Terminale S/Mini revisions

1. Suites :

Exercice réservé 4235

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

- $u_0 = 0$; $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $v_0 = 12$; $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2 \cdot v_n}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.

2. Suites et récurrences :

Exercice réservé 3649

La suite (u_n) est définie par :

$u_0 = 2$; $u_{n+1} = \dfrac{1}{3} \cdot u_n + \dfrac{23}{27}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n \geqslant \frac{23}{18}$$

2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

3. Etablir la convergence de la suite (u_n).

Exercice réservé 3656

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_1 = \dfrac{2}{5}$; $u_{n+1} = \dfrac{1}{5} \cdot u_n + \dfrac{2}{5}$ pour tout $n \geqslant 1$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.

2. Démontrer que (u_n) est croissante.

3. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

Exercice réservé 4223

La suite (u_n) est définit par $u_0 = 13$ et pour tout entier naturel n, on a :
$$u_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot u_n + \frac{4}{5}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel :
$$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice réservé 4012

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = -1$; $u_1 = \dfrac{1}{2}$; $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4} \cdot u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant :
$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} \cdot u_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   a. Calculer v_0.

   b. Etablir que (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

   c. Exprimer v_n en fonction de n.

Exercice réservé 5524

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_1 = 0{,}1$; $u_{n+1} = \dfrac{1}{5} u_n + \dfrac{3}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

3. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on :
$$\frac{3}{4} - u_n < 10^{-7}$$

Exercice réservé 3640

Soit (u_n) une suite définie par :

$u_0 = 1$; $u_{n+1} = \dfrac{1}{3} u_n + n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$: $u_n \geqslant 0$.

2. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :
$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_n = \frac{25}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2} \cdot n - \frac{21}{4}$$

Exercice réservé 3660

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = 5 \quad ; \quad u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n} \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1. Calculer u_1, u_2, u_3.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 4n^2+12n+5$

3. On considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{R}}$ définie par :
$d_n = u_{n+1} - u_n$
Déterminer la nature de la suite *(on précisera son premier terme et sa raison)*.

3. Suites et variations de fonctions :

Exercice réservé 4234

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

On admet que la fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	$\sqrt{2}$	↗ $+\infty$

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$u_n \geqslant \sqrt{2}$

2. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$: $f(x) \leqslant x$.

3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

4. Prouver que la suite (u_n) converge.

Exercice réservé 4224

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}\cdot x^2$$

1. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant 1$.

Exercice réservé 3645

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. On note α l'unique nombre réel positif vérifiant :

$$f(\alpha) = \alpha \qquad \text{où} \quad \alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$$

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n+1} \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha]$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

3. Etablir que la suite (u_n) est convergente.

4. Un peu plus loin dans la récurrence :

Exercice réservé 3650

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\cdot\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

C'est à dire que :

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\cdot\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

2. La suite (v_n) est définie par : $v_n = 1{,}2777\cdots7$
avec n décimales consécutives égales à 7.

Ainsi : $v_0 = 1{,}2 \quad ; \quad v_1 = 1{,}27 \quad ; \quad v_2 = 1{,}277$.

En utilisant le a., démontrer que la limite de la suite (v_n) est un nombre rationnel r *(c'est à dire le quotient de deux entiers)*. .

Exercice réservé 4225

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les évènements :

- G_n : *"Pierre gagne la n-ième partie."*
- P_n : *"Pierre perd la n-ième partie."*

On pose : $p_n = \mathcal{P}(G_n) \quad ; \quad q_n = \mathcal{P}(P_n)$

Recherche d'une relation de récurrence :

1. Déterminer p_1 puis les probabilités conditionnelles :
   $\mathcal{P}_{G_1}(G_2)$; $\mathcal{P}_{P_1}(G_2)$.
2. Justifier l'égalité : $p_n+q_n=1$.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :
   $p_{n+1} = 0{,}5\cdot p_n + 0{,}2$.

5. Fonctions : études :

Exercice réservé 3639

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-6x^2-14x+360}{(x+10)(x+9)}$$

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'image de x par la fonction f est strictement positive.
2. Déterminer les valeurs des limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$

Exercice réservé 3644

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$$

1. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$.
2. Résoudre dans l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$, l'équation $f(x)=x$. On note a l'unique solution de cette équation.
3. Montrer que si x appartient à l'intervalle $\big[0\,;a\big]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $\big[0\,;a\big]$.

6. Fonctions : exponentielles et logarithme :

Exercice réservé 3641

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+7}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\big(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\big)$.

1. Vérifier que pour tout réel x : $f(x)=\dfrac{4}{1+7\mathrm{e}^{-x}}$.
2. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
3. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice réservé 3654

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{9}{2}\cdot\mathrm{e}^{-2x}-3\cdot\mathrm{e}^{-3x}$

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
   $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}\cdot\Big(\dfrac{3}{2}-\mathrm{e}^{-x}\Big)$
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
3. Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.

Exercice réservé 4299

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\big(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\big)$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2\cdot\mathrm{e}^{-x}$

On note f' la fonction dérivée de f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice réservé 3658

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (x+1)\cdot\mathrm{e}^{-x}$

On note $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\big(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\big)$ du plan. On prendra $4\,cm$ pour unité graphique.

Etudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces élémets dans un tableau de variations le plus complet possible.

Exercice réservé 4305

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\big(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\big)$. On considère la fonction numérique φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \ln\big(x^2-2\cdot x+2\big) - x$$

1. Déterminer la limite de φ en $-\infty$.
2. a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,
   $$\varphi(x) = x\cdot\left[\frac{2\cdot\ln x}{x} + \frac{\ln\Big(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\Big)}{x} - 1\right]$$
   b. En déduire la limite de φ en $+\infty$

Exercice réservé 3653

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$

1. Déterminer le signe de f *(on pourra étudier les variations de la fonction f).*
   Etablir l'inégalité suivante pour tout entier naturel non nul n :

$$e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1+\frac{1}{n}$$

2. En utilisant l'inégalité précédente, démontrer que pour tout entier naturel non nul n :
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$$

Exercice réservé 3659

Prérequis : on rappelle que : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

1. Démontrer que : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

7. Fonctions : Asymptotes, tangentes, position relatives :

Exercice réservé 4232

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \ln\left(e^x+2\cdot e^{-x}\right)$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère. On note (d) la droite d'équation $y=x$

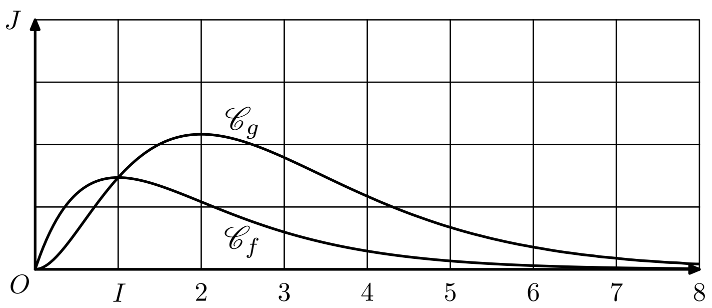
1. Montrer que, pour tout réel x :
$$f(x) = x+\ln\left(1+2\cdot e^{-2\cdot x}\right)$$

2. Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite (d).

Exercice réservé 4233

Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
$$f(x) = x\cdot e^{-x} \quad ; \quad g(x) = x^2\cdot e^{-x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.



1. Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$?

2. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

Exercice réservé 1616

On considère la fonction f définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par :
$$f(x) = x+\frac{\ln x}{x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ d'unité graphique $3\,cm$.

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat?

On admet que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$$f'(x) = 1+\frac{1-\ln x}{x}$$
et que la fonction f est strictement croissante. On note (d) la droite d'équation $y=x$.

2. a. Déterminer l'abscisse du point A de la courbe $\mathscr{C}$ en lequel la tangente $(\mathcal{T})$ est parallèle à la droite (d).

   b. Déterminer l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$.

3. A l'aide de la calculatrice, tracer les droites (d) et $(\mathcal{T})$ et la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice réservé 4230

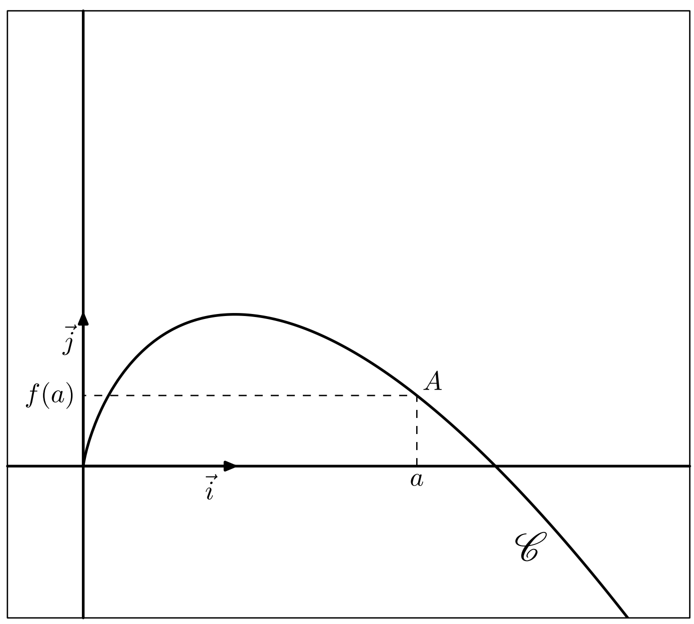
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ par :
$$f(x) = x\cdot(1-\ln x)$$

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et qu'elle admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$$f'(x) = -\ln x$$

2. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse a.

   a. Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A', point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.

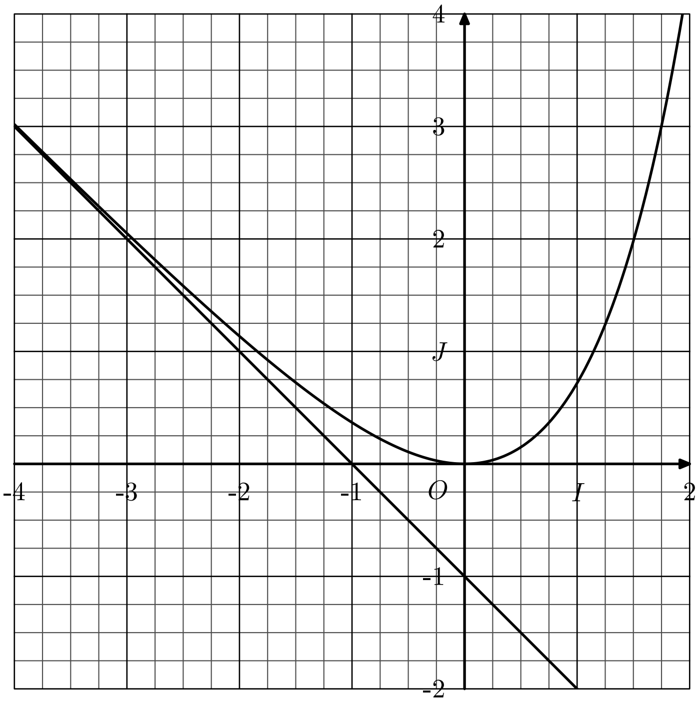
   b. Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a). Construire sur la représentation graphique de la courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous, la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.



Exercice réservé 3652

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^x-x-1$ et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

La droite (D) d'équation $y=-x-1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$. On a représenté ci-dessous la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).



1. Soit a un nombre réel. Ecrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point M d'abscisse a.
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b. Vérifier que : $b-a=-1$.
3. En déduire une construction, à effectuer sur la feuille annexe, de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1,5. On fera apparaître le point N correspondant.

Exercice réservé 4231

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.

1. Soit a un nombre réel. Démontrer que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point P d'abscisse $a-1$.
2. Soit N le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses. Démontrer que : $\overrightarrow{NP}=-\overrightarrow{i}$

8. Fonctions : théorème des valeurs intermédiaires :

Exercice réservé 4297

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$ par :
$f(x) = \ln\left(x^2+4\right)$

1. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\big[0\,;\,+\infty\big[$.
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$ par :
$g(x) = f(x) - x$
   a. Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$.
   b. Montrer que sur l'intervalle $\big[2\,;3\big]$ l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution que l'on notera α.
   Donner la valeur arrondie de α à 10^{-1}.
   c. Justifier que le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x)=x$.

Exercice réservé 4302

On note f la fonction définie sur l'intervalle $\big]0\,;+\infty\big[$ par :
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}$

1. Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :
$f'(x) = -\dfrac{1}{x^4}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(2\cdot x+1\right)$
2. Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $\big]0\,;+\infty\big[$.
3. Démontrer que l'équation $f(x)=2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $\big]0\,;+\infty\big[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

Exercice réservé 5528

Soit g la fonction définie sur $\big[0\,;+\infty\big[$ par :
$g(x) = x\left(e^x - e\right) + e - 2$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $\big[0\,;+\infty\big[$. Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $\big[0\,;+\infty\big[$ par :
$g''(x) = (2+x)e^x$
2. En déduire les variations de la fonction g' sur $\big[0\,;+\infty\big[$.
3. Etablir que l'équation $g'(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $\big[0\,;+\infty\big[$.

9. Fonctions : intégrations :

Exercice réservé 4292

On considère la fonction f définie sur $\big]0\,;+\infty\big[$ par :

$$f(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}$$

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de

son ensemble de définition.

2. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

3. Déterminer l'image de 1 par la fonction f. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

4. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ par :
$F(x)=x\cdot\ln x-\ln x$
est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

5. Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $\left]1\,;+\infty\right[$.

6. Montrer que l'équation $F(x)=1-\dfrac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]1\,;+\infty\right[$ qu'on notera α.

7. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

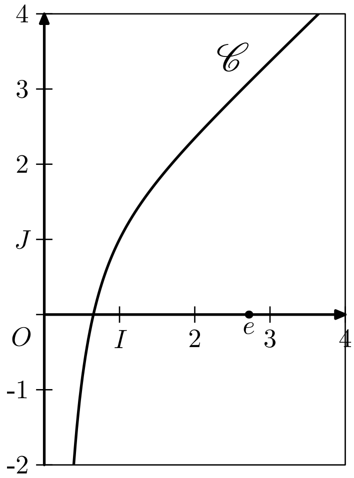
Exercice réservé 4293

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;I\,;J\right)$ dont l'unité mesure $2\,cm$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :
$$f(x)=x+\frac{\ln x}{x}$$
Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f.

1. Montrer que :
$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

2. En déduire l'aire de la région du plan délimitée par :
   - les droites d'équation $x=1$ et $x=e$;
   - l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.

   On exprimera cette aire en cm^2. Hachurer cette région sur le graphique.



Exercice réservé 4301

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{4}{1+7\cdot e^{-x}}$

1. Vérifier que pour tout réel x : $f(x)=\dfrac{4\cdot e^x}{e^x+7}$

2. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0\,;\ln 7\right]$.

Exercice réservé 5530

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

1. Démontrer que, pour tout réel x : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

2. On définit le nombre : $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que : $I=\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$

   Donner une interprétation graphique de I.

Exercice réservé 6088

faire plus d'exercices sur l'integration

10. Nombres complexes :

Exercice réservé 4238

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct. On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différente de O, d'affixe z, associe le point $M'=f(M)$ d'affixe z' définie par :
$$z'=z+\mathrm{i}-\frac{1}{z}$$
On recherche l'ensemble (E) des points du plan P privé du point O qui ont pour image par F, le point O.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z :
$$z^2+\mathrm{i}\cdot z-1=\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{i}\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{i}\right)$$

2. En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).

3. Démontrer que les points (E) appartiennent à (Γ).

Exercice réservé 4237

Le plan complexe est muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$$z_A=-2\cdot\mathrm{i}\quad;\quad z_B=-\sqrt{3}+\mathrm{i}\quad;\quad z_C=\sqrt{3}+\mathrm{i}$$

1. a. Ecrire z_A, z_B et z_C sous forme exponentielle.
   b. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.
   c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.

2. a. Ecrire le quotient $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
   b. En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice réservé 5535

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
   $a=2 \quad ; \quad b=3+\mathrm{i}\sqrt{3} \quad ; \quad c=2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

2. En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$.

Exercice réservé 4239

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (-2).

On définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{\overline{z}\cdot(z-2)}{\overline{z}-2}$$

1. Montrer que pour tout nombre complexe z, le nombre $(z-2)(\overline{z}-2)$ est réel.

2. En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2 : $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel.

3. Montrer que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.

Exercice réservé 5532

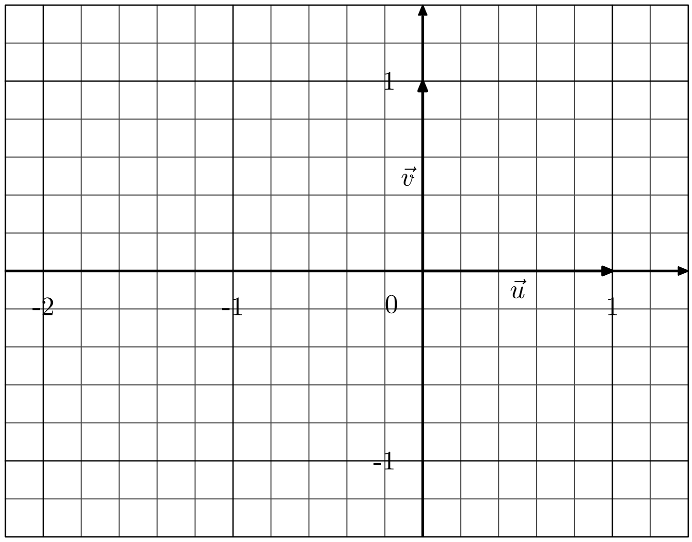
Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z\neq1$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\overline{z}-1}$$

Soit C le point d'affixe : $\quad z_C=-2+\mathrm{i}$.

1. Calculer l'affixe $z_{C'}$ du point C' image de C par la transformation f, et placer les points C et C' dans le repère donné ci-dessous :



2. Montrer que le point C' appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

3. Montrer que les points A, C et C' sont alignés.

Exercice réservé 5533

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$, on désigne par A le point d'affixes 1.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z\neq1$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\overline{z}-1}$$

1. Montrer que, pour tout nombre complexe $z\neq1$, $\dfrac{z'-z}{z-1}$ est réel.

2. Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?

Exercice réservé 5534

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2.$$

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que : $f(M)=M$.

2. Soit A le point d'affixe : $\quad a=\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}$
   a. Exprimer a sous écriture exponentielle.
   b. En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.

3. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.

11. Geometrie : espaces, plans et droites :

Exercice réservé 3113

On considère la droite paramétrique :

$$\begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

et le plan dont une équation cartésienne est :

$$x+2\cdot y+z-3=0$$

Justifier que ce plan et cette droite sont parallèles.

Exercice réservé 2679

On considère les deux droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} \quad ; \quad \begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases} \text{ où } u \in \mathbb{R}$$

Montrer que ces deux droites sont sécantes et déterminer les coordonnées du point d'intersection.

Exercice réservé 4251

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on donne les trois points :

$A(1\,;2\,;-1)$; $B(-3\,;-2\,;3)$; $C(0\,;-2\,;-3)$

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;-1\,;1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice réservé 4245

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

on considère les points :
$A(1\,;-1\,;4)$; $B(7\,;-1\,;-2)$; $C(1\,;5\,;-2)$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que le triangle ABC est équilaréral.
3. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1\,;1\,;1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
4. En déduire que $x+y+z-4=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice réservé 5536

On considère :
- (P_1) le plan d'équation : $x+y+z=0$;
- (P_2) le plan d'équation : $x+4y+2=0$.

1. Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.
2. Vérifier que la droite (d), intersection des plans (P_1) et (P_2) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

Exercice réservé 5537

On considère les deux plans (P_1) et (P_2) d'équations cartésiennes :
$(P_1) :\ 2x+y-z+1=0$; $(P_2) :\ x-y+2z+3=0$

1. Justifier que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.
2. Déterminer une équation paramétrique de la droite d'intersection des plans (P_1) et (P_2).

Exercice réservé 4242

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on donne les points :

$A(3\,;2\,;-1)$; $B(-6\,;1\,;1)$

$C(4\,;-3\,;3)$; $D(-1\,;-5\,;-1)$

1. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2{\cdot}x-3{\cdot}y+4{\cdot}z-13=0$
2. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
3. Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD}$

Exercice réservé 4240

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $-x+3{\cdot}y-z+5=0$ et le point $A(1\,;-2\,;1)$

1. Déterminer la représentation paramètrique de la droite (d) passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
2. En déduire les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.
3. Déterminer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$.

12. Probabilité :

Exercice réservé 4260

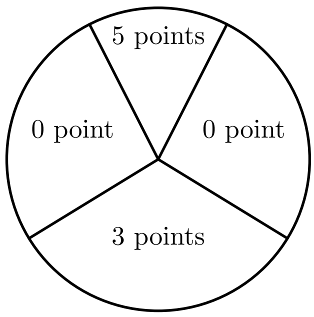
Soient A, B et C trois évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité $\mathcal{P}$. On a les informations suivantes :

- A et B sont indépendants ;
- $\mathcal{P}(A)=\dfrac{2}{5}$; $\mathcal{P}(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$;
- $\mathcal{P}(C)=\dfrac{1}{2}$; $\mathcal{P}(A\cap C)=\dfrac{1}{10}$.

1. Montrer que : $\mathcal{P}(B)=\dfrac{7}{12}$
2. On note $\overline{A\cup C}$ désigne l'évènement contraire de $A\cup C$. Déterminer la probabilité de l'évènement $\overline{A\cup C}$.

Exercice réservé 4256

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur figure ci-dessous :



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

Le joueur lance une fléchette. On note :
- p_0 la probabilité d'obtenir 0 point ;
- p_3 la probabilité d'obtenir 3 points ;
- p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.

On a les probabilités suivantes :

$p_0 = \frac{1}{2}$; $p_3 = \frac{1}{3}$; $p_5 = \frac{1}{6}$

Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximun. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total *(pour les trois lancers)* supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.

On note les évènements :

- G_2 : "*le joueur gagne la partie en 2 lancers*" ;
- G_3 : "*le joueur gagne la partie en 3 lancers*" ;
- P : "*le joueur perd la partie*".

On note $\mathcal{P}(A)$ la probabilité d'un évènement A.

1. Montrer, en utilisant un arbre pondéré que :
$$\mathcal{P}(G_2) = \frac{5}{36}$$

On admettra dans la suite que : $\mathcal{P}(G_3) = \frac{7}{36}$

2. En déduire $\mathcal{P}(P)$

13. Probabilite : binomiale :

Exercice réservé 4258

Si $\mathcal{X}$ est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 100 et $\frac{1}{3}$ alors :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{100}$$

Exercice réservé 4266

Une animalerie possède des alevins de poissons rare. La probabilité d'acheter un alevin et que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.

Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice réservé 4262

Une urne contient des boules indiscernables au toucher. 20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges. Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise *(après chaque tirage la boule est remise dans l'urne)* :

1. Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.
2. Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieur ou égale à 0,99.

Exercice réservé 5526

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieur à 0,999.

Exercice réservé 4268

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.

Soit n un entier naturel vérifiant $0\leqslant n\leqslant 50$, on définit les évènements suivants :

- A : "*le jardinier a choisi le lot* 1" ;
- B : "*le jardinier a choisi le lot* 2" ;
- J_n : "*le jardinier obtient n tulipes jaunes*".

1. Montrer que : $\mathcal{P}_B(J_n) = \binom{50}{n}\cdot 2^{-50}$
2. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.
3. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé. Etablir que :
$$p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$$
4. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n\geqslant 0{,}9$? Comment peut-on interpréter ce résultat?

14. Probabilite : conditionnelle :

Exercice réservé 4255

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :

> *"si la boule tirée est rouge, on a la remet dans l'urne ; si elle est vert, on ne la remet pas".*

Construire un arbre de probabilité illustrant cette situation.

Exercice réservé 4257

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.

Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.

1. Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.

2. Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.

Exercice réservé 4264

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges et d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires.

Le jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B :

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1. a. Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.

   b. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer?

2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égales à $\dfrac{4}{9}$.

3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer?

Exercice réservé 5525

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination "*compote allégée*".

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est à dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.

La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %. On prélève au hasard un petit pot dans la prodution totale. On considère les évènements :

- E : "*Le petit pot provient de la chaîne F_2*" ;
- C : "*Le petit pot est conforme*".

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

2. Calculer la probabilité de l'évènement : "*Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1*".

3. Déterminer la probabilité de l'évènement C.

4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement C est réalisé.

15. Probabilité : indépendance d'évènements :

Exercice réservé 5527

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $\left[0\,;80\right]$.

Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges. Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0{,}12+0{,}004x$.

2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

3. Déterminer x pour que les évènements "*tirer un cube bleu*" et "*tirer un cube marqué d'un losange*" soient indépendants.

4. On suppose dans cette question que $x=50$. Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

16. Probabilite : loi continue :

Exercice réservé 4261

La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}07$ sur $[0\,;+\infty[$.

On rappelle que pour tout $t > 0$, la probabilité de l'évènement $\{X \leqslant t\}$ est donnée par :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant t) = \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\,dx \quad \text{avec } \lambda = 0{,}07$$

1. Déterminer la probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans.
2. Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, déterminer la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans.

Exercice réservé 4270

La durée d'attente $\mathcal{T}$, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{6}$.

On a donc pour tout réel $t > 0$ *(désignant le temps exprimé en minutes)* :

$$\mathcal{P}(\mathcal{T} < t) = \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\,dx \quad \text{avec } \lambda = \frac{1}{6}$$

Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-4} près, que son temps total soit inférieur à 5 minutes.

Exercice réservé 4250

On considère une variable $\mathcal{X}$ qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité que la variable $\mathcal{X}$ soit inférieure à t est donnée :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant t) = \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}\,dt$$

Déterminer λ sachant que : $\mathcal{P}(\mathcal{X} > 5) = 0{,}4$

Exercice réservé 4265

On étudie la durée de vie de composants électroniques. Cette durée de vie est modélisée par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.

Sachant que $\mathcal{P}(\mathcal{X} > 5) = 0{,}325$, déterminer λ.

Exercice réservé 4271

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée $\mathcal{X}$ qui suit la loi "*loi de durée de vie sans vieillissement*" *(ou encore loi exponentielle)* de paramètre 0,125.

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans.
2. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999?

Exercice réservé 5539

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de moyenne 54 et d'écart-type 5 *($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(54\,;25)$)*.

On utilisera le tableau de valeur ci-dessous où la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit une loi normale centrée et réduite *($\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0\,;1)$)* :

x	$-2{,}8$	-1.8	$-1{,}2$	$0{,}4$	$1{,}2$	2
$\mathcal{P}(\mathcal{Z} \leqslant x)$	0,003	0,004	0,115	0,655	0,885	0,977

Déterminer les valeurs arrondies au millième des probaiblités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 60)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geqslant 45)$ c. $\mathcal{P}(48 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 56)$

Exercice réservé 5540

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de moyenne 17 et d'écart-type σ *($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(17\,;\sigma^2)$)*.

Sachant que $\mathcal{P}(14 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 20) = 0{,}382$, déterminer la valeur de σ.

On utilisera le tableau de valeur ci-dessous où la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit une loi normale centrée et réduite *($\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0\,;1)$)* :

x	$-2{,}25$	$-1{,}75$	$-0{,}5$	0	$0{,}75$	$1{,}25$	$1{,}75$
$\mathcal{P}(\mathcal{Z} \leqslant x)$	0,012	0,040	0,309	0,5	0,773	0,894	0,960

Exercice réservé 6087

Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation de cette crème.
Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit. Sur 140 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites.
Estimer, par intervalle de confiance au seuil de 95 %, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

Exercice réservé 6425

En prévision d'une élection, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.
Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 52,9 % des électeurs voteraient pour le candidat A.

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut-il croire en sa victoire?

17. Trigonométrie :

Exercice réservé 3648

On désigne par g la fonction définie sur $]-1\,;1[$ par :

$$g(0) = 0 \quad ; \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\,;1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

On considère la fonction composée h définie sur $\left]-\pi\,;0\right[$ par :
$h(x)=g\big(\cos x\big)$

1. Démontrer que pour tout x de $\left]-\pi\,;0\right[$, on a $h'(x)=1$, où h' désigne la dérivée de h.
2. Calculer $h\Big(-\dfrac{\pi}{2}\Big)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

255. Partage :

Exercice 9008

1. La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=2n^2-1$.
Écrire le terme u_{n+1} en fonction de n, en déduire le sens de variation de la suite u.
2. On considère la suite s définie sur $\mathbb{N}$ par $s_n=-n^2-n$.
Montrer par deux méthodes différentes que s est une suite décroissante.
3. La suite v est définie sur $\mathbb{N}$ par $\left\{\begin{array}{rcl} v_0 & = & 2 \\ v_{n+1} & = & 3v_n-2 \end{array}\right.$
Calculer v_3.
Cette suite est-elle arithmétique, géométrique ? Argumenter votre réponse.
4. La suite w est la suite arithmétique de premier terme $w_0=3$ et de raison $\frac{1}{4}$.
   a. Écrire la relation de récurrence liant w_{n+1} à w_n.
   b. Écrire le terme général w_n.
   c. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{8} w_n$.
5. La suite (t_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n=-\frac{2\times(3^n)^2}{5^{n+1}}$.
Montrer que la suite (t_n) est une suite géométrique et préciser ses éléments caractéristiques.

255. Exercices non-classés :

Exercice réservé 6428

Un ostréiculteur affirme que 60 % de ses huîtres ont une masse supérieure à 91 g. Un restaurateur souhaiterait lui acheter une grande quantité d'huîtres mais il voudrait, auparavant, vérifier l'affirmation de l'ostréiculteur.

Le restaurateur achète auprès de cet ostréiculteur 10 douzaines d'huîtres qu'on considèrera comme un échantillon de 120 huîtres tirées au hasard. Sa production est suffisamment importante pour qu'on l'assimile à un tirage avec remise.
Il constate que 65 de ces huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

Soit $\mathcal{F}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 120 huîtres associe la fréquence de celles qui ont une masse supérieure à 91 g.

Après en avoir vérifié les conditions d'application, donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire $\mathcal{F}$. *(on utilisera des valeurs approchées au millième près).*

