdot v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

On définit les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$x_n = u_n + v_n \quad ; \quad y_n = u_n - v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Calculer x_0 et x_1. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (x_n) est une suite géométrique de raison 5.

2. Montrer de même que la suite (y_n) est une suite géométrique.

3. Calculer x_n et y_n en fonction de n ; en déduire le calcul de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice réservé 3421

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante :
pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0{,}24\cdot x_{n-1}$

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.

   Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si, et seulement si, λ est solution de l'équation :
$$\lambda^2 - \lambda - 0{,}24 = 0$$
   En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :
$u_n = \alpha\cdot(1{,}2)^n + \beta\cdot(-0{,}2)^n \quad \alpha$ et β sont des réels.

2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E). Déterminer les valeurs de α et β telles que :
$u_0 = 6$ et $u_1 = 6{,}6$

En déduire que, pour tout entier naturel n :
$u_n = \frac{39}{7}\cdot(1{,}2)^n + \frac{3}{7}\cdot(-0{,}2)^n$.

3. Déterminer : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$.

13. Limites de suites définies explicitement :

Exercice 2558

Déterminer les limites des suites (u_n) définies ci-dessous :

a. $n^3\times 5^n$ b. $n-\left(\frac{2}{7}\right)^n$ c. $\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{3}{2}\right)^n$

d. 8^n-3^n e. $\frac{5^n-2^n}{3^n+2^n}$ f. $\left(\frac{31}{7}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^n$

Exercice réservé 3104

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) dont le terme général en fonction de n est donné ci-dessous

a. $n^5\times\left(\frac{3}{n^2}\right)^3$ b. 5^n-8^n

c. $\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n+2}$ d. $\frac{3^n-2^n}{5^n-4^n}$

255. Partage :

Exercice 9010

Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose :

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}.$$

1. Déterminer une relation de récurrence entre H_n et H_{n+1}.

2. En déduire le sens de variation de la suite (H_n).

3. a. Dans le logiciel Xcas, aller dans Prg puis Nouveau programme et taper le programme ci-dessous :

```
saisir(n);
H:=1.;
pour p de 2 jusque n faire
 H:=H+1/p;
fpour;
afficher(H);
```

b. Dans ce programme, que représente la variable H ?

c. À l'aide du programme, calculer les termes H_{10} , H_{1000} , H_{10^5} .
Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (H_n) ?

4. a. Pour représenter la suite graphiquement :
- modifier le programme précédente en ajoutant la ligne :

```
point(p,H);
```

après le calcul de H.
- Exécuter le programme pour $n=1000$.
- Faire afficher le graphique par Cfg/Montrer/DispG.

b. Le graphique semble-t-il confirmer la conjecture ?

5. a. Soit A un réel positif, écrire un programme permettant de déterminer la valeur de N, telle que pour tout $n\geqslant N$, on ait $H_n>A$.
Pour information, la syntaxe d'une boucle ***tant que*** *est la suivante :*

```
tantque (condition) faire
 ...
ftantque;
```

b. Tester votre programme pour $A=2$, $A=5$, $A=10$ et $A=15$.

c. En supposant, que pour tout réel A on puisse trouver un entier N vérifiant la condition ci-dessus, que pourrait-on affirmer ?

Une démonstration de la divergence : Minoration des paquets

On commence par remarquer que pour tout entier naturel k,

$\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}} > \frac{1}{2^{k+1}}\left(\underbrace{2^{k+1}-2^k}_{=2^k}\right)$, d'où : $\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}} > \frac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout entier naturel m, en notant posant $N=2^{m+1}$, on a :

$$H_N = 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2^1+1}+\frac{1}{2^2}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{2^2+1}+\ldots+\frac{1}{2^3}}_{>\frac{1}{2}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2^m+1}+\ldots+\frac{1}{2^{m+1}}}_{>\frac{1}{2}}$$

Par suite, $H_N>1+\frac{1}{2}(m+1)$.

De plus, pour tout réel A, $1+\frac{1}{2}(m+1)>A \Leftrightarrow m>2A-3$.

Soit A un réel. Il existe un entier m tel que $m>2A-3$, et on note N l'entier défini par $N=2^{m+1}$.

La suite H étant strictement croissante, pour tout entier $n\geqslant N$, on a $H_n\geqslant H_N$.

Ainsi, d'après la remarque précédente, $H_n>A$. Ce qui signifie que la suite H diverge vers $+\infty$.

255. Exercices non-classés :

Exercice réservé 6906

Les suites définies par : $\left\{\begin{array}{ll} u_{n+1} & \dfrac{9}{10}\cdot u_n + \dfrac{4}{10}\cdot v_n \\ v_{n+1} & \dfrac{1}{10}\cdot u_n + \dfrac{4}{10}\cdot v_n \end{array}\right.$

Apparemment la suite (u_n) serait croissante sur les premiers termes puis décroissante à partir du rang 4 quelque soit les premieres termes ....