Terminale S/Nombres complexes et arguments

1. Rappel de trigonométrie :

Exercice 3792

Soit α un nombre réel. Simplifier les écritures suivantes :

a. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ b. $\sin\left(\alpha+3\cdot\pi\right)$

c. $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ d. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Exercice 3793

Résoudre les équations suivantes :

a. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 5947

1. En remarquant l'égalité $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
2. Déterminer les valeurs de : $\cos\frac{7\pi}{12}$; $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 3794

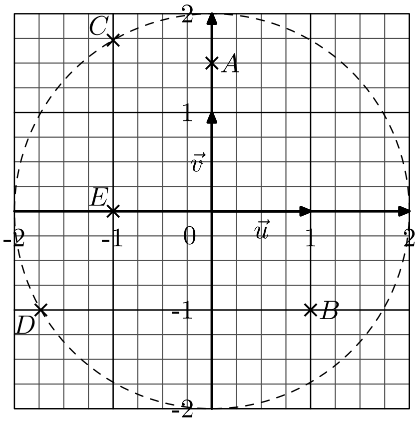
1. a. Développer l'expression : $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.
   b. Résoudre l'équation : $\sin x+\cos x=1$
2. a. Développer l'expression : $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.
   b. Résoudre l'équation : $\cos x-\sqrt{3}\cdot\sin x=1$

2. Ecriture trigonométrique :

Exercice 3795

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ orthormé direct représenté ci-dessous :

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2 est représenté en pointillé ; les points C et D appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.



1. Déterminer les modules et les arguments des affixes des points A, B, C, D et E.
2. Placer les points F et G d'affixes respectives z et z' vérifiant :

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = -\frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} |z'| = 2 \\ \arg(z') = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice réservé 3797

1. Déterminer l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

   a. $z_1=-\frac{1}{2}+\text{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $z_2=\sqrt{3}+\text{i}$

   c. $z_3=-1-\text{i}$ d. $z_4=\frac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes z_5 et z_6 non-nuls définis par :

   a. $|z_5|=5$; $\arg(z_5)=-\frac{\pi}{3}$

   b. $|z_6|=2$; $\arg(z_6)=-\frac{\pi}{2}$

Exercice 5952

Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes :

a. $z_1=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}-\text{i}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b. $z_2=-3\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\text{i}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

c. $z_3=\cos\frac{\pi}{6}+\text{i}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

d. $z_4=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+\text{i}\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Exercice réservé 5346

On considère les nombres complexes ci-dessous :

$z_1=1+2\cdot\text{i}$; $z_2=5-2\cdot\text{i}$; $z_3=-1-2\cdot\text{i}$

1. Déterminer le module de chacun des nombres complexes ci-dessus.
2. Déterminer, au centième de radian près, la valeur de l'argument de chacun des nombres complexes ci-dessus.

3. Ecriture trigonométrique et opérations :

Exercice 5951

On considère deux nombres complexes z et z' non-nuls de modules respectifs r et r' et d'arguments respectifs θ et θ'.

1. Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes z et z'.

2. Montrer que le nombre complexe $z{\cdot}z'$ est un nombre complexe de module $(r\cdot r')$ et d'argument $(\theta+\theta')$.

3. Montrer que le nombre complexe $\dfrac{z}{z'}$ est un nombre complexe de module $\dfrac{r}{r'}$ et d'argument $(\theta-\theta')$.

Exercice réservé 3828

Rechercher tous les couples $(z_1\,;z_2)$ de nombres complexes satisfaisant aux conditions:

$$\begin{cases} z_1{\cdot}z_2 = \dfrac{1}{2} \\ z_1+2{\cdot}z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Déterminer l'écriture trigonométrique de chacun des nombres ainsi obtenue.

Exercice réservé 3826

On considère les deux nombres complexes:

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}{\cdot}\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad z_2 = 1-\mathrm{i}$$

1. Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes z_1 et z_2.

2. a. Etablir l'égalité suivante:
$$\frac{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}{\cdot}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}{\cdot}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)} = \cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}{\cdot}\sin\frac{\pi}{12}$$
   b. On définit le nombre Z par la relation: $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$
   Déterminer l'écriture trigonométrique du nombre complexe Z.

3. En déduire que:
$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad ; \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

4. On considère l'équation d'inconnue réelle x:
$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right){\cdot}\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right){\cdot}\sin x = 2$$
Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

4. Ecriture trigonométrique et géométrie :

Exercice 5359

On considère le plan muni du repère $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ et les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives:

$$z_A=-2+\mathrm{i} \quad ; \quad z_B=-3{\cdot}\mathrm{i} \quad ; \quad z_C=3-2{\cdot}\mathrm{i} \quad ; \quad z_D=3+2{\cdot}i$$

1. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z défini par le quotient:
$$Z=\frac{z_C-z_A}{z_D-z_B}$$
   b. En déduire l'écriture trigonométrique du complexe Z.

2. a. Justifier que le quadrilatère $ABCD$ a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur.
   b. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange?

Exercice 5358

On considère le plan muni du repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$ et les trois points A, B et C d'affixes respectives:

$$z_A=1-2{\cdot}\mathrm{i} \quad ; \quad z_B=-3-4{\cdot}\mathrm{i} \quad ; \quad z_C=-2\sqrt{3}-\mathrm{i}{\cdot}\sqrt{3}$$

1. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z défini par le quotient:
$$Z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$$
   b. En déduire l'écriture trigonométrique du nombre complexe Z.

2. a. Déduire des questions précédentes que le triangle ABC est un triangle isocèle en A.
   b. Donner la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice réservé 5965

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

1. On considère les deux points A et B d'affixes respectives:
$$z_A=2+2{\cdot}\mathrm{i} \quad ; \quad z_B=1-\mathrm{i}$$
   a. Donner l'écriture trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{z_A}{z_B}$.
   b. En déduire la nature du triangle OAB.

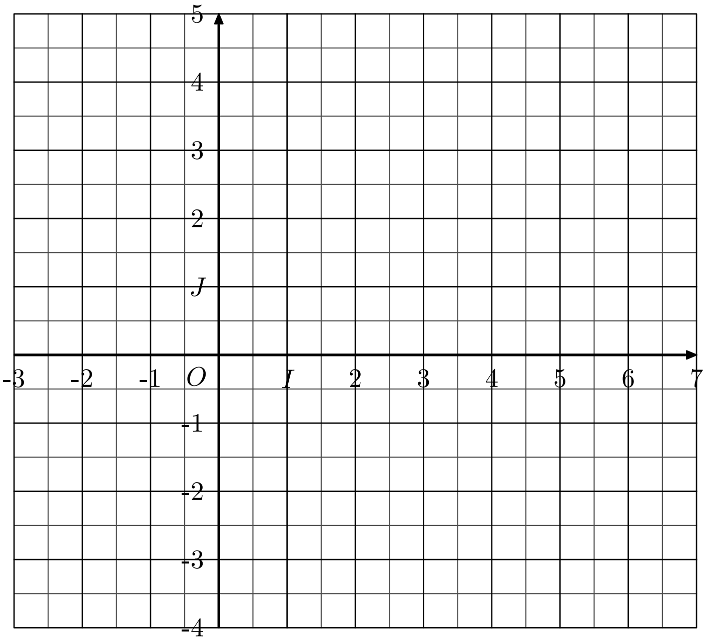
2. On considère les points C, D, E d'affixes respectives:
$$z_C=\sqrt{3}+1+\sqrt{3}{\cdot}\mathrm{i} \quad ; \quad z_D=2-\mathrm{i} \quad ; \quad z_E=\mathrm{i}$$
   a. Déterminer l'écriture algébrique du nombre $\dfrac{z_C-z_E}{z_D-z_E}$, puis son écriture trigonométrique.
   b. En déduire la nature du triangle CDE.

Exercice réservé 5360

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives:

$$z_A=-2+\mathrm{i} \quad ; \quad z_B=-3{\cdot}\mathrm{i} \quad ; \quad z_C=6+5{\cdot}\mathrm{i}$$

1. Placer ces trois points dans le repère ci-dessous :



2. Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

3. On considère le point D d'affixe z_D où : $z_D = 4 - \mathrm{i}$

   a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z définie par :
   $$Z = \frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}$$

   b. Justifier que la demi-droite $[AD)$ est la bissectrice de l'angle $\big(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\big)$.

Exercice réservé 3862

On considère le plan complexe muni d'un repère $\big(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\big)$.

1. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
$$z_A = 4 - \sqrt{3}\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_B = \big(4 - \sqrt{3}\big) + \mathrm{i}\cdot\big(1 - \sqrt{3}\big)$$
$$z_C = -1 + 2\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_D = 2\sqrt{3} - 1$$
Etablir que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2. On considère les points E, F, G et H d'affixes respectives :
$$z_E = 5 - 3\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_F = 4 + \mathrm{i}\cdot\big(-3 + \sqrt{3}\big)$$
$$z_G = \mathrm{i} \quad ; \quad z_H = -2\sqrt{3} - \mathrm{i}$$
Etablir que les droites (EF) et (GH) sont perpendiculaire.

Exercice 4105

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $\big(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\big)$, on considère les points M et M' distincts de O d'affixes respectives z et z'. On pose :
$$z = x + \mathrm{i}\cdot y \quad ; \quad z' = x' + \mathrm{i}\cdot y'$$
où x, x', y, y' sont des nombres réels.

On rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z.

1. Exprimer le complexe $\overline{z}\cdot z'$ en fonction de x, x', y, y'.

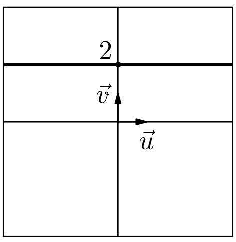
2. a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $Re\big(z'\cdot\overline{z}\big) = 0$.

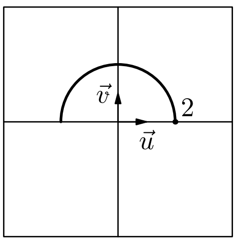
   b. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si, et seulement si, $Im\big(z'\cdot\overline{z}\big) = 0$

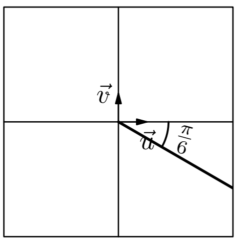
5. Module, argument et géométrie :

Exercice 5380

Décrire, à l'aide de l'écriture algébrique ou de l'écriture exponentielle, des parties du plan représentées ci-dessous :







Exercice 3796

On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\big)$ orthonormé direct. Décrire l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie les conditions suivantes :

a. $|z| = 1$ b. $|z| \leqslant 3$ c. $1 \leqslant |z| \leqslant 2$

d. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$ e. $\big|\arg(z)\big| = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice réservé 3861

On considère le plan complexe muni d'un repère $\big(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\big)$.

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives :
$$z_A = 1 + \mathrm{i} \quad ; \quad z_B = 2 + \mathrm{i}\cdot\big(\sqrt{3} + 1\big) \quad ; \quad z_C = \big(1 - \sqrt{3}\big) + \mathrm{i}\cdot 2$$

   a. Déterminer l'écriture algébrique du quotient :
   $$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

   b. Déterminer le module et un argument du quotient précédent.

   c. Etablir que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2. On considère les points D, E, F d'affixes respectives :
$$z_D = 4 - \sqrt{3}\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_E = \big(4 + \sqrt{3}\big) + \mathrm{i}\cdot\big(-1 - \sqrt{3}\big)$$
$$z_F = -\big(\sqrt{3} + 2\big)\cdot\mathrm{i} + 4$$

   a. Déterminer l'écriture algébrique du quotient :
   $$\frac{z_E - z_D}{z_F - z_D}$$

b. Déterminer le module et un argument du quotient précédent.

c. Etablir que le triangle DEF est équilatéral.

Exercice 4320

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$. On prendra $2\,cm$ pour unité graphique. On appelle J le point d'affixe i.

1. On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives :
$a=-3-\mathrm{i}\quad;\quad b=-2+4\cdot\mathrm{i}\quad;\quad c=3-\mathrm{i}\quad;\quad h=-2.$

   Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2. Montrer que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

3. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe $\dfrac{b-c}{h-a}$.
En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 3854

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_A=-\sqrt{3}-\mathrm{i}\quad;\quad z_B=1-\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$$
$$z_C=\sqrt{3}+\mathrm{i}\quad;\quad z_D=-1+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$$

1. Donner le module et un argument de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.

2. Construire à la règle et au compas les points A, B , C et D *(on prendra pour unité graphique $2\,cm$)*.

3. Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\dfrac{z_A}{z_B}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 3875

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$. Soit A et B les points d'affixes respectives :
$z_A=\mathrm{i}\quad;\quad z_B=2+2\cdot\mathrm{i}$

1. Soit I un point du plan dont l'affixe z_I vaut :
$z_I=-4+\dfrac{23}{2}\cdot\mathrm{i}$

   Montrer que le point I appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

2. Soit M un point du plan d'affixe $(2+\mathrm{i})$.

   Montrer que le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

6. Ecritures exponentielles :

Exercice réservé 5365

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

a. $z_1=3\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\pi}$ b. $z_2=\sqrt{2}\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{4}}$ c. $z_3=2\sqrt{3}\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6}}$

Exercice 3848

Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

a. $z_1=5$ b. $z_2=-3$ c. $z_3=-3\cdot\mathrm{i}$

d. $z_4=-3+3\cdot\mathrm{i}$ e. $z_5=-2\sqrt{3}-2\cdot\mathrm{i}$ f. $z_6=\sqrt{3}-3\cdot\mathrm{i}$

Exercice réservé 3818

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z-2\cdot\mathrm{i})(z^2-2\cdot z+2)=0$

Donner l'écriture algébrique et l'écriture exponentielle des solutions de cette équation *(justifier les réponses)*.

Exercice 5366

On considère les deux nombres complexes donnés ci-dessous :

$$z_1=\sqrt{3}\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}}\quad;\quad z_2=\sqrt{6}\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6}}$$

Déterminer une expression simplifiée des calculs suivants :

a. $z_1\cdot z_2$ b. $\dfrac{z_1}{z_2}$ c. z_1+z_2

Exercice 3831

1. Soit z un nombre complexe admettant la forme exponentielle :
$$z=r\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\theta}\quad\text{où } r\in\mathbb{R}_+^*,\quad\theta\in\mathbb{R}$$
Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

   a. $\overline{z}$ b. $-z$

2. a. Justifier l'égalité suivante : $3\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}}=-3\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}}$

   b. En déduire l'écriture exponentielle de :
$2\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}}+3\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 3798

1. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z défini par $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

2. a. Donner l'écriture exponentielle des deux nombres complexes suivants : $z_1=1-\mathrm{i}\quad;\quad z_2=1+\mathrm{i}$

   b. En déduire l'écriture exponentielle du nombre complexe z.

3. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe z_3 définie par : $z_3=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}}$

Exercice 4253

Dans $\mathbb{C}$, on considère les deux nombres complexes suivants :
$z_A=1-\mathrm{i}\quad;\quad z_B=2+\sqrt{3}+\mathrm{i}$

1. Déterminer le module et un argument de z_A.

2. Ecrire $\dfrac{z_B}{z_A}$ sous écriture algébrique.

3. Montrer que : $\dfrac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$

4. En déduire l'écriture exponentielle de z_B.

Exercice 3827

On considère dans $\mathbb{C}$ les nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β. Montrer que :

$\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1\cdot z_2}$ est un réel positif ou nul.

Exercice 6380

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$z_0=\sqrt{3}-i \quad ; \quad z_{n+1}=(1+i)\cdot z_n$ pourt tout $n\in\mathbb{N}$

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.

2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et $1+i$.
En déduire la forme exponentielle de z_1.

3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

7. Ecriture exponentielle et mesure principale de l'argument :

Exercice 5381

On considère les deux nombres complexes suivants donnés sous leur forme trigonométrique :

$z_1=2\cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}} \quad ; \quad z_2=3\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$

Donner l'écriture exponentielle des expressions suivantes :

a. $z_1\cdot z_2$ b. $(z_1)^2\cdot z_2$ c. $\dfrac{z_2}{(z_1)^3}$

Exercice 3829

1. a. Soit z_1 le nombre complexe admettant pour écriture algébrique : $z_1=-2\cdot\sqrt{3}+2\cdot i$
Déterminer l'écrituer exponentielle de ce nombre.

b. Soit z_2 le nombre complexe vérifiant :
$|z_2|=\sqrt{2} \quad ; \quad \arg(z_2)=\dfrac{3}{4}\cdot\pi$
Déterminer l'écriture algébrique du complexe z_2

2. Déterminer, à votre convenance, soit l'écriture algébrique, soit l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

a. $z_1\cdot z_2$ b. z_1+z_2

Exercice réservé 3830

1. On définit les deux nombres complexes z et z' par :
$z=3-4\cdot i \quad ; \quad z'=-2+i$

Déterminer l'écriture algébrique des nombres suivants :

a. $z+\overline{z'}$ b. $\overline{z}\cdot z'$ c. $\overline{z'}\cdot\overline{z+i}$

2. Considérons les deux nombres complexes z et z' admettant pour écriture algébrique :
$z=2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z'=e^{i\cdot\frac{5\pi}{6}}$

Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

a. $-z$ b. $\overline{z}$ c. $z\cdot z'$ d. $\dfrac{(\overline{z'})}{z}$

Exercice réservé 4325

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

1. Soit $z=3+i\cdot\sqrt{3}$.

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n non nul, $z^{3\cdot n}$ est imaginaire pur.

2. Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 2 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors :
$|i+z|=1+|z|$

3. Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 3 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2+\dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Exercice 6081

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$. On considère l'application z de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$f : z\longmapsto z^2$.

On considère le complexe : $a=\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{2}$

1. Exprimer a sous écriture exponentielle.

2. En déduire les nombres complexes antécédents du nombre a par f.

Exercice 3810

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
$z^2-2z+4=0$

Les solutions seront notées z et z', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.
Donner l'écriture algébrique puis l'écriture exponentielle des solutions de cette équation.

2. Donner l'écriture exponentielle exacte du nombre complexe $(z')^{2\,004}$, puis son écriture algébrique.

Exercice 5325

On considère le nombre complexe : $a=\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2011}$.

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

"*Le nombre complexe a est un nombre imaginaire pur.*"

8. Ecriture exponentielle et géométrie :

Exercice réservé 3823

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique $2\,cm$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A=-2\cdot\mathrm{i}\quad;\quad z_B=-\sqrt{3}+\mathrm{i}\quad;\quad z_C=\sqrt{3}+\mathrm{i}$

1. a. Donner l'écriture exponentielle des nombres z_A, z_B et z_C.
   b. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.
   c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ, puis placer les points B et C.
2. a. Donner l'écriture algébrique du complexe $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$, puis son écriture exponentielle.
   b. En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice réservé 3809

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ *(unité graphique $4\,cm$)*. Soit I le point d'affixe 1. On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OI]$ et on nomme son centre Ω.

On pose $a_0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{i}$ et on note A_0 son image.

1. Montrer que le point A_0 appartient au cercle $\mathscr{C}$.
2. Soit B le point d'affixe b, avec $b=-1+2\cdot\mathrm{i}$, et B' le point d'affixe b' telle que $b'=a_0\cdot b$.
   a. Calculer b'.
   b. Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

9. Transformations du plan :

Exercice 6020

A tout nombre complexe z tel que $z\neq 2$, on associe le nombre complexe z' définie par :

$z'=\dfrac{z+3}{z-1}$

1. On note $x+\mathrm{i}\cdot y$, où $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, l'écriture algébrique du nombre complexe z.
   Donner l'écriture algébrique du nombre z', associé à z, en fonction de x et de y.
2. a. On considère l'équation cartésienne :
   $(E):\ x^2+y^2+2x-3=0$
   Justifier que, dans le plan, l'ensemble des solutions de (E) est le cercle $\mathscr{C}$ de centre $(-1\,;0)$ et de rayon 2.
   b. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que le nombre complexe z' associé soit un imaginaire pur.

Exercice réservé 6086

On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé.

On considère les points : $A(0\,;1)$ et $B(2\,;-1)$

A tout point du plan M, différent de A et de B, d'affixe z, on associe un point M' d'affixe z' définie par la relation :

$z'=\dfrac{z-2+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$

1. Interpréter géométriquement la longueur OM' et l'angle $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right)$ en utilisant les points A, B et M.
2. On considère le point $M(4\,;1)$. Déterminer l'écriture algébrique et exponentielle du nombre complexe z' associé à z.
3. Dans cette question, on souhaite caractériser l'ensemble des points M du plan tel que le point M' appartiennent à l'axe des ordonnées :
   a. On note $z=x+\mathrm{i}\cdot y$. Etablir la propriété suivante :
   "*z' est un imaginaire pur si* $\quad x^2+y^2-2x-1=0$"
   b. Justifier que l'ensemble recherché est le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 4078

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$. On note A le point d'affixe i.

Pour tout point M d'affixe z tel que $z\neq\mathrm{i}$, on définit le point M' dont l'affixe z' est défini par :

$z'=\dfrac{1}{3\cdot(z-\mathrm{i})}$

1. Etablir la proposition suivante :
   Si M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors M' est un point du cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3\cdot r}$.
2. Démontrer que : $\arg(z')=-\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{AM}\right)$

Exercice 4099

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (-2). On définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe :

$z'=\dfrac{\overline{z}\cdot(z-2)}{\overline{z}-2}$

1. Montrer que pour tout nombre complexe z, le nombre complexe $(z-2)(\overline{z}-2)$ est réel.
2. En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel.
3. Montrer, pour tout point M du plan, que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.

Exercice 6381

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i} \quad ; \quad z_{n+1} = (1+\mathrm{i})\cdot z_n$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = |z_n|$.

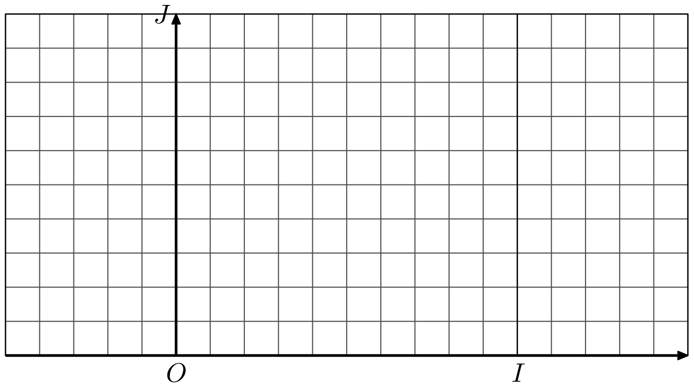
1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 6384

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad ; \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\right)\cdot z_n$$

1. Déterminer les affixes des poitns A_1 et A_2.
2. Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
3. On admet que, pour tout entier naturel n :
   $$z_n = |z_n|\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{n\cdot\pi}{6}}$$
   Placer les point A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 dans le repère ci-dessous :

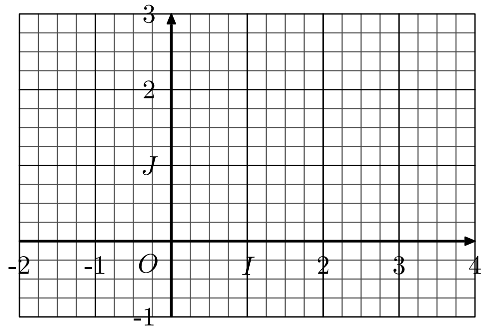


Exercice 6382

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définies par :

$$z_0 = 4 \quad ; \quad z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}\cdot z_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on note A_n le point image du nombre complexe z_n.



1. a. Calculer z_1, z_2 et z_3.
   b. Placer les points A_1, A_2 et A_3 dans le repère ci-dessous.
2. On note ℓ_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant sucessivement par les points A_1, A_2, A_3...

   Ainsi : $\ell_n = \sum_{k=1}^{n} A_{k-1}A_k = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$

   a. Etablir la relation ci-dessous pour tout entier naturel n non-nul :
   $$A_{n-1}A_n = |z_n|$$
   b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n non-nul :
   $$A_{n-1}A_n = 2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$
   c. Donner une expression de ℓ_n en fonction de n.
   d. Déterminer la limite éventuelle de la suite (ℓ_n).

